José Aires de Castro Filho
Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
Síntria Labres Lautert

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DO 6º AO 9º ANO

Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica
Coletânea Cadernos E-Mult

Via Litterarum
EDITORA

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DO

6º ao 9º ano

ORGANIZADORES

José Aires de Castro Filho

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana

Síntria Labres Lautert

ENSINANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DO

6º ao 9º ano

AUTORES

José Aires de Castro Filho

Juscileide Braga de Castro

Marcília Chagas Barreto

Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica
Coletânea Cadernos E-Mult

Itabuna - Bahia, 2017

Via Litterarum

Revisão
Maria Luiza Castro Araújo

Editoração Eletrônica
Via Litterarum Editora

Projeto Gráfico, Diagramação e Capa
Mel Campos

Apoio financeiro

CAPES

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Ficha Catalográfica: Elisabete dos Santos

E61 Ensinando multiplicação e divisão do 6º ao 9º ano / José Aires de Castro Filho, Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana, Sintria Labres Lautert, organizadores. – Itabuna : Via Litterarum,2017.

120p.: il. Alfabetização matemática, Estatística e Científica;

Coletânea de Cadernos E-mult.

Inclui referências e apêndice.

ISBN: 978-85-8151-151-1

1.Matemática (Ensino fundamental) – Estudo e ensino. 2.Multiplicação. 3. Divisão. I. Castro Filho, José Aires. II. Santana, Eurivalda Ribeiro dos Santos. III Lautert, Sintria Lautert. IV. Série

CDD – 372.7

VIA LITTERARUM EDITORA
Rua Frederico Maron, 199, Centro, Ibicaraí, BA. CEP 45745-000
www.vleditora.com.br ::vialetras@gmail.com

SUMÁRIO

CAPÍTULO III

PREFÁCIO

De caráter informativo e formativo, a presente obra apresenta aos seus leitores resultados de uma pesquisa, construídos (coletados e interpretados), gradativamente, ao longo de quatro anos por meio de diversos cenários de investigação. Produto de um intercâmbio duradouro entre pesquisadores de diferentes instituições de nível superior em intensa colaboração com professores do ensino fundamental que ensinam Matemática, o livro configura-se como uma articulação entre teoria, pesquisa e prática em sala de aula.

A articulação teórica é feita em detalhes quando problemas matemáticos envolvendo conceitos matemáticos diversos são apresentados para exemplificar a natureza de uma multiplicidade de relações lógico-matemáticas que estão imbricadas nos enunciados dos problemas e na mente de quem os tenta solucionar. Nesse contexto, aspectos importantes da Teoria dos Campos Conceituais ganham forma, auxiliando o leitor a estabelecer uma ponte entre conhecimento teórico de natureza psicológica e conhecimento prático de natureza educacional.

Os dados de pesquisa foram obtidos a partir de situações de resolução de problemas por estudantes do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. O desempenho, os procedimentos adotados e as hipóteses levantadas em relação às razões que justificaram o desempenho observado na resolução dos problemas fornecem um panorama acerca dos limites e das possibilidades que os estudantes desses anos escolares apresentam frente às demandas lógicas próprias do Campo Conceitual Multiplicativo. Esse panorama, discutido e reiterado em diversas passagens do livro, é o pano de fundo de um diálogo constante que os autores mantêm com os professores, leitores aos quais essa obra se destina. Nesse diálogo, são ressaltados aspectos importantes para a prática docente no que tange ao ensino de Matemática.

Os dados de pesquisa foram também obtidos quando o olhar dos autores se voltou para aquele que ensina Matemática. Assim, o professor assume papel de destaque em dois momentos distintos do estudo: enquanto participante de uma série de encontros de formação e enquanto docente atuando em sala de aula. Esse hibridismo de papéis que se complementam permitiu que o professor fosse convidado a propor situações didáticas baseadas nas discussões levantadas durante os encontros de formação. As situações didáticas por eles propostas, que envolviam a formulação de problemas matemáticos diversos, eram aplicadas em sala de aula. Posteriormente, a ação didática empreendida tornava-se objeto de discussão em encontros subsequentes. Os depoimentos dos professores a respeito do que acontecia em sala de aula podem ser entendidos como uma oportunidade de organizar, pensar e rever sua própria ação didática, alternando-se no papel de ator e espectador daquilo que ocorre no cenário de ensino. É relevante mencionar a importância dessa dinâmica para a formação de professores.

Com esse perfil, o livro fornece ao leitor uma maior reflexão acerca da resolução de problemas matemáticos e o convida a assumir o desafio, enquanto docente, de levar os estudantes a alcançarem um maior domínio do conhecimento matemático.

A obra coloca em prática o compromisso com a sistematização e socialização do conhecimento gerado por meio de uma proposta institucional de grande porte.

Alina Galvão Spinillo

Recife, outubro de 2017.

INTRODUÇÃO

Este livro apresenta os resultados de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, Projeto Nº 15.727, referente ao Edital 049/2012/CAPES/INEP. A pesquisa intitulada "Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental" foi realizada pela Rede E-mult, composta por universidades de três estados da Região Nordeste: Bahia, Ceará e Pernambuco (apresentadas no Quadro 1). Contou-se, ainda, com a colaboração de um professor da Universidade Nove de Julho do estado de São Paulo.

Quadro 1 – Universidades que compõem a Rede E-Mult por estado

Estado	Universidades Parceiras
Bahia	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) – IES responsável pela Coordenação Geral (SEDE) e Núcleo Ilhéus
Ceará	Universidade Federal do Ceará (UFC) – IES responsável pelo Núcleo Fortaleza Universidade Estadual do Ceará (UECE)
Pernambuco	Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – IES responsável pelo Núcleo Recife Universidade de Pernambuco (UPE) Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A Rede E-Mult teve como finalidade investigar e intervir na prática de professores do ensino fundamental no que tange ao Campo Conceitual Multiplicativo, baseado no modelo de formação "reflexão-planejamento-ação-reflexão". Para alcançar o objetivo, a Rede E-Mult realizou a pesquisa durante quatro anos, de 2013 a 2016. Em 2013, foi conduzido um estudo dos modelos disponibilizados pela Prova Brasil e de seus descritores; dos currículos das escolas; da Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Gérard Vergnaud, no que se refere ao Campo Conceitual Multiplicativo.

Tendo como base os estudos realizados em 2013, no ano seguinte, o projeto foi apresentado e acolhido por 12 escolas de ensino fundamental, sendo quatro escolas por estado. Elas foram denominadas escolas parceiras, visto que se buscou, desde o início, estabelecer um grupo com características colaborativas, composto por professores que ensinam matemática; gestores e coordenadores pedagógicos; pesquisadores; estudantes de graduação, mestrado e doutorado.

Paralelamente, foi elaborado, testado e aplicado um instrumento diagnóstico contendo 13 situações, envolvendo o Campo Conceitual Multiplicativo. O estudo diagnóstico foi feito com 3.890 estudantes do 1º ao 9º ano ensino fundamental das 12 escolas parceiras. Ainda no ano de 2014, foi dado início às análises referentes ao desempenho e aos esquemas usados pelos estudantes para resolver as situações componentes do instrumento diagnóstico.

Em 2015, realizou-se o processo formativo da Rede E-Mult com 84 professores. Esse processo possibilitou colaborar para o desenvolvimento profissional dos professores, facilitando a reflexão acerca de suas ações, seguida pelo planejamento reflexivo de novas ações num movimento espiralar crescente.

No ano 2016, a Rede E-Mult efetivou o processo de organização e de análise dos dados obtidos e deu continuidade ao processo formativo com professores de sete das 12 escolas parceiras.

Para fazer chegar à comunidade escolar e acadêmica os resultados do estudo, foi organizada, em três livros, a Coletânea Cadernos E-Mult, que fazem parte da Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica. Cada um dos livros tem foco específico. O primeiro livro é direcionado aos professores que atuam do 1º ao 3º ano do ensino fundamental, o segundo, aos professores que atuam no 4º e no 5º ano do ensino fundamental e o terceiro, aos que atuam do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

O livro "Ensinando multiplicação e divisão do 6º ao 9º ano", compõe o terceiro livro da coletânea e foi estruturado em três capítulos. No Capítulo I, apresentamos, numa linguagem simples, as bases principais da Teoria dos Campos Conceituais no que se refere ao Campo Conceitual Multiplicativo da forma como foi abordada na Rede E-Mult. O Capítulo II, traz resultados do desempenho dos estudantes no teste diagnóstico e os esquemas de resolução dos estudantes em diferentes situações. Tratamos, no Capítulo III, das situações elaboradas e aplicadas pelos professores durante o processo formativo, contemplando seus comentários a respeito de formas de resolução e dificuldades apresentadas pelos estudantes. O capítulo contempla, ainda, memórias dos professores acerca do processo formativo.

Professor, convidamos você a realizar a leitura deste texto, apropriando-se dos fundamentos da Teoria dos Campos Conceituais, desejando que ele possa contribuir com o seu fazer em sala de aula.

Os organizadores

O presente trabalho foi realizado com apoio do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES/Brasil.

CAPÍTULO I

Juscileide Braga de Castro
José Aires de Castro Filho
Marcília Chagas Barreto

1- TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais foi elaborada pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud. Um campo conceitual abrange um conjunto de situações que relacionam vários conceitos. Por exemplo, o Campo Conceitual Multiplicativo, tratado com detalhes neste livro, envolve conceitos, como: proporção, função linear e n-linear, fração, entre outros (VERGNAUD, 1983, 1996; MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2014).

Segundo Vergnaud (1988, 1996), um conceito é constituído por uma tríade de conjuntos: situações (S), invariantes (I) e representações (R). As situações estão relacionadas aos problemas e às atividades que dão sentido ao conceito. Os invariantes são propriedades, relações, axiomas e teoremas que constituem a essência do conceito e, por isso mesmo, não variam, na situação em que ele está envolvido. As representações são formas de expressar simbolicamente os conceitos, os invariantes e as situações, elaboradas em desenhos, diagramas, números, símbolos matemáticos, dentre outras possibilidades.

O entendimento das situações requer a compreensão das relações entre as grandezas envolvidas e de suas medidas, pois necessita conhecimentos que vão além de apenas saber operar os números (CASTRO, 2016). As grandezas estão relacionadas às propriedades inerentes à matéria e à energia e que podem ser medidas. As grandezas permitem que se faça comparação entre os objetos, como, por exemplo: o comprimento, a massa, a temperatura, a velocidade (MORAIS; TELES, 2014).

Usamos grandezas em várias situações para medir: o comprimento de um tecido; o tempo necessário para realizar uma atividade; a massa[1] das frutas; a temperatura do paciente (SOUZA; PATARO, 2012). É possível comparar as grandezas, desde que elas tenham a mesma natureza: comprimento com comprimento, temperatura com temperatura, unidades com unidades.

As grandezas podem ser mensuradas por meio de medidas convencionais (metros, quilômetros, quilogramas, metros por segundo) ou idiossincráticas (palmo, palito, passo, garrafa, copo), sendo que o resultado dessa medição é expressa por um número obtido e o nome da unidade de medida que foi utilizada.

Retomando a tríade indicada por Vergnaud para a formação do conceito, vejamos um exemplo de situação: "Laura comprou oito carrinhos para sua coleção. Sabendo que cada carrinho custou 12 reais, quanto Laura gastou?"

No exemplo apresentado, constatamos uma situação multiplicativa em que é possível estabelecer a relação fixa entre as duas medidas (valor gasto em reais por carrinho), nesse caso, 12 reais por cada carrinho. Essa é uma relação invariável, pois, independentemente da quantidade de carrinhos comprados por Laura, o valor gasto por carrinho manter-se-á constante.

Notem que, para resolver a situação apresentada, o estudante poderá optar por diferentes ações para resolvê-la: a operação de multiplicação, a soma de parcelas iguais ou o agrupamento. Vergnaud (1990) chama de esquema essa organização das ações utilizadas pelos estudantes, quando resolvem cada tipo de situação. É durante a resolução de situações que o conceito passa a ter sentido para o estudante, que

1 No cotidiano, referimo-nos a peso como sinônimo de massa.

pode já ter a competência para resolvê-la, ou ainda, precisar desenvolver novos esquemas.

Com base em Vergnaud (1988, 1996), um conceito não pode ser reduzido a sua definição nem aprendido por experiência com apenas uma situação. Isso significa que precisamos conhecer as diferentes situações que fazem parte do conceito e explorá-las na escola, pois, somente por meio de variadas situações é que ele vai sendo construído, gradativamente, pelos estudantes. Da mesma forma, uma situação matemática não pode ser compreendida somente por meio de um conceito, mas sim pela coordenação entre vários deles. Um conceito desenvolve-se à medida que se mobilizam procedimentos, propriedades e relações, por meio de situações diversificadas, interconectadas a um conjunto de representações.

Vergnaud (1996) assevera a necessidade de o professor conhecer as situações do ponto de vista conceitual e estrutural. Quando, por exemplo, se trata de proporção, é necessário perceber em que situações esse conceito se apresenta e quais diferentes significados podem ser encontrados em cada uma delas. É necessário, também, que o professor perceba, através das representações utilizadas pelos estudantes, como eles estão compreendendo os conceitos envolvidos na situação.

Essa percepção ajuda o professor a avaliar o conhecimento dos estudantes e a escolher situações que os auxiliem na construção do conceito, mobilizando diferentes esquemas. Há situações em que o estudante já elaborou o esquema adequado à sua resolução. Nesse caso, permanecer propondo situações de mesma natureza não contribuirá para a elaboração de novos esquemas e, consequentemente, para o avanço conceitual, por parte dos estudantes. Todavia, ao trabalhar com situações para as quais os estudantes ainda não elaboraram os necessários esquemas, proporciona-se a reflexão, a busca por outras formas de resolução e novas descobertas.

Essas discussões podem ajudá-lo, professor, a compreender melhor as dificuldades dos seus alunos e a planejar atividades adequadas às suas necessidades. Caso você queira conhecer mais sobre a Teoria dos Campos Conceituais, consulte a seção de leituras recomendadas, no fim deste capítulo.

1.1 O Campo Conceitual Multiplicativo

Neste livro, exploraremos o Campo Conceitual Multiplicativo, que não está restrito às operações aritméticas de multiplicação e divisão. O Campo Conceitual Multiplicativo envolve os conceitos de função linear e n-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, proporção, número racional, combinação, produto cartesiano, área, volume, entre outros. Todos esses conceitos tomam por base as relações multiplicativas, envolvendo as operações aritméticas de multiplicação e divisão. Diante dessa variedade de conceitos, as situações multiplicativas foram classificadas por Vergnaud (2009) em dois grandes grupos: o das relações ternárias e o das relações quaternárias. As relações ternárias são aquelas que relacionam três elementos entre si, enquanto as quaternárias relacionam quatro elementos. Vejamos um exemplo de cada uma das relações:

Exemplo 1: Relação Ternária

A casa de José tem 10 metros de comprimento e quatro metros de largura. Qual a área da casa de José?

Para a resolução dessa situação, devem ser consideradas três medidas: a largura da casa (4m); o comprimento (10m) e a área desconhecida. A área é encontrada pelo produto das duas medidas conhecidas.

Exemplo 2: Relação quaternária

Um litro de gasolina custa R$ 4,00. Quanto gastarei para abastecer meu carro com 10 litros de gasolina?

Nessa situação, verifica-se que estão envolvidas quatro medidas: as duas quantidades de litros (1l e 10l) e os respectivos preços a pagar (R$4,00 e o preço a ser encontrado). O preço do litro de gasolina permanece constante, independentemente do número de litros comprados, embora o preço a pagar aumente.

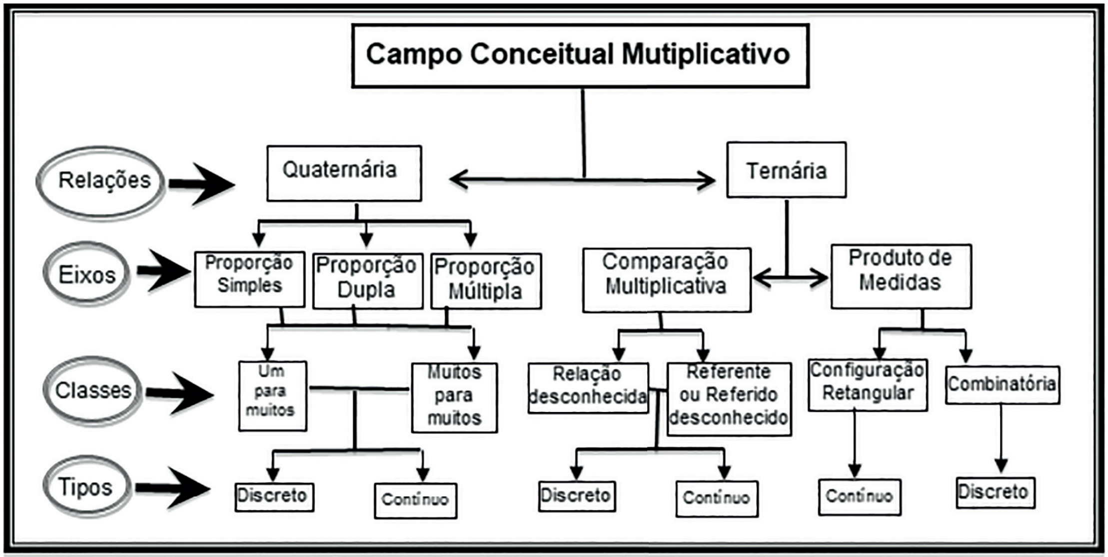
A partir dos exemplos, pode-se verificar que o valor desconhecido em ambas as situações deve ser encontrado pela operação de multiplicação entre os números 10 e 4. Vergnaud (2009) denomina esse processo de cálculo numérico.

O esquema que necessita ser empregado para a compreensão da situação envolvendo o conceito de área (situação ternária) difere qualitativamente do esquema adequado à situação que envolve o valor a pagar pela gasolina (situação quaternária). Na ternária, existe uma relação entre as três quantidades (área = largura × comprimento) que não é fixa, pois qualquer alteração em uma das medidas provocará mudança no produto. Na quaternária, há uma relação fixa, razão entre duas quantidades, pois o preço do litro de gasolina não será alterado, por mais que se modifique a quantidade de litros a comprar. Essa relação de alteração de uma quantidade por consequência da alteração da outra é chamada proporção. No exemplo em foco, trata-se de proporção direta[2], visto que as duas aumentam concomitantemente. Essas elaborações, necessárias para a compreensão das situações, são denominadas, por Vergnaud, cálculo relacional. O teórico considera que os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento necessárias para compreender as relações existentes na operação, logo, são diferentes dos cálculos numéricos, que consideram apenas as resoluções numéricas das situações (VERGNAUD, 2009).

As discussões trazidas por Vergnaud, ao longo do processo de elaboração de sua teoria, foram retomadas no Brasil por um grupo de pesquisadores que propôs uma nova classificação para as situações. Essa classificação será adotada na discussão deste livro e pode ser vista na Figura 1.1. Para a melhor compreensão do que discutiremos, a seguir, é importante que você, professor, perceba os diversos elementos presentes na figura:

2 Tem-se uma proporção direta quando as duas grandezas aumentam ou diminuem em uma mesma proporção. A teoria desenvolvida por Vergnaud considera, para a classificação do Campo Conceitual Multiplicativo, apenas as grandezas diretamente proporcionais

Figura 1.1 – Classificação das situações que fazem parte do Campo Conceitual Multiplicativo



Fonte: : adaptado de Magina; Santos e Merlini (2014)

Como se percebe na Figura 1.1, as situações são classificadas em relações quaternárias e ternárias, cada uma delas desmembradas em eixos, classes e tipos. É importante que você, professor, conheça todas essas situações e, por isso, passaremos a discuti-las, uma a uma, seguindo o que é apresentado na Figura 1.1.

1.2 Situações da Relação Quaternária

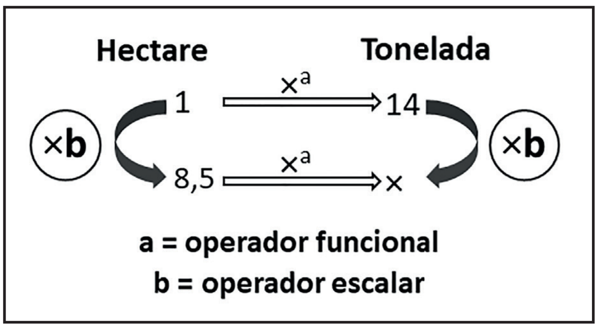
As relações quaternárias, conforme visto anteriormente, compreendem quatro medidas relacionadas duas a duas, sendo duas delas de uma grandeza e as outras duas de outra. Têm-se como exemplos as relações entre: pessoas e objetos; preço e comprimento (preço pago por metro de tecido); tempo e distância (velocidade), entre muitas outras.

As situações classificadas como quaternárias podem ser modeladas como função linear, por pertencerem à classe de problemas que estabelece proporções entre duas grandezas. Ao se analisar a estrutura de uma situação de proporção, é possível verificar propriedades que as relacionam com função, o que possibilita aos estudantes utilizarem não apenas os conceitos de aritmética, mas noções do campo algébrico. As situações quaternárias são divididas nos eixos de Proporção Simples, Proporção Dupla e Proporção Múltipla.

Vergnaud (1983, 1988, 2009) criou um diagrama que ajuda a evidenciar as relações presentes nas situações componentes do grupo de relação quaternária. Veja o exemplo, para a seguinte situação:

Mauro é agricultor e planta maracujá. Sabendo que sua terra produziu, em média, 14 toneladas de maracujá por hectare e que ela mede 8,5 hectares, quantas toneladas de maracujá Mauro colheu?

Figura 1.2 – Diagrama de Vergnaud para a situação de relação quaternária



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O Diagrama da Figura 1.2 evidencia que é possível resolver a situação de duas maneiras:

1) Considera-se a relação entre as diferentes quantidades de hectare (1 e 8,5) – seta vertical. Essa relação é chamada operador escalar por ser adimensional. O operador escalar do exemplo apresentado vale 8,5, estabelecido a partir do aumento da quantidade de hectares, de 1 para 8,5 hectares. Isso significa que a quantidade de hectares aumentou 8,5 vezes, sendo que, para manter a proporcionalidade, é preciso que a grandeza medida em tonelada aumente na mesma proporção. Assim, ao multiplicar 14 toneladas pelo escalar 8,5, podemos concluir que foram produzidas, em média, 119 toneladas de maracujá.

2) Pode-se considerar, também, a relação entre as duas quantidades de grandezas envolvidas na situação. O operador funcional, visualizado na Figura 1.2, na horizontal, surge da relação entre as medidas de grandezas distintas, no exemplo acima, a relação entre hectare e tonelada, originando o operador funcional de 14 toneladas por hectare. Dessa forma, o produto entre 8,5 hectares e 14 toneladas por hectare, resulta na mesma resposta: 119 toneladas. Esses operadores serão tratados em todas as situações de proporção, analisadas a seguir.

PROPORÇÃO SIMPLES

Na Proporção Simples, tem-se uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo somente quatro quantidades. As situações de Proporção Simples podem ser representadas pela função $f(x) = ax$, pois, ao estabelecer o operador funcional, tem-se o coeficiente angular da referida função. As proporções simples são compostas por duas classes de situações: a um para muitos e a muitos para muitos.

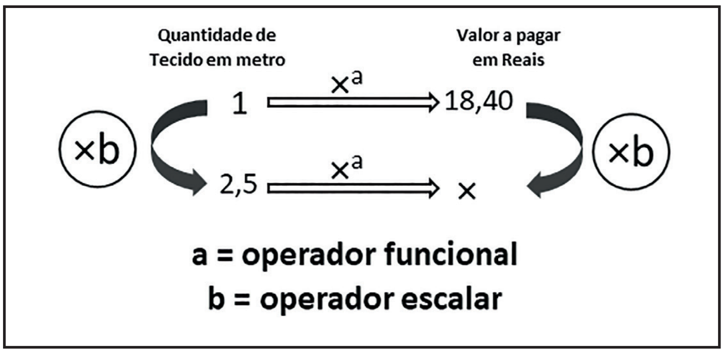
PROPORÇÃO SIMPLES UM PARA MUITOS

A classe um para muitos associa uma unidade de uma grandeza com várias unidades da outra grandeza.

Exemplo 3: para fazer uma fantasia para a escola, Maria precisará de 2,50 metros de tecido. Quanto ela gastará, sabendo que cada metro de tecido custa R$18,40?

Nesse exemplo, verificam-se duas grandezas: quantidade de tecido (em metros) e valor a pagar (em reais). Ver Figura 1.3. Nota-se, na situação, que está explícito o preço de um metro de tecido e, por isso, classificamos como um para muitos.

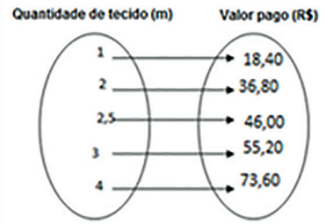
Figura 1.3 – Diagrama de Vergnaud para Proporção Simples um para muitos



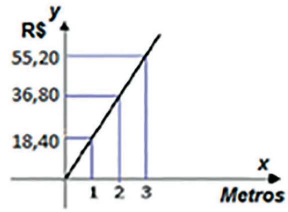
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A partir dessa relação, é possível estabelecer o operador funcional 18,40 reais por metro, ou seja, uma terceira variável originada da relação entre as duas primeiras: reais e metros. De posse do operador funcional, encontra-se a solução da situação: 2,5 metros × 18,40 reais por metro = 46 reais. Em termos funcionais, essa relação pode ser expressa por meio da função $f(x) = 18{,}40x$, com o coeficiente da função linear igual a 18,40 reais por metro. Essa função pode ser representada por meio de diagrama, tabela e gráfico (Figura 1.4).

Figura 1.4 Diagrama, tabela e gráfico da função f(x)= 18,40x



Metros (m)	R$ [f(x)]
1	18,40
2	36,80
3	55,20



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

A compreensão do operador funcional, tratado por Vergnaud, ressalta a proporcionalidade, permitindo estendê-lo a situações multiplicativas mais complexas em diferentes conjuntos numéricos.

Retomando a Figura 1.3, é possível visualizar, na vertical, o operador escalar (b) que é adimensional e expressa a ideia de outra relação fixa, compreendendo medidas de uma mesma grandeza. O operador escalar é 2,5, o que permite fazer o seguinte procedimento para a resolução: *18,40* reais *x 2,5 = 46* reais. Professor, observe que esse valor é igual àquele obtido quando se trabalhou com o operador funcional.

Nas situações de proporção simples da classe um para muitos podem ser identificados três conjuntos de situações, caracterizados pelo elemento desconhecido na relação proporcional: a multiplicação; a divisão por partes e a divisão por quotas (FISCHBEIN et al., 1985).

A multiplicação apresenta a ideia de encontrar a quantidade total, quando são conhecidas a quantidade referente à medida unitária e a outra medida. Por exemplo: um carro viaja por uma estrada em velocidade constante. Em uma hora, ele percorre 40Km. Quantos quilômetros serão percorridos em duas horas?

A divisão por partes traz a ideia de repartir. Divide-se, igualmente, para determinado número de grupos a quantidade total conhecida, buscando encontrar quanto fica para cada grupo. Por exemplo: se um carro em velocidade constante percorre 80 Km em duas horas, quantos quilômetros serão percorridos em uma hora?

A divisão por quota apresenta a ideia de medir, em que é preciso dividir igualmente a quantidade total conhecida, sabendo-se a quantidade em cada grupo e encontrando o número de grupos. Veja o exemplo: um carro em velocidade constante percorreu 40 Km, em uma hora. Quanto tempo, o mesmo carro, com velocidade constante, levaria para percorrer 8 Km?

Professor, observe as distinções nos diagramas dos exemplos (Figura 1.5), onde são apresentados os três conjuntos de situações da classe um para muitos (multiplicação, divisão por partes, divisão por quotas).

Figura 1.5 – Diagramas de Vergnaud para situações: multiplicação, divisão por partes e por quota

Multiplicação		Divisão por partes		Divisão por quotas	
Hora	Km	Hora	Km	Hora	Km
1	40	x	40	1	40
2	x	2	80	x	80

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Nota-se que, em cada um dos diagramas, a posição da quantidade desconhecida varia. Variar o termo desconhecido apresenta oportunidade de estimular o raciocínio e favorecer a constituição de novas competências e habilidades.

PROPORÇÃO SIMPLES MUITOS PARA MUITOS

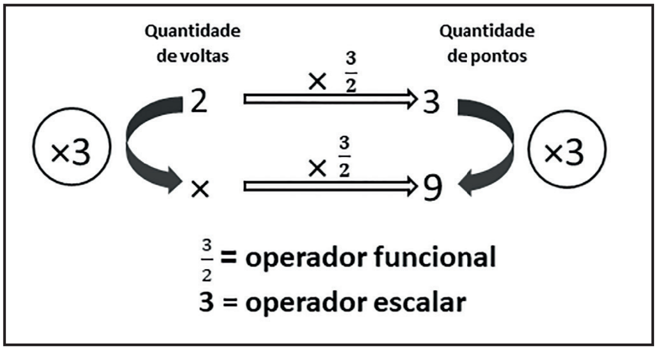
Nesse tipo de situação, mantém-se a relação de proporcionalidade, mas a unidade não é um dos elementos envolvidos na situação. Trata-se de uma situação com grau de dificuldade maior, quando comparado com problemas de proporção simples.

Essa situação pode ser resolvida, de forma semelhante à situação de proporção simples um para muitos, por meio do operador escalar e operador funcional. Tomemos o exemplo a seguir:

Exemplo 4: a cada duas voltas que Carol dá numa pista de corrida, ela ganha três pontos. Quantas voltas Carol precisará fazer para conseguir nove pontos?

Veja o diagrama referente ao Exemplo 4.

Figura 1.6 – Diagrama de Vergnaud para a situação muitos para muitos



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

No diagrama do Exemplo 4, Figura 1.6, verifica-se que o operador escalar (3) pode ser encontrado pela divisão entre a quantidade de pontos ($9 \div 3 = 3$). O operador funcional é obtido pela relação entre quantidade de voltas e pontos: pontos por volta. Essa situação remete aos problemas de proporção direta explorados na escola, sendo muito comum ser resolvida por meio do algoritmo conhecido como método do produto cruzado ou regra de três.

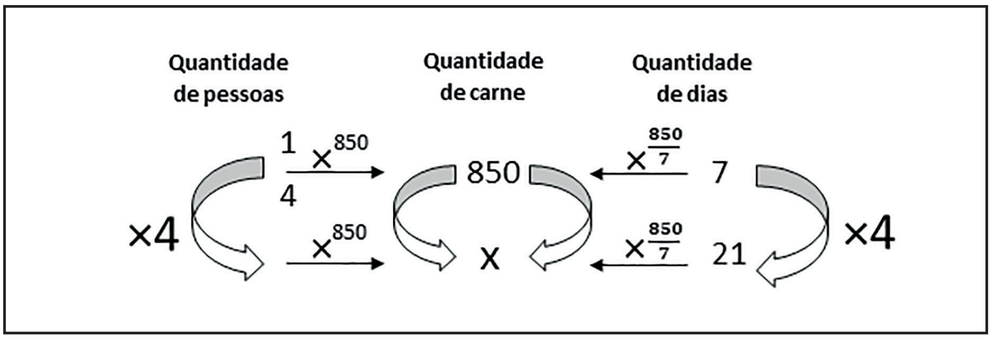
É preciso ter cautela para não apresentar ao estudante o algoritmo da regra de três, de forma automática, ignorando o raciocínio proporcional que a situação exige. Muito além dos procedimentos a serem utilizados nas situações de proporção simples, Nunes e Bryant (1997) explicam que os estudantes precisam conseguir identificar que há uma relação entre duas grandezas, a qual, dentro de uma mesma situação, mantém-se constante.

PROPORÇÃO DUPLA

Nas situações de proporção dupla, há mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, em uma relação proporcional de quatro quantidades. Observemos o Exemplo 5.

Exemplo 5: uma pessoa consome, a cada sete dias, 850g de carne. Quantas gramas de carne serão consumidas por uma família de quatro pessoas, em 21 dias?

Figura 1.7 Diagrama de Vergnaud para Proporção Dupla



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

As grandezas envolvidas são: quantidade de pessoas, quantidade de carne em gramas e quantidade de dias. Verificamos que há uma relação fixa entre a quantidade de pessoas e a quantidade de carne consumida, no caso, 850 gramas de carne por pessoa. De forma análoga, constatamos a existência de outra relação fixa entre a quantidade de carne consumida em sete dias: 850 gramas de carne a cada sete dias ou gramas de carne por dia. Todavia, não existe relação entre a quantidade de dias e a quantidade de pessoas.

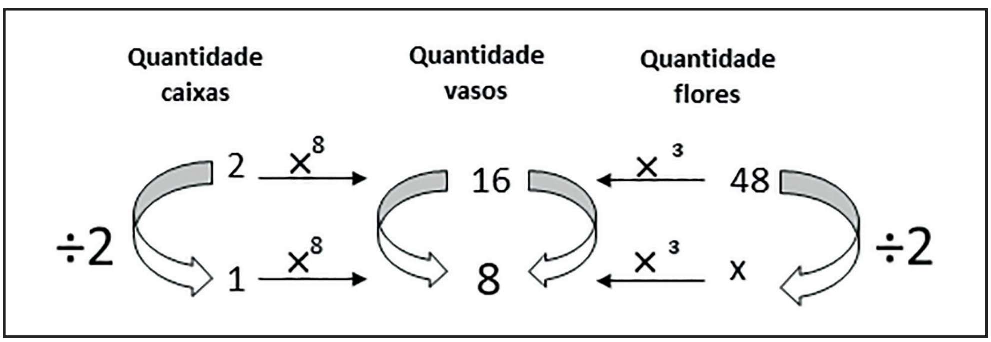
A situação de proporção dupla pode ser expressa por uma função bilinear ou n-linear, isto é, uma função de *n* variáveis. No Exemplo 5, tem-se que $f(x,y) = xy$, em que *'x'* representa a quantidade de pessoas e *'y'* a quantidade de dias.

PROPORÇÃO MÚLTIPLA

Nas situações que envolvem Proporção Múltipla, também há mais de duas grandezas, relacionadas duas a duas, sendo que todas as medidas são proporcionais e dependentes duas a duas. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 6: em duas caixas iguais, cabem 16 vasos idênticos de flores, totalizando 48 flores. Quantas flores há em uma caixa?

Figura 1.8. Diagrama de Vergnaud para Proporção Múltipla



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 1.8, verificamos que há uma relação entre a quantidade de caixas e a quantidades de vasos (oito vasos por caixa). O mesmo pode ser verificado entre a quantidade de vasos e a quantidade de flores (três flores por vaso). Por último, também se pode relacionar a quantidade de caixas e a quantidade de flores (24 flores por caixa), que se obtém multiplicando a quantidade de vasos por caixa pela quantidade de flores por vaso.

As situações de proporção múltipla podem ser entendidas como uma composição de funções. No exemplo em foco, tem-se que $f(x) = 8x$ e $g(x) = 3x$. Assim, em termos funcionais, tem-se: *fog ou* $f(g(x)) = 8.\ 3x \rightarrow f(g(x)) = 24x$.

Muito embora se possa verificar a existência da função composta em situações de proporção múltipla, recomenda-se que não seja, inicialmente, dada ênfase na representação algébrica, mas, na compreensão das relações.

1.3 Situações de Relação Ternária

As relações ternárias compreendem a relação entre duas medidas de mesma natureza ou de naturezas diferentes, originando uma terceira medida. As situações podem abordar: a ideia de comparação multiplicativa, a noção de combinação, os conceitos de área e volume, entre outros.

As situações classificadas como ternárias podem ser modeladas como função *n*-linear, sendo divididas nos eixos de comparação multiplicativa e de produto de medidas, os quais serão discutidos a seguir.

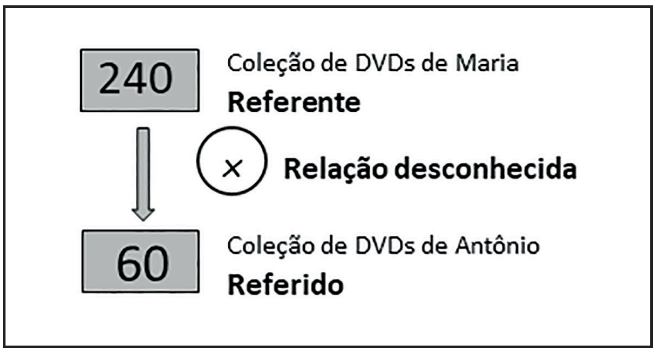
COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA

As situações de comparação multiplicativa envolvem a relação entre duas quantidades de mesma natureza. Essa relação é um operador escalar que indica quantas vezes uma quantidade é maior ou menor que a outra. Professor, o Exemplo 7 apresenta uma situação com essa relação.

Exemplo 7: Antônio tem uma coleção de 60 DVDs e Maria tem uma coleção de 240 DVDs. Quantas vezes a coleção de Antônio é menor do que a de Maria?

No Exemplo 7, verificamos a expressão “quantas vezes a coleção do Antônio é menor do que a de Maria”. Observamos, na Figura 1.9, três quantidades envolvidas na situação: a quantidade de *DVDs* de Antônio, a quantidade de *DVDs* de Maria e a relação entre essas duas quantidades que é desconhecida.

Figura 1.9. Diagrama de Vergnaud para comparação multiplicativa com relação desconhecida



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 1.9, chamamos de referente a quantidade de *DVDs* de Maria, pois é usada como medida referencial para estabelecer a comparação entre as quantidades. Na quantidade de *DVDs* de Antônio, referido é a medida que depende do referente, quantidade de *DVDs* de Maria.

Constatamos, portanto, que a coleção de Antônio é quatro vezes menor que a de Maria. Notamos que o referente e o referido são de mesma grandeza, portanto, a relação entre elas é adimensional.

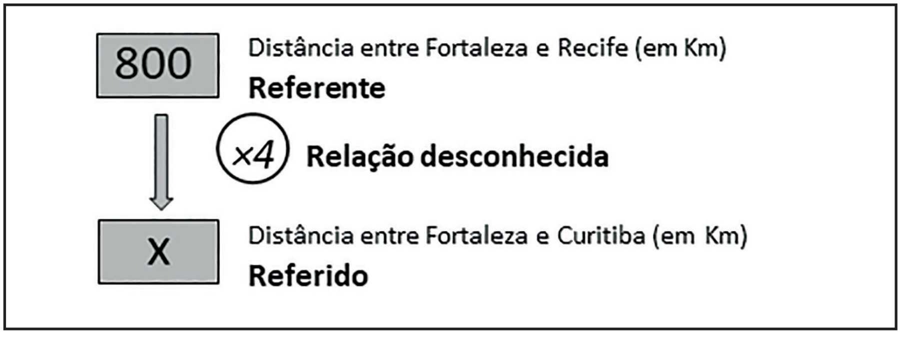
A resolução das situações de comparação multiplicativa de relação desconhecida pode ser feita pela seguinte proposição:

relação desconhecida = referente ÷ referido

No Exemplo 8, temos uma situação de comparação multiplicativa em que a relação é conhecida.

Exemplo 8: a distância entre Fortaleza e Recife é de 800 quilômetros. A distância entre Fortaleza e Curitiba é quatro vezes maior. Qual a distância entre Fortaleza e Curitiba?

Figura 1.10 Diagrama de Vergnaud para
comparação multiplicativa com referido desconhecido



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 1.10, constatamos que o referente, a distância entre Fortaleza e Recife, constitui-se no ponto de partida para encontrar o referido, distância entre Fortaleza e Curitiba. Entre as medidas, existe uma relação dada por um escalar que amplia a medida do referente e, assim, o referido é o produto entre o referente e a relação: *800 km x 4 = 3.200km.*

A relação existente na comparação multiplicativa pode ser representada também pelas expressões como "dobro", "triplo" ou "metade". Essas expressões são comumente encontradas em situações exploradas na escola e podem contribuir para a compreensão do Campo Conceitual Multiplicativo.

Existem, ainda, expressões que exigem do estudante um raciocínio mais complexo, como: "vezes mais" e "vezes menos". É comum, professor, que o estudante interprete equivocadamente esses termos como um conjunto de operações: vezes mais – multiplicação e adição; vezes menos – multiplicação e subtração; Nesses casos, você, professor, terá um papel importante de mediar a compreensão das relações pelos estudantes, enfatizando-a e não como uma mera escolha da operação pelas expressões existentes na situação.

PRODUTO DE MEDIDAS

As situações de produto de medidas envolvem contextos em que se obtém uma nova grandeza a partir do produto de duas ou mais grandezas. São comumente verificados em problemas de área, volume, combinatória e em situações que envolvem conceitos físicos (força, energia potencial etc.).

A relação ternária do eixo produto de medidas é composta por duas classes: a configuração retangular e a combinatória.

CONFIGURAÇÃO RETANGULAR

As situações de configuração retangular envolvem um produto cartesiano obtido a partir de duas grandezas, visualizado, por exemplo, ao se trabalhar com área. Vejamos o Exemplo 9.

Exemplo 9: a Escola Paulo Freire tem 55 metros de comprimento por 20 metros de largura. Determine a área dessa escola.

No Exemplo 9, a situação tem uma relação entre comprimento e largura, de mesma grandeza, e o produto entre elas resulta em outra grandeza, a área:

largura (m) × comprimento (m) = área (m²)

Vejamos o Exemplo 10 com uma situação de Configuração Retangular.

Exemplo 10: o Campo de futebol Rômulo Lins é retangular e tem área de 7.140 m^2. Sabendo que ele possui 105 m de comprimento, qual a sua largura?

A situação apresentada no Exemplo 10 também explora a noção de área. No entanto, nesse caso, para encontrar a largura, é necessário realizar o quociente entre a área e o comprimento, dados:

largura (m) = área (m²) ÷ comprimento (m)

É possível perceber que os Exemplos 9 e 10 têm a mesma estrutura, embora requisitem operações diferentes. Essa estrutura pode ser representada, como uma função bilinear definida por $f(x,y) = x \cdot y$. Assim, para o Exemplo 9, temos que: $f(x,y) = 55 \times 20$, *enquanto que, para o Exemplo 10:* $f(x,y) = 7.140$, *logo,* $7.140 = 105\,x$.

Ressaltamos que as variáveis x e y, são independentes. Portanto, $f(x,y) = x \cdot y$, *não pode ser vista como uma* composição de funções.

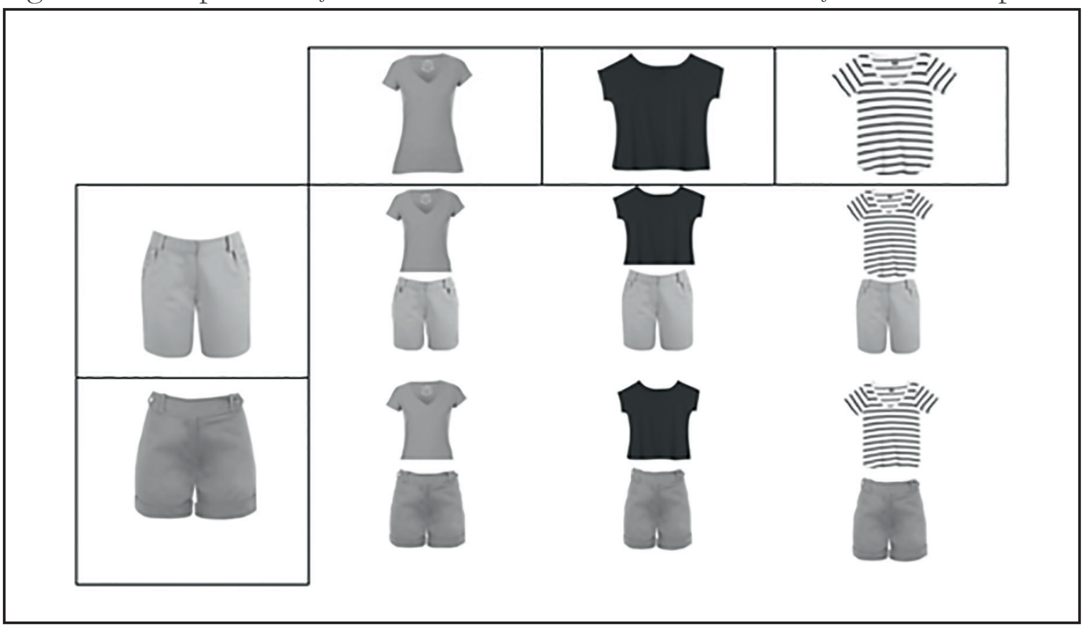
COMBINATÓRIA

Situações de combinatória exploram as relações entre os elementos de dois conjuntos disjuntos. Trata-se de produto cartesiano, em que são combinados, dois a dois, todos os elementos dos conjuntos envolvidos, produzindo novo conjunto. A quantidade de elementos do novo conjunto é igual ao produto da quantidade de elementos de cada um dos conjuntos originais. Vejamos o Exemplo 11.

Exemplo 11: Carmelita levou para um acampamento de fim de semana, duas bermudas e três blusas. Quantas combinações diferentes ela poderá fazer com as roupas que levou?

O Exemplo 11 apresenta uma situação de combinação em que a sua resolução pode ser feita por meio de uma tabela cartesiana, conforme representada na Figura 1.11,

Figura 1.11 Representação de tabela cartesiana como resolução do Exemplo 11

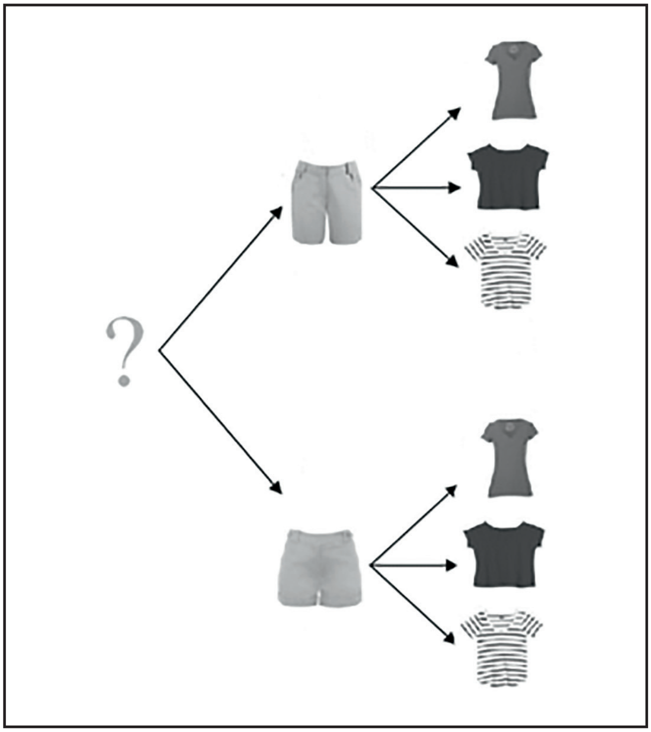


Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Embora esse tipo de representação seja muito usado em situações de combinatória, é necessário ficar alerta, pois ela pode não contribuir para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, caso o estudante encontre o resultado apenas por contagem. Uma limitação da representação é relativa ao número de elementos dos conjuntos, pois grandes quantidades inviabilizam a representação por meio de desenhos.

Outra forma de resolução em que se pode encontrar a quantidade de combinações possíveis é a utilização da árvore de possibilidades. Ver Figura 1.12.

Figura 1.12 Árvore das possibilidades com a resolução do Exemplo 11



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O estudante pode buscar a solução da situação adicionando as quantidades de combinações possíveis entre as duas bermudas e as três blusas (2 + 2 + 2 = 6). Também, nesse caso, o raciocínio multiplicativo não estaria sendo aplicado, pois a resolução teria sido realizada por meio de adições sucessivas. O mais desejado é que o estudante venha a compreender que pode efetuar o produto das quantidades correspondentes às bermudas e às blusas, isto é, 3 bermudas × 2 blusas = 6 combinações diferentes.

Vejamos o Exemplo 12 que também envolve a situação de combinação.

Exemplo 12: na sorveteria Seu Gelado, pode-se escolher um sabor e uma cobertura para o sorvete. Existem duas coberturas (chocolate e caramelo). Sabendo que há 10 combinações de sabores de sorvete com cobertura, quantos são os sabores de sorvete disponíveis?

No Exemplo 12, são dadas a quantidade total da combinação de sabores de sorvetes com cobertura (10) e a quantidade de coberturas (2).

Procura-se a quantidade de sabores de sorvetes, isto é, o segundo conjunto a combinar. Nessa situação, busca-se conhecer a quantidade de elementos de um dos conjuntos a combinar e, em sua resolução, é necessária a utilização da divisão entre quantidade total da combinação de sabores de sorvete com cobertura e a quantidade de coberturas.

Professor, essas situações estão entre aquelas em que os estudantes apresentam desempenhos mais baixos no Campo Conceitual Multiplicativo, por isso, sugerimos que elas sejam apresentadas com frequência para eles. Ressaltamos que a compreensão dos invariantes presentes em situações de combinatória pode ajudar os estudantes a entenderem, no futuro, situações como as de arranjo e de permutação.

CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo, abordamos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud com exemplos de situações do Campo Conceitual Multiplicativo que podem ser trabalhados em sala de aula com os estudantes. Cabe a você, professor, adaptar essas situações à realidade de sua sala de aula, conforme a dificuldade e o desempenho de seus estudantes.

Alertamos para o fato de que a conceituação se dá dentro do Campo Conceitual, havendo, portanto, a necessidade de fazer variar as situações, utilizar diferentes representações e aceitar que o estudante necessita de um período longo de tempo para a construção dos conceitos, sempre em processo de elaboração e reelaboração.

Com essas discussões, esperamos ter colaborado para a compreensão dessa teoria e fornecido elementos para um repensar acerca do trabalho com o Campo-Conceitual Multiplicativo. O conhecimento dessa teoria pode levar a uma melhor percepção das dificuldades que temos encontrado com nossos estudantes.

No próximo capítulo, você poderá constatar diferentes desempenhos de estudantes dos anos finais do ensino fundamental, apenas decorrentes da variação entre as situações propostas. Esses dados foram colhidos a partir da aplicação, pela Rede E-Mult, de um instrumento composto por 13 situações do Campo Conceitual Multiplicativo com estudantes do ensino fundamental.

REFERÊNCIAS

CASTRO, J. B. **Construção do conceito de covariação por estudantes do ensino fundamental em ambientes de múltiplas representações com suporte das tecnologias digitais**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M. S.; MERINO, M.S. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education** 6, 16,3-17, 1985.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L.. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 20, p. 517-533, 2014.

MORAIS, M. das D. de; TELES, R. A. de M. Texto 1: Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. In: **Cadernos da TV Escola:** um salto para o futuro. Grandezas e medidas no ciclo de alfabetização. Ano XXIV-Boletim 8 – set, 2014.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática**, 7° ano 2° ed. São Paulo: FTD, 2012.

VERGNAUD, G. Multiplicate structures. In: RESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisitions of mathematics concept sand processes.** New York. Academic Press,1983.

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M. S.; MERINO, M.S. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education** 6, 16,3-17, 1985.

______. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. **Research agenda in mathematics education**: number concept sand operations in the middle grades. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

______. A teoria dos campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

______. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 2, n. 17, p. 161-181, 1998.

______. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução de: MORO, Maria Lúcia Faria. Edição revisada. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

SUGESTÕES DE LEITURA COMPLEMENTAR AO PROFESSOR

- **A Matemática além dos Números**. Disponível em:http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-numeros.aspx.

- **A Teoria dos Campos Conceituais**: contribuições da Psicologia para a prática docente. Disponível em: http://alex.pro.br/camp_conceit.pdf.

- **De Vezes e de Dividir.** Disponível em: http://www.magiadamatematica.com/uss/pedagogia/25-teoria-4-campo-multiplicativo.pdf

- **Gérard Vergnaud**: Todos Perdem Quando a Pesquisa não é Colocada em Prática Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica

Capítulo II

Marcília Chagas Barreto
Juscileide Braga de Castro
José Aires de Castro Filho

DESEMPENHO E ESQUEMAS DE ESTUDANTES DO 6° AO 9° ANO AO RESOLVEREM SITUAÇÕES MULTIPLICATIVAS

Os dados analisados neste capítulo tiveram origem na aplicação de um instrumento diagnóstico, no ano 2014, composto por 13 situações do Campo Conceitual Multiplicativo, a 3.890 estudantes de todo o ensino fundamental, em 12 escolas parceiras na rede E-Mult, distribuídas em três estados (Bahia, Pernambuco e Ceará). Contudo, neste capítulo, foram analisadas exclusivamente as respostas de 1.470 estudantes dos anos finais do ensino fundamental, (6° ao 9° ano), assim distribuídos: 471 do 6º ano; 395 do 7º ano; 364 do 8º ano e 240 do 9º ano.

O instrumento foi estruturado com base em Magina, Santos e Merlini (2014), considerando as relações – quaternária e ternária; três dos eixos propostos – Proporção Simples, Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas; e as classes – um para muitos, muitos para muitos, relação desconhecida, referido ou referente desconhecido, configuração retangular e combinatória. Toda essa classificação foi discutida no Capítulo 1 deste livro, de modo que, se você, professor, tiver dúvidas sobre como identificar qualquer dessas situações, pode recorrer a ele.

Todos os protocolos analisados neste capítulo são referentes à resolução das situações feita por estudantes do 6º ao 9º ano do ensino fundamental. Na primeira seção, encontram-se analisados os resultados do desempenho dos estudantes, por ano escolar. Na segunda seção, discutimos os esquemas utilizados por eles, quando da resolução das situações propostas.

Esperamos colaborar com o seu trabalho, professor, ressaltando características das situações do Campo Conceitual Multiplicativo que levam os estudantes a apresentar melhor ou pior desempenho. Ao mesmo tempo, queremos também chamar a atenção para algumas formas de resolução identificadas, de modo a evidenciar como os estudantes podem pensar sobre uma situação desse Campo Conceitual. Passemos, então, ao desempenho dos estudantes.

2.1 DESEMPENHO GERAL

Conforme mencionado anteriormente, nesta seção encontra-se analisado o desempenho dos 1.470 estudantes dos anos finais do ensino fundamental (6° ao 9° ano). O Quadro 1 apresenta as 13 situações referentes às relações quaternárias e ternárias que nos permitiram avaliar a compreensão dos estudantes sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, nos diferentes anos escolares.

As situações foram elaboradas contemplando, fundamentalmente, o campo numérico dos naturais, pois o objetivo do teste diagnóstico era verificar a compreensão das situações pelos estudantes, indo além do cálculo numérico. As situações estão classificadas por relação, eixo e classe.

Quadro 2.1 – Situações componentes do instrumento diagnóstico, por relação, eixo e classe

Relação	Eixo	Classe	Enunciado
Quaternária	Proporção Simples	Um para muitos	**S1.** Joana sabe que em um pacote há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem? **S4.** A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar? **S8.** Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais". Quanto vai custar cada litro de suco?
		Muitos para muitos	**S3**. Para fazer 3 fantasias são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer? **S6.** Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar? **S12.** Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?
Ternária	Comparação Multiplicativa	Relação desconhecida	**S10.** Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e José tem uma coleção de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?
		Referido desconhecido	**S2.** A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola? **S13.** Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?
	Produto de Medida	Configuração retangular	**S5.** Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar? **S7.** A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem $24m^2$. A largura é 4m. Qual é comprimento em metros desse jardim?
		Combinatória	**S11.** Na aula de dança de forró tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados? **S9.** A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíches. Para cada sanduíche é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíches?

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Professor, nos dados da Tabela 2.1, você pode conferir o percentual de acertos dos estudantes nas diferentes situações do teste diagnóstico. Assim, será possível perceber que há diferenças de desempenho entre elas.

Tabela 2.1 – Percentual de acertos por relação, eixo, classe e ano escolar

Ano Escolar	Relação Quaternária			Relação ternária					Acerto total
	Proporção Simples			Comparação Multiplicativa		Produto de Medidas			
	Um para muitos	Muitos para muitos	Total	Relação	Referido ou Referente Desconhecido	Configuração Retangular	Combinatória	Total	
6º ano	61,00	15,99	38,50	21,66	43,31	24,42	21,23	22,82	33,12
7º ano	63,54	21,27	42,41	27,34	47,34	28,23	22,41	25,32	36,75
8º ano	76,74	30,95	53,85	28,30	53,57	29,12	32,83	30,92	44,80
9º ano	81,53	44,72	63,13	42,92	53,97	33,10	35,86	41,67	55,29
Total	68,93	25,80	47,37	28,30	50,51	29,15	28,03	28,59	40,61

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

O percentual geral de acertos dos estudantes foi de 33,12% no 6º ano; 36,75% no 7º ano; 44,8% no 8º ano e 55,29% no 9º ano. Ainda que se perceba uma elevação gradual no percentual de acertos total, ano a ano, verifica-se que os estudantes chegam ao fim do ensino fundamental sem o domínio de todos os tipos de situações do Campo Conceitual Multiplicativo. Observe que, das seis classes apresentadas, o percentual de quatro delas está abaixo de 45%. Esse resultado é inferior às expectativas de aprendizagem para esse nível escolar, visto que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática (BRASIL 1998) projetam que esses estudantes devem ser capazes de analisar, interpretar, formular e resolver situações, compreendendo diferentes significados das operações com números reais (BRASIL, 1998). Com esse baixo desempenho, é possível perceber que os estudantes ainda não compreendem esses diferentes significados presentes em cada uma das situações de que falam os PCNs.

Esse desempenho abaixo do nível desejável vem confirmando os resultados apontados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB. No ano 2015, os resultados do SAEB mostram que, em uma escala de 1 a 10, os alunos do 9º ano atingiram o nível 3. Isso significa que os estudantes brasileiros concluem o ensino fundamental dominando a resolução de situações mais simples que envolvem multiplicação e divisão e são capazes de resolver, apenas, problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, representadas por números inteiros (BRASIL, 2016). De fato, ao analisar o desempenho do 9º ano apresentado nos dados da Tabela 2.1, é possível verificar que o melhor desempenho foi obtido nas situações de Proporção Simples, um para muitos.

Nos dados detalhados na Tabela 2.1, percebe-se que o desempenho médio dos estudantes nas situações quaternárias (47,37%) foi superior ao desempenho médio em situações de relações ternárias (28,59%), em todos os anos. Ainda que esses resultados sejam oriundos de análise quantitativa e que não tenha sido realizada a entrevista com os estudantes em busca das razões para os diferentes níveis de dificuldade, é possível inferir que essa diferença deve-se ao fato de as situações quaternárias aparecerem com maior frequência no cotidiano dos alunos do que as ternárias. É mais comum buscarmos, por exemplo, descobrir por quantos dias poderei me transportar com certa quantia disponível, sabendo o valor de uma passagem de ônibus (relação quaternária), do que realizar combinações ou cálculos de área (relação ternária).

No que diz respeito às relações quaternárias, percebe-se crescimento de desempenho dos estudantes, ano a ano, nas situações do eixo Proporção Simples, em ambas as classes – um para muitos e muitos para muitos. É necessário, entretanto, observar que, enquanto na primeira classe 61% dos estudantes do 6º ano acertam as situações e, no 9º ano, chega-se a 81,53% de acertos, na classe muitos para muitos, apenas 15,99% dos estudantes do 6º ano acertam e os do 9° ano não ultrapassam 44,72%. Essas diferenças no desempenho apontam para peculiaridades das diversas situações multiplicativas que você, professor, precisa trabalhar com os estudantes, de modo a propiciar oportunidades de efetiva elaboração do

Campo Conceitual Multiplicativo. Afinal, ter êxito em apenas uma classe de situação não implica ter domínio sobre todo o campo conceitual.

Essa diferenciação de desempenho entre as classes pode ocorrer em função da complexidade das relações inerentes à própria classe e dos conceitos envolvidos. Observe que, em todas as situações, as quantidades eram representadas por números na ordem das dezenas, não se podendo atribuir a eles a causa da diferença no desempenho. As situações quaternárias de Proporção Simples um para muitos vêm sendo apontadas como aquelas que são mais propostas pelos professores em toda a escolarização, sendo consideradas por Gitirana et al. (2014) como um dos tipos de situações multiplicativas de mais fácil resolução.

Nas situações de muitos para muitos, a unidade não é um dos elementos explícitos na situação. Isso aumenta o grau de dificuldade para a resolução desse tipo de problema, porque vai além da correspondência um a um, também chamada correspondência biunívoca.

Professor, para a discussão das situações ternárias, você pode observar, na Tabela 2.1, que o melhor desempenho apresentado, embora baixo, foi na classe referido ou referente desconhecido, do eixo comparação multiplicativa. Mais uma vez, por não ter havido entrevistas com os estudantes, não se pode enumerar as causas para essa diferença. Entretanto, podemos lembrar que, nos livros didáticos, é comum a presença de situações com dobro, triplo ou quádruplo que se enquadram nessa classe. Da mesma forma, quando olhamos para o cotidiano, tais relações são verificadas. Por outro lado, nas situações que envolvem relação desconhecida, o cálculo de área ou, ainda, as combinações, não são frequentes no dia a dia, além de requisitarem conhecimento de conceitos específicos. Afinal, como é possível realizar o cálculo de uma área, sem compreender sua conceituação? Sugere-se que você reflita se, de fato, essas situações estão presentes em sua sala de aula ou como elas poderiam ser agregadas à sua prática, no sentido de fazer avançar essa elaboração conceitual.

É importante ressaltar que essa diferença de desempenho no conjunto das situações propostas no instrumento diagnóstico ocorre pela diferenciação das estruturas presentes em cada tipo de situação, conforme explicado no Capítulo 1 deste livro, assim como pela escassez do trabalho pedagógico acerca de algumas dessas situações durante toda a educação básica. É, portanto, um fundamental alerta da necessária continuidade do trabalho com diversificadas situações multiplicativas durante todos os anos finais do ensino fundamental.

Para perceber a diferença da complexidade entre as situações, você pode analisar os dados da Tabela 2.2. Nela, encontra-se o desempenho dos estudantes, ano a ano, em cada uma das situações. Sendo assim, é possível verificar que há diferença de desempenho entre classes, mas que, em uma mesma classe, também há desempenhos distintos.

Tabela 2.2 – Percentual de acertos em cada situação por relação, eixo, classe e ano escolar

Ano	Relação Quaternária						Relação Ternária							Total Geral
	Proporção Simples						**Comparação Multiplicativa**			**Produto de Medidas**				
	Um para muitos			Muitos para muitos			Relação desconhecida	Referido ou Referente desconhecido		Configuração retangular		Combinatória		
	S1	**S4**	**S8**	**S3**	**S6**	**S12**	**S10**	**S2**	**S13**	**S5**	**S7**	**S9**	**S11**	
6º ano	80,25	48,41	54,35	18,68	15,07	14,23	21,66	73,04	13,59	40,76	8,07	17,83	24,63	33,12
7º ano	79,75	51,65	59,24	23,54	21,01	19,24	27,34	72,91	21,77	43,29	13,16	18,23	26,58	36,75
8º ano	89,01	67,86	73,35	32,42	30,49	29,95	28,30	82,14	25,00	46,15	12,09	25,27	40,38	44,80
9º ano	91,67	70,83	82,08	43,33	42,08	48,75	42,92	87,92	42,50	56,67	23,33	33,33	53,33	55,29
Total	84,15	57,76	64,90	27,41	24,90	25,10	28,30	77,69	23,33	45,37	12,93	22,31	33,74	40,61

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Na Tabela 2.2, observa-se o aumento no percentual de acertos ao longo dos anos escolares. Destaca-se que o menor crescimento do 6º ao 9º ano foi para a situação S1 (relação quaternária, Proporção simples um para muitos), uma vez que os estudantes já vinham apresentando um alto desempenho desde o 6° ano, com 80,25%

de acertos, chegando ao 9° ano com 91,67%. Resultado semelhante foi obtido na S2 (relação ternária, comparação multiplicativa, referido desconhecido), uma vez que os estudantes do 6º ano já partiram de 73%. Em contrapartida, a situação em que a performance mais cresceu foi em S12 (Proporção Simples muitos para muitos) de 14,23% de acertos, no 6° ano, para 48,75%, no 9° ano. Nota-se que, apesar da evolução registrada em S12, mais da metade dos estudantes ainda não demonstraram o domínio desse tipo de situação. Verificam-se circunstâncias semelhantes para as demais situações analisadas na Tabela 2.2, pois, apesar do desempenho ascendente, nos anos finais do ensino fundamental, constata-se que os estudantes chegam ao seu fim sem ter cem por cento de acertos em nenhum tipo de situação.

Selecionamos os dois mais altos e os dois mais baixos percentuais de acerto, entre as questões do instrumento diagnóstico, para aprofundar a discussão. Os mais altos, concentraram-se nas situações: Proporção Simples, um para muitos (S1) e na situação Comparação Multiplicativa, referido desconhecido (S2). Já os menores, ocorreram nas situações de Produto de Medidas da classe configuração retangular (S7) e combinatória (S9). Consideremos, inicialmente, as situações de mais alto percentual de acertos (S1, S2).

Conforme já comentado anteriormente, o maior acerto na situação de Proporção Simples um para muitos pode estar ligado à intensa presença dessa classe de situações na prática docente, em toda a escolaridade. Embora em S1 tenha havido melhor desempenho, é necessário buscar, nas características das três situações da mesma classe, um para muitos – S1, S4 e S8 – a justificativa para a diferença de desempenho.

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?

S8. Um supermercado fez uma promoção: “Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais”. Quanto vai custar cada litro de suco?

Em S1, está presente o valor unitário, as quantidades são enunciadas na ordem direta em que podem ser operadas e a situação é resolvida por multiplicação; em S4 as quantidades são anunciadas na ordem inversa e a operação a ser empregada pode ser a divisão, com ideia de divisão por quota; finalmente, em S8, exige-se o uso da divisão em busca do valor unitário, com ideia de repartir, isto é, divisão por parte. Dessa forma, é possível perceber que S1 traz elementos que a torna uma situação mais fácil para os estudantes, do que as demais de sua mesma classe, o que justifica o seu melhor desempenho.

A outra situação de melhor desempenho foi S2, da classe Comparação Multiplicativa, eixo Produto de Medidas:

> **S2**. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?

O êxito nesse tipo de situação pode ocorrer pelo fato de tratar-se de uma situação bem próxima das ideias aditivas, já que as duas medidas envolvidas na situação são de mesma natureza (distância em *Km*) e são comparadas de forma multiplicativa por um escalar, no caso, quatro vezes. Logo, o estudante poderá resolvê-la por adição repetida. Outra possível explicação para esse bom desempenho é o fato de que a operação a ser realizada harmoniza-se com o que, na escola, costuma-se denominar "palavra dica". Trata-se de palavras ou expressões que, por sua conotação semântica, induzem o estudante a decidir pela operação a ser realizada, mesmo em casos em que ele não esteja compreendendo as relações presentes na estrutura da situação. No caso em análise, a situação indaga sobre a casa que fica "quatro vezes mais distante". Essa expressão pode ter conduzido o estudante à ideia de que é necessário utilizar a operação de multiplicação (de vezes).

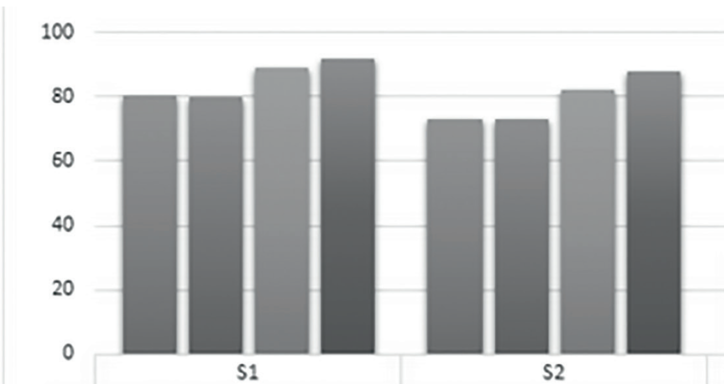
Comparando o desempenho obtido em S2 (77,69%) com a outra situação da mesma classe – referido ou referente desconhecido – S13 (23,33%), percebemos que houve uma diferença significativa de desempenho. Consideraremos a S13:

S13. Ontem, Tonho tinha 18 figurinhas e, hoje, ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?

Nesse caso, ao contrário do que ocorreu em S2, a expressão "3 vezes menos", ao ser tomada na mesma perspectiva de "palavra dica", conduz o estudante ao erro, pois ele seria levado a pensar na utilização da operação de subtração e de multiplicação em função dos termos "menos" e "vezes", no enunciado. Dessa forma, professor, recomendamos que evite o uso de "palavra dica" para determinar a operação a ser usada porque pode conduzir a equívocos dessa natureza e, também, desviar a atenção dos estudantes das relações presentes na situação, conduzindo-os a aplicar mecanicamente o algoritmo indicado pela "palavra dica".

É importante considerar, ainda, a respeito das situações S1 e S2, a evolução do desempenho dos estudantes a cada ano. Para isso, professor, verifique o gráfico da Figura 2.1.

Figura 2.1 – Evolução de desempenho em situações com maiores percentuais de acerto



	S1	S2
6º	80,25	73,04
7º	79,75	72,91
8º	89,01	82,14
9º	91,67	87,92

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Verifica-se, em S1, que há, inicialmente, uma tendência à estabilização de desempenho para, em seguida, apresentar crescimento. Do 6º ao 7º ano, percebe-se um pequeno decréscimo, considerado não significativo, permitindo que se faça a inferência de que houve estabilidade no desempenho. No 7º ao 8º ano, apresenta-se crescimento, o que vai se repetir em relação ao 9º ano.

Notemos, professor, que no fim do 7º ano está previsto, no currículo escolar, o trabalho com grandezas e a compreensão de suas relações. Isso pode ter contribuído para o aumento do desempenho dos estudantes em S1, a partir do 8º ano, conforme demonstra o gráfico. Sobre isso, Castro (2016, p. 222) explica que "o desenvolvimento da noção de grandeza e sua identificação nas situações são importantes para que os estudantes centrem suas atenções nas relações e não apenas nos números". Dessa forma, é aconselhável que você procure explorar as relações entre as grandezas, em todos os anos da escolaridade, não necessitando aguardar que se venha a abordar o tema grandezas direta e inversamente proporcionais, presente no currículo.

Em S2, a evolução do desempenho assemelha-se muito ao que já foi comentado em relação a S1, havendo uma melhora de desempenho a partir do 8º ano. A razão para essa evolução pode estar relacionada com o tipo de atividade desenvolvida a partir do 7° ano, que prevê a elaboração e a identificação de expressões algébricas. Por exemplo, quando se propõe ao estudante a escrita da expressão algébrica relativa a situações do tipo: o quíntuplo de um número é 20, espera-se que ele expresse algebricamente: $5x = 20$. Isso veicula a ideia de relação entre dois números. O desenvolvimento dessa percepção pode ter influenciado na compreensão da relação presente na situação S2. Acreditamos que o trabalho concomitante entre as situações de Comparação Multiplicativa e o trabalho algébrico pode vir a colaborar com a percepção dos estudantes acerca da relação entre dois números de mesma grandeza.

Passemos agora a analisar as duas situações de mais baixo desempenho. Ambas ocorreram em situações do eixo Produto de Medidas – S7 e S9. A primeira pertence à classe configuração retangular e a segunda à classe combinatória. Iniciaremos a discussão por S7:

S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem $24m^2$. A largura é 4m. Qual é comprimento desse jardim?

Como é possível perceber, a situação requisita o cálculo de área. A dificuldade inicia-se quando o estudante precisa dominar o conceito de área. Além disso, é necessário observar que as medidas fornecidas na situação são: a área ($24m^2$) e uma das medidas lineares (4m). Em outros termos, fornece-se o produto, buscando um dos fatores. Dessa forma, a operação mais indicada é a divisão, o que já traz um elemento dificultador, tanto no que diz respeito à compreensão conceitual quanto procedimental.

Comparemos o desempenho em S7 (12,93%) com o obtido na outra situação da mesma classe – S5 (45,37%), no sentido de justificar as diferenças de desempenho:

> **S5.** Rute quer mudar o piso do quarto dela. Esse quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados de piso Rute precisa comprar?

Em S5, os elementos das medidas lineares (3m e 6m) são dados e se indaga sobre a área, em uma ordem direta que requisita a operação de multiplicação. Trata-se de uma situação mais comumente usada na escola, facilitando a compreensão por parte dos estudantes, o que também justifica esse melhor desempenho.

A segunda situação de mais baixo desempenho é S9, da classe combinatória:

> **S9.** A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíche. Para cada sanduíche, é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíche?

A dificuldade pode estar ligada ao fato de que a situação exige que o estudante perceba a necessária reversibilidade no tratamento dos elementos de cada conjunto que estão em jogo (tipos de pão e tipos de recheio). A combinação terá que ser realizada e desfeita para que os elementos possam se combinar em nova configuração, até esgotar as possibilidades.

Na análise das situações da classe combinatória, embora tenha havido diferença de desempenho entre as situações, ele foi discreto. Em S9, 22,31% e em S11, 33,74%.

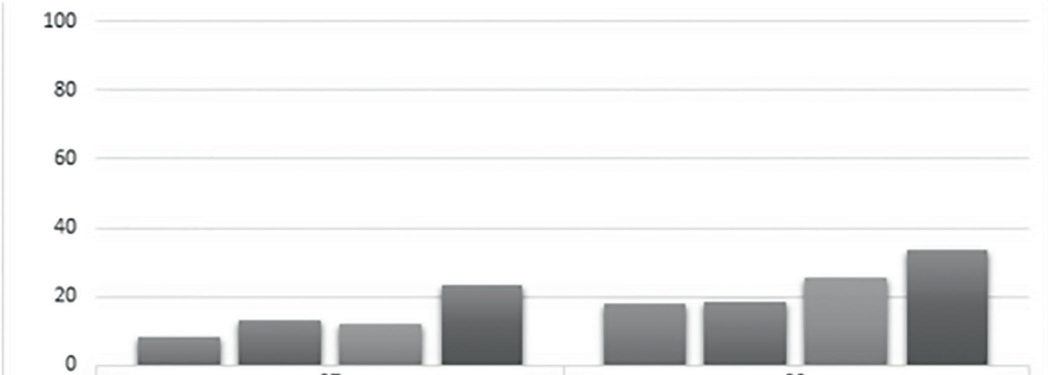
> S11. Na aula de dança de forró, tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?

Em S11, são apresentados os conjuntos (rapazes e moças) que deverão ser relacionados para obter a combinação (casais), o que torna a situação mais fácil que S9 e parece justificar a diferença de desempenho.

O desempenho distinto, quando do uso da multiplicação ou da divisão, foi observado em todos os eixos. Os estudantes obtiveram maiores percentuais de acerto nas situações em que a operação esperada para a solução era a multiplicação do que naquelas que requisitavam a divisão. Vergnaud (2010) adverte para a efetiva dificuldade apresentada pelos estudantes com a operação de divisão. Isso, professor, é um alerta para a necessidade de trabalho intensivo e diversificado com situações que a envolvam. É importante ressaltar que a dificuldade do estudante em relação à operação de divisão não se restringe ao domínio do algoritmo, mas está ligada também à compreensão das relações envolvidas nas situações.

Ainda em relação às situações de menor percentual de desempenho – S7 e S9 –, precisamos observar a evolução do desempenho dos estudantes a cada ano, constante no gráfico da Figura 2.2.

Figura 2.2 – Evolução de desempenho em
situações com menores percentuais de acerto



	S7	S9
6º	8,07	17,83
7º	13,16	18,23
8º	12,09	25,27
9º	23,33	33,33

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

No gráfico da Figura 2.2, verificamos discreto crescimento no desempenho dos estudantes, nas situações S7 e S9, durante quatro anos de trabalho pedagógico, nos anos finais do ensino fundamental. Em S7 – configuração retangular – questão envolvendo área, chega-se a 8,07% de acertos entre os estudantes do 6º ano; no 7º ano, há uma pequena elevação; do 8º para o 9º ano, percebe-se novamente crescimento. Ainda assim, nota-se que mais de 76% dos estudantes concluintes do ensino fundamental não obtiveram êxito nessa situação. Em relação a S9 – combinatória –, os resultados não são diferentes. Embora no 6º ano o percentual de acertos tenha sido 17,83%, percebe-se estabilidade em relação ao 7º ano; pequeno crescimento para 25,27%, no 8º ano, encerrando o 9º ano com apenas 33,33% de acertos.

Diante desse baixo desempenho entre os estudantes pesquisados, professor, sugerimos que você observe se esse tipo de situação vem sendo trabalhado em sua sala de aula. Trata-se de situações que envolvem conceitos distintos – área e combinação –, mas que guardam entre si pontos em comum. Ambas as situações, apresentam relação ternária, envolvendo, portanto, três medidas. Cada uma das situações informa, em seu enunciado, uma das medidas e o elemento produto, buscando descobrir a outra medida envolvida (em S7, largura e área, buscando o comprimento; em S9, o total de possibilidades de combinações de sanduíche e um dos elementos a combinar – número de pães, buscando o outro elemento – número de recheios). É uma inversão da maneira mais usual de tratar tanto o conceito de área quanto o de combinação, quando, normalmente, são oferecidas as partes e indaga-se sobre o produto.

Professor, encerrando a discussão acerca do desempenho dos estudantes, realizada nesta seção, reforçamos a necessidade de intensificação do trabalho com as diversificadas situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo. Submeter os estudantes a atividades apenas ligadas à efetivação de algoritmos da divisão, da multiplicação e da regra de três, à exploração de "palavras dica" e ao reforço do trabalho restrito a situações de Proporção Simples, não contribuirá para o avanço de sua construção conceitual nesse campo.

Na próxima seção, você encontrará a discussão dos esquemas utilizados pelos estudantes para resolver as situações. O esquema é o modo invariante de o estudante perceber e estruturar a situação no momento da sua resolução quer isso o conduza a uma resposta correta ou errada. É um indicativo de como o estudante está compreendendo as relações e operações matemáticas envoltas na situação. Trata-se de um ponto importante a ser considerado em sua prática pedagógica, pois, a partir dessas observações, é possível tomar decisões de como fazer a mediação em sala de aula, no sentido de propor situações que potencializem a aprendizagem.

2.2 ESQUEMAS UTILIZADOS PELOS ESTUDANTES NA RESOLUÇÃO DAS SITUAÇÕES

Identificar o esquema utilizado pelos estudantes, na resolução de situações, constitui-se um dos grandes desafios para o professor, mesmo no caso em que ele possa conversar com eles, em busca de suas explicações para os procedimentos adotados durante a ação. Quando se dispõe apenas da resposta dada pelo estudante à situação, esse desafio amplia-se.

Vamos discutir os esquemas utilizados pelos estudantes, dispondo apenas das resoluções dadas às 13 questões componentes do instrumento aplicado. O nosso exercício aqui é buscar captar, nessas resoluções, traços do raciocínio dos estudantes que os levaram a tratar a questão da maneira escolhida por eles próprios. Assim, acreditamos estar colocando-nos próximos ao trabalho que é realizado em seu cotidiano, professor. Em geral, o professor faz inferências, a partir das respostas a questionamentos em sala, das respostas a exercícios e a avaliações, à elaboração conceitual dos estudantes, para, consequentemente, planejar a sua ação docente.

Nesse sentido, é importante que você perceba que o estudante, ao buscar resolver uma situação, toma diversas decisões. Ele necessita fazer uso de um esquema ou da articulação entre diferentes esquemas. Nos casos aqui analisados, foi possível detectar diversidade de esquemas e representações utilizados pelos estudantes em análise: os algoritmos[1] – multiplicação ou divisão, regra de três – as simbólicas (diagramas), pictográficas ou icônicas[2] (desenhos).

O uso do algoritmo foi proeminente nas resoluções analisadas, o que era esperado, pois já existem muitas pesquisas que indicam que se trata de um dos procedimentos mais usados em toda a escolarização, principalmente quando se está considerando estudantes dos anos finais do ensino fundamental. Castro (2016) adverte que, à medida que os estudantes passam a conhecer o algoritmo na escola, costumam distanciar-se do real significado das relações, especialmente quando os algoritmos são ensinados precocemente, sem que os estudantes compreendam as diferentes relações presentes nas situações.

---

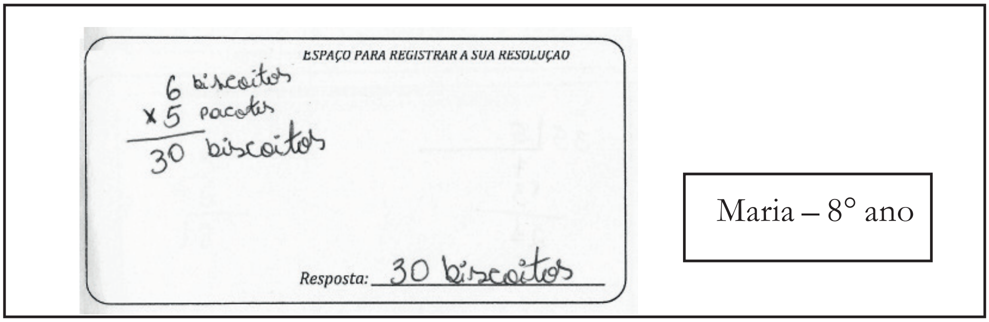
1 Um algoritmo é uma regra ou um conjunto eficaz de regras para resolver uma determinada classe de problemas. Esse conjunto de regras faz com que seja possível encontrar uma solução para todos os problemas da classe num número finito de passos, se tais soluções existem, ou para mostrar que não há solução (VERGNAUD, 1998, p. 171, tradução nossa)

2 Representações pictográficas – são grafismos que ilustram tanto a numerosidade como expressam a aparência dos elementos presentes no enunciado das situações, enquanto as representações icônicas são grafismos esquemáticos (traços, riscos, pontos, círculos etc.) que substituem os elementos envolvidos na situação, sem relação com a aparência dos elementos. Mais discussões podem ser obtidas em (HUGHES, 1986; LAUTERT; SPINILLO,1999).

Analisemos o esquema usado pela estudante Maria[3], de 13 anos de idade, do 8.º ano, para resolver a situação S1.

Figura 2.3 – Resolução com uso do algoritmo da multiplicação

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?



Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

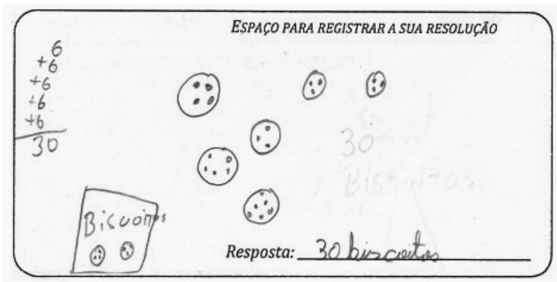
Observamos que Maria responde corretamente à questão. Ela faz o algoritmo, conforme é habitual na escola. Entretanto, a partir dessa resolução, não podemos assegurar se ela percebeu, ou não, a relação de proporcionalidade que existe entre o número de biscoitos e o de pacotes, uma relação que é fixa, característica da relação quaternária. Na resolução, Maria indica que o produto entre seis biscoitos e cinco pacotes é igual a 30 biscoitos. A estudante estabelece relação entre três termos: dois já conhecidos e aquele no qual se busca o valor. Vergnaud (1983) salienta que as situações de Proporção Simples não consistem na relação entre três quantidades, mas entre quatro quantidades. Ocorre que, como uma das quatro quantidades é a unidade, ela costuma ser desconsiderada. Considerando a operação de multiplicação (6 x 5 = 30), a resolução está correta, mas, ao explicitar as grandezas envolvidas no produto, verifica-se que as relações envolvidas não estão adequadas, pois: seis biscoitos x cinco pacotes é diferente de 30 biscoitos. Considerando o cálculo relacional, a resolução de S1 seria: 6 $\times$ 5 pacotes = 30 biscoitos.

3 Por questões éticas, os nomes utilizados para os estudantes, durante todo o Caderno, são fictícios.

A seguir, é possível observar outros esquemas utilizados para a resolução da mesma situação S1, ambas chegando ao resultado correto. São resoluções de estudantes do 6° ano (Figura 2.4 e 2.5).

Figuras 2.4 – Resolução com representações pictórica e aditiva de Carol, do 6º ano

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?

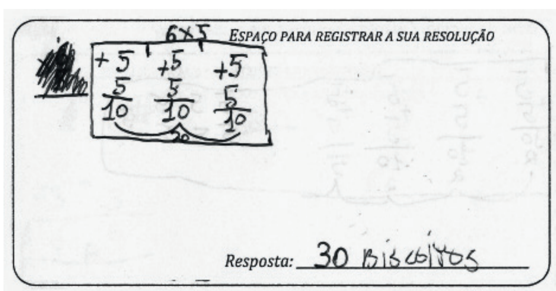


Carol – 6° ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Figuras 2.5 – Resolução com representações aditivas de Joana, do 6º ano

S1. Joana sabe que, em um pacote, há 6 biscoitos. Ela tem 5 pacotes. Quantos biscoitos Joana tem?



Joana – 6° ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 2.4, Carol usou o desenho, em paralelo com a adição de parcelas repetidas. Observamos que a soma repetida expressa as cinco parcelas de seis, totalizando os 30 biscoitos. Com relação ao desenho, professor, é possível inferir que Carol ilustrou a relação fixa da situação, isto é, seis biscoitos para um pacote de biscoitos.

Na Figura 2.5, Joana buscou a solução da situação fazendo três vezes a adição 5 + 5. Ocorre que cinco é o número de pacotes de biscoito e não o número de biscoitos por pacote. Portanto, embora chegue à resposta correta, a estudante provavelmente não deu importância às grandezas – se quantidade de pacotes ou quantidade de biscoitos – mas preocupou-se em operar com os números presentes na situação. Embora a comutatividade[4] seja uma importante propriedade da multiplicação, não pode ser aplicada sem considerar as grandezas e unidades de medida. Nessa situação, cinco pacotes de seis biscoitos cada é diferente de seis pacotes de cinco biscoitos. Resolver uma situação do Campo Conceitual Multiplicativo vai além de simplesmente identificar a operação a ser utilizada e os números a serem tratados. É necessário, também, compreender as relações existentes entre as grandezas e as medidas envolvidas na situação.

O diagrama de Vergnaud (ver Capítulo 1 deste livro) evidencia a relação quaternária presente na situação e pode ser usado para esse tipo de resolução. Se o estudante percebe a relação de proporcionalidade fixa entre as grandezas, ele estará avançando nesse tipo de situação e preparando-se rumo à construção do conceito de função, que está previsto como conteúdo curricular para o fim do ensino fundamental.

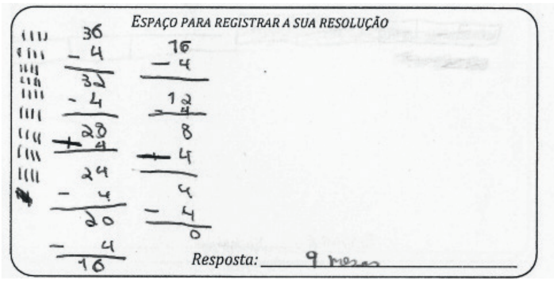
Da mesma forma como foi detectado o uso de adição de parcelas iguais em substituição à multiplicação (Figuras 2.4 e 2.5), houve, também, casos em que a divisão foi substituída por subtrações sucessivas, em situações de Proporção Simples da classe um para muitos, conforme pode ser visto na Figura 2.6.

---

4 É uma propriedade das operações binárias ou superiores em que a ordem dos fatores não altera o produto ou resultado final.

Figura 2.6 – Resolução com uso de subtrações
sucessivas em substituição à divisão

S4. A Escola Recanto fará uma festa para 36 convidados. Em cada mesa ficarão 4 convidados. Quantas mesas a escola precisará alugar?



João – 6°ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

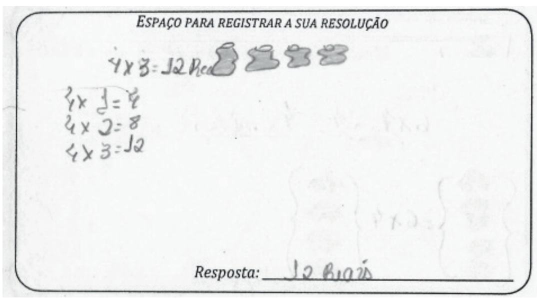
A situação S4 – Proporção Simples, um para muitos, divisão por quota – é resolvida por João utilizando duas representações: a icônica e a numérica. A representação numérica está indicada no uso da operação de subtração. Na representação icônica, são percebidos nove grupos de quatro pauzinhos, que devem estar representando os quatro convidados por mesa. A partir da representação icônica, não é possível afirmar qual esquema o estudante utilizou. Ele pode ter realizado somas sucessivas de parcelas de quatro, até chegar aos 36 convidados, além da multiplicação das parcelas ou a divisão por distribuição. No algoritmo da subtração, o estudante não utilizou a divisão, talvez por não saber efetivá-la, e usou a subtração de parcelas sucessivas, retirando do total de convidados os quatro que ocupariam cada mesa. Nesse sentido, podemos inferir que essas subtrações correspondem à tentativa do estudante em determinar quantas vezes o número quatro caberia em 36.

É preciso considerar, professor, que o uso de diferentes representações, em articulação, pode auxiliar o estudante a perceber distintas nuances nas relações entre as grandezas envolvidas nas situações (CASTRO, 2016).

Na Figura 2.7, ainda discutindo situações de Proporção Simples, é possível verificar a presença de um esquema utilizado pela estudante que a leva a um resultado incorreto.

Figura 2.7 – Resolução incorreta com uso de representação numérica e pictográfica

S8. Um supermercado fez uma promoção: "Leve 4 litros de suco por apenas 12 reais. Quanto vai custar cada litro de suco?



Ana – 6°ano

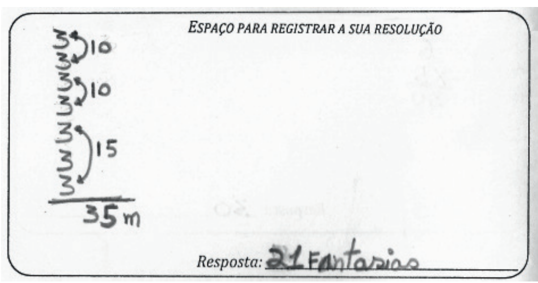
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Ana utiliza o desenho e a tabuada, para a resolução da situação S8. O desenho apresenta os quatro litros de suco, sem nenhuma relação com seus preços. Com a explicitação da tabuada, a estudante parece buscar o número que multiplicado por quatro (quantidade de litros comprados) produzirá o valor desembolsado (12 reais). Sem expressar a relação de proporcionalidade existente entre litros e preço, Ana chega ao resultado existente no texto da situação (12 reais). A estudante buscou um número que, multiplicado por quatro, tivesse 12 como produto. Esse procedimento pode servir de alerta ao professor, no sentido de valorizar o trabalho de compreensão e interpretação da situação. O texto em que a situação está enunciada não pode ser considerado apenas como um veículo para os números e operações, ele tem uma significação ligada à linguagem matemática e que deve ser trabalhada em sala de aula.

Na análise das situações de Proporção Simples, muitos para muitos (S3, S6 e S12), percebemos a utilização, principalmente, dos algoritmos da multiplicação e da adição. O algoritmo da regra de três foi pouco utilizado, sendo percebido, apenas, por alguns estudantes do 9° ano. Foram utilizados diferentes tipos de diagramas empregados como forma de organizar as relações estabelecidas nesse tipo de situação. Veremos algumas dessas representações nos esquemas das Figuras 2.8 a 2.10.

Figura 2.8 – Resolução com uso de diagrama

S3. Para fazer 3 fantasias, são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?



Lúcia – 7° ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

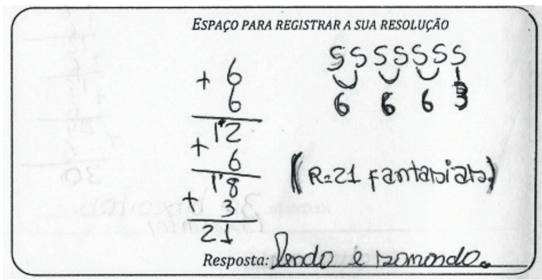
No diagrama da Figura 2.8, usado por Lúcia para a resolução da situação S3, são estabelecidas relações entre diferentes números, por meio de setas.

Lúcia indica que, a cada dois conjuntos de três fantasias, são usados 10 metros de tecido e, a cada três conjuntos de três fantasias, 15 metros de tecido. A estudante usou o diagrama buscando estabelecer a relação entre os 35 metros de tecido propostos na situação e o número de fantasias que poderiam ser confeccionadas com eles. Observa-se que o diagrama pode ter sido usado para superar a dificuldade oferecida pelo fato de que cada fantasia necessitaria de uma quantidade fracionária de metros. Percebendo que fez sete agrupamentos de três fantasias, ela chega ao resultado final: 21 fantasias. Assim, Ana conseguiu manter a relação fixa de três fantasias para cinco metros de tecido.

Representação semelhante para a mesma situação pode ser observada na resolução feita por Leandro (Figura 2.9).

Figura 2.9 – Resolução com uso de diagrama e representação numérica aditiva

S3. Para fazer 3 fantasias, são necessários 5m de tecido. Ana tem 35m de tecido. Quantas fantasias ela pode fazer?



Leandro – 6° ano

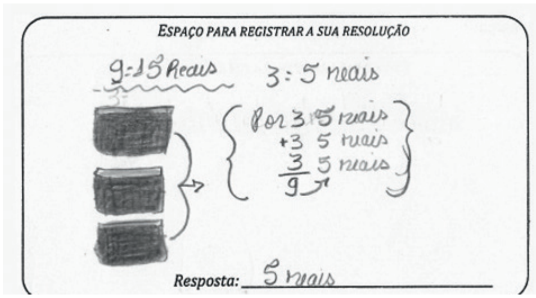
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Leandro estabeleceu, por meio do diagrama, a relação entre duas vezes os cinco metros de tecido e seis fantasias. Essa relação é repetida por três vezes e depois é estabelecida uma ligação apresentando a relação de três fantasias para cinco metros de tecido. Estabelecida a relação, o estudante usou uma adição repetida, chegando à resposta correta – 21 fantasias.

Considerando, ainda, a situação muitos para muitos e o uso de diagramas, detectou-se, na resolução de S6, possíveis relações estabelecidas pelos estudantes que evidenciam a noção de proporcionalidade (Figura 2.10).

Figuras 2.10 – Resolução com uso de representação mista

S6. Caio comprou 9 caixas de suco e pagou 15 reais. Se ele comprasse 3 caixas de suco quanto precisaria pagar?



Ana – 6º ano

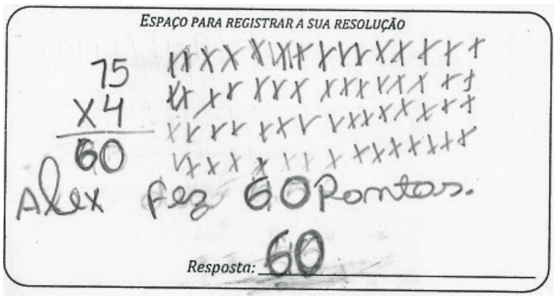
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

Na Figura 2.10, é possível observar, além da representação numérica, a presença do desenho. Não conseguimos compreender, no desenho, as relações existentes na situação. É relevante salientar que representações com estrutura semelhante foram utilizadas por estudantes do 6º ao 9º ano. Ressaltamos a importância de o professor provocar o uso diversificado de representações, evitando a algoritmização como única possibilidade de resolução das situações.

Analisando mais um caso relativo à classe muitos para muitos, percebe-se o uso da representação numérica em paralelo com a representação icônica (Figura 2.11).

Figura 2.11– Resolução com uso de representação numérica e icônica

S12. Em uma gincana na Escola Saber, a cada 3 voltas correndo na quadra o aluno marca 4 pontos. Alex deu 15 voltas correndo na quadra. Quantos pontos ele marcou?



Isabela – 6° ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Mesmo com o uso das duas representações, Isabela não conseguiu perceber o equívoco cometido. Isso, possivelmente, deve-se ao fato de não ter percebido a relação quaternária e, portanto, relacionou quatro quantidades (três conhecidas e uma a ser obtida), pois ela operou com apenas duas das quantidades, desprezando a terceira – as três voltas. Considerando apenas os dois números – 15 e 4 – multiplicou-os, obtendo a resposta 60. Embora não seja possível afirmar, pode-se supor que a representação icônica teve o papel de conduzir a estudante ao resultado da multiplicação.

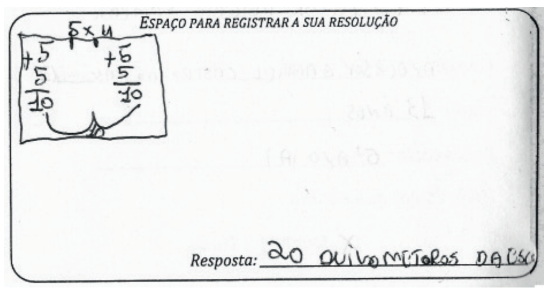
Como foi possível evidenciar, a análise dos esquemas usados nas situações de Proporção Simples mostra que, mesmo aqueles estudantes que chegaram a respostas exitosas, não tenham, talvez, percebido a efetiva existência da relação de proporcionalidade, principalmente pelo fato de não considerarem as quatro quantidades presentes em cada uma das situações.

Também é importante conhecer os esquemas usados pelos estudantes para resolverem situações do Campo Conceitual Multiplicativo que envolvam relações ternárias, das classes Comparação Multiplicativa e Produto de Medidas, as quais serão discutidas em seguida.

A Figura 2.12 mostra o esquema usado por Marise, estudante do 6° ano, para resolver a situação S2 – Comparação Multiplicativa, referido ou referente desconhecido.

Figura 2.12 – Resolução com uso de representação numérica

S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?



Marise – 6° ano

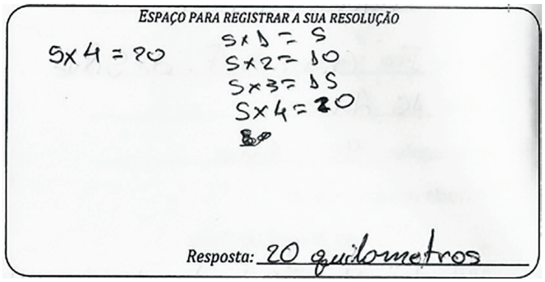
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Percebe-se que Marise usa como referência os cinco quilômetros, adicionando-os quatro vezes e encontrando como resultado 20 quilômetros. É interessante destacar o uso de uma representação mista, em que se expressa a operação de multiplicação e um diagrama contendo os dois algoritmos somando cinco mais cinco e uma chave fazendo a soma de dez mais dez. Conforme discutido anteriormente, é bastante comum que os estudantes utilizem adições repetidas para resolver situações de Comparação Multiplicativa. Apesar de a resolução indicar uma compreensão da multiplicação como adição repetida, é louvável a busca por indicar o raciocínio utilizado.

Na Figura 2.13, tem-se a situação S2 resolvida por Danilo, um estudante do 9° ano, que utiliza a operação de multiplicação.

Figura 2.13 – Resolução com representação numérica

S2. A distância entre a casa de Luís e a escola é de 5 quilômetros e a casa de José é 4 vezes mais distante. Qual a distância entre a casa de José e a escola?



Danilo – 9° ano

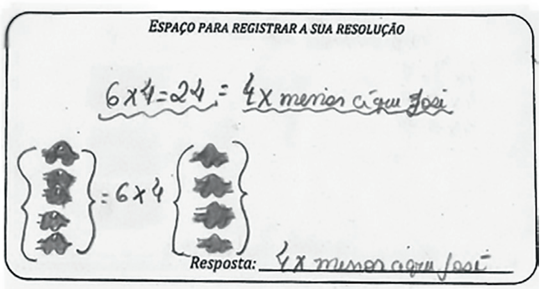
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Danilo recorre à tabuada, obtendo os múltiplos para o número 5, possibilitando que chegue ao resultado correto. Nas Figuras 2.12 e 2.13, verificamos esquemas distintos para a resolução da situação de Comparação Multiplicativa – S2. Ainda que seja uma situação mais fácil, é preciso incentivar que os estudantes entendam a relação envolvida, sem escolher a operação a partir de termos, como “vezes mais”. Isso é importante para que os estudantes não empreguem esses termos indevidamente, como poderemos observar nas resoluções apresentadas nas Figuras 2.14 e 2.15.

Na Figura 2.14, temos a resolução de Cíntia para a situação S10

Figura 2.14 – Resolução com diagrama expressando incorretamente as relações na situação

S10. Cido tem uma coleção de 6 carrinhos e, José, de 24 carrinhos. Quantas vezes a coleção de Cido é menor do que a de José?



Cíntia – 6° ano

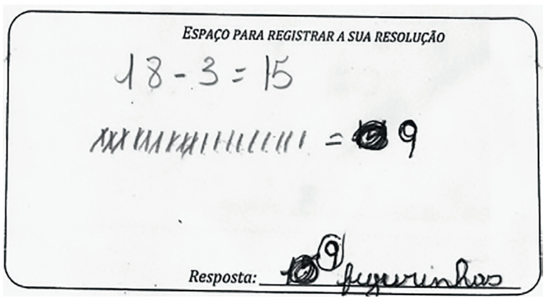
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

É interessante observar, na Figura 2.14, que Cíntia escreve o algoritmo 6 x 4 = 24 e, abaixo dele, faz um desenho de um conjunto com cinco carrinhos (quando deveriam ser seis) multiplicando um conjunto de quatro carrinhos. Contudo, o operador escalar 4 – explicitado por Cíntia, na resolução de forma simbólica, textual e por meio de desenho – representa a comparação (relação) entre os dois conjuntos de carrinhos e não outro conjunto de carrinhos. Observamos que a estudante determina a resposta considerada correta, mas não representa corretamente as relações da situação.

Na resolução da situação S13 – Comparação Multiplicativa, referido ou referente desconhecido – feita por Natan, pode-se chamar a atenção para o erro que pode ter sido induzido pelo uso da “palavra dica – três vezes menos” (Figura 2.15).

Figura 2.15 – Resolução com uso de representação numérica e icônica

S13. Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?



Natan – 7° ano

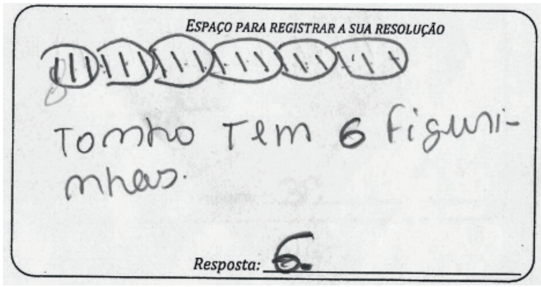
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

Pode-se observar, na Figura 2.15, que Natan utilizou a representação numérica e a operação de subtração (18 – 3 = 15), provavelmente impulsionado pela expressão "vezes menos", fazendo com que determinasse uma resposta errada. Não foi possível compreender como, a partir da representação icônica usada, ele chega à resposta 9. A resolução apresentada por Natan não evidencia as relações existentes na situação.

Na Figura 2.16, apresentamos um exemplo de resposta correta, mas a representação parece não expressar as relações da situação S13 – Comparação Multiplicativa.

Figura 2.16 – Resolução com desenhos e
expressão incorreta das relações na situação

S13.Ontem Tonho tinha 18 figurinhas. E hoje ele tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele tem hoje?



Bosco – 6° ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

Bosco, estudante do 6° ano, desenhou traços para expressar a quantidade de figurinhas e dividiu em grupos de três, encontrando seis conjuntos e atribuindo como resposta seis figurinhas. Observamos que a representação escolhida não indica claramente as relações envolvidas na situação, visto que o operador escalar 3 representa a relação entre os dois conjuntos de figurinhas e não a quantidade de figurinhas em cada agrupamento.

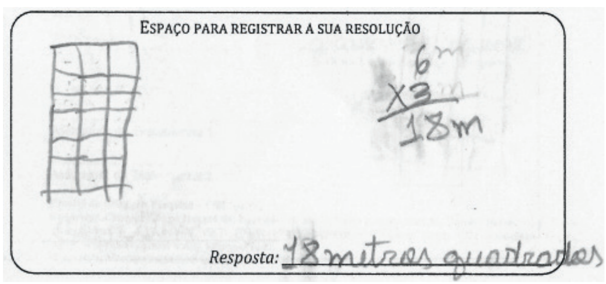
Os esquemas apresentados nas Figuras 2.14, 2.15 e 2.16 chamam a atenção para a necessidade de o professor, em sua prática de sala de aula, solicitar que os estudantes expliquem verbalmente suas representações, sem julgá-las apenas como certas ou erradas. Desse modo, é possível compreender o raciocínio deles, planejando formas de intervenção compatíveis, que favoreçam a compreensão das relações e não somente a obtenção da quantidade considerada correta.

Passemos agora a discutir os esquemas utilizados pelos estudantes na resolução de situações do eixo de Produto de Medidas. Esse eixo contempla a classe configuração retangular e combinatória.

Os tipos de situação que contemplam o eixo configuração retangular são aqueles que envolvem o conceito de área, como podem ser vistos nas situações S5 e S7. Na Figura 2.17, Amanda, do 6° ano, indica corretamente as relações envolvidas na resolução de S5.

Figura 2.17 – Resolução com desenhos e algoritmos expressando relações na situação

S5. Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3m de largura e 6m de comprimento. Quantos metros quadrados de piso Rute precisa comprar?



Amanda – 6° ano

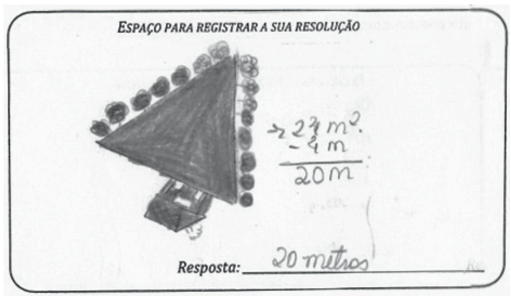
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 2.17, observamos um desenho que representa a largura e o comprimento do quarto, marcando o piso. Além disso, constatamos, também, o uso do algoritmo da multiplicação, indicando a compreensão de que o conceito de área envolve o preenchimento da superfície a partir de duas dimensões, no caso, comprimento e largura.

A Figura 2.18 apresenta a solução de um estudante do 6° ano para a situação S7 – Produto de Medidas, configuração retangular.

Figura 2.18 – Resolução com desenhos e
algoritmo expressando incorretamente as relações na situação

S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m2. A largura é 4m. Qual é comprimento desse jardim?



Manuela – 6°ano

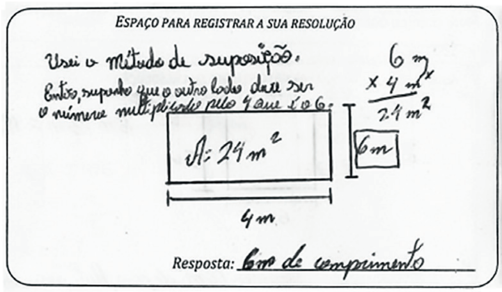
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Observamos, nesse caso, que Manuela, possivelmente, não compreende o conceito de área, pois, em sua resolução, utiliza a operação de subtração para calcular a resposta e desenha o jardim na forma triangular. Aparentemente, o objetivo da estudante é buscar uma operação para ser aplicada aos números dados na situação.

O esquema apresentado na Figura 2.19 evidencia que o estudante compreendeu as relações presentes na situação S7.

Figura 2.19 – Resolução com desenho e algoritmo expressando corretamente as relações na situação

S7. A área do jardim da casa de Vera é retangular e tem 24m2. A largura é 4m. Qual é comprimento desse jardim?



Igor – 9° ano

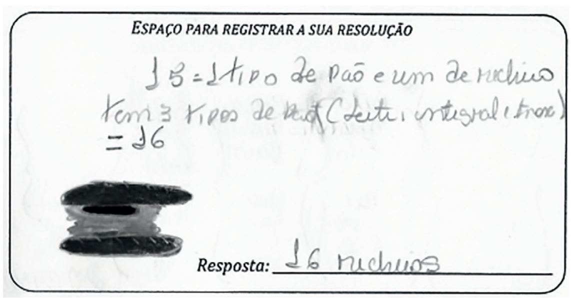
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 2.19, Igor, do 9° ano, desenha um retângulo e indica como área 24m² e um dos lados de 4m. Ele escreve, ainda, que supõe que o outro lado é o número que multiplicado por seis dará o resultado da área (ou seja, 6m). Certamente, Igor buscou um número que, multiplicado por quatro, daria 24.

Verificamos, em muitos esquemas apresentados pelos estudantes nos instrumentos, a utilização da multiplicação para resolver problemas que originalmente envolvem a operação de divisão. Gitirana et al. (2014) explicam que os alunos, comumente, ao resolverem situações que envolvem a operação de divisão, buscam, para sua resolução, a operação inversa. Condição análoga foi constatada, também, em situações de Produto de Medidas, da classe de combinatória e que envolvia a operação de divisão – S9 (Figura 2.20).

Figura 2.20 – Resolução com uso de desenho expressando incorretamente as relações

> **S9.** A Lanchonete do Ernani vende 15 tipos de sanduíche. Para cada sanduíche, é usado apenas um tipo de pão e um tipo de recheio. Tem 3 tipos de pão (leite, integral e francês). Quantos tipos de recheio são necessários para fazer todos os tipos de sanduíche?



Joyce – 7° ano

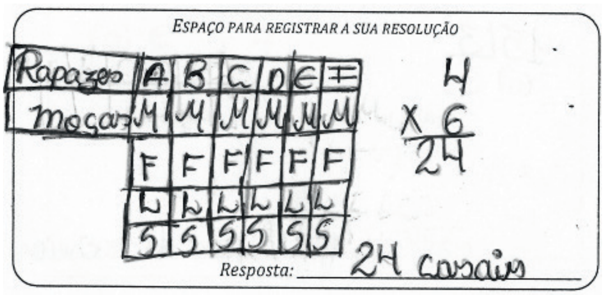
Fonte: Rede E-Mult (2013-2017).

Na Figura 2.20, é possível observar que Joyce utiliza um desenho, meramente ilustrativo, que não auxilia na explicitação das relações presentes na situação. Não foi possível compreender o esquema apresentado por Joyce. Para a resolução de S9, a operação esperada é a divisão, logo, as combinações não estão voltadas para encontrar a quantidade de possibilidades (quantidade de tipos de sanduíche), mas é a quantidade de elementos do conjunto (quantidade de tipos de recheio) que garante essas possibilidades.

Em S11, temos uma situação de combinatória em que a operação esperada é a multiplicação. Dessa forma, foi possível perceber o uso de representações com um quadro (Figura 2.21).

Figura 2.21 – Resolução com quadro e algoritmo expressando corretamente as relações na situação

S11. Na aula de dança de forró, tinha 6 rapazes (Alex, Beto, Caio, Davi, Edu, Ivo) e 4 moças (Mari, Fabi, Lara, Suzi). Todas as moças dançaram com todos os rapazes. Quantos casais diferentes foram formados?



Sérgio – 7° ano

Fonte: Rede E-Mult (2013-2017)

Na Figura 2.21, é possível observar que Sérgio fez um quadro para expressar as relações da situação S11. Nesse caso, ele representou os rapazes pelas letras de A a F e as moças pelas iniciais dos nomes (M, F, L, S). Ele repete as moças para cada um dos rapazes e faz o algoritmo para indicar o produto de quatro moças para cada um dos seis rapazes, compondo os 24 casais. Sendo assim, ao expressar a multiplicação, Sérgio demonstrou compreender a ideia de combinação.

Muitos outros esquemas e representações foram mobilizados pelos estudantes, durante a resolução das situações constantes do teste diagnóstico, contudo, não há como discutir todos eles neste capítulo. Ressaltamos, professor, que, identificar esquemas, seja em resoluções corretas ou erradas, pode ajudá-lo a entender as dificuldades dos estudantes, contribuindo, dessa forma, com o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Cabe ainda ressaltar que, entre os esquemas mobilizados pelos estudantes, pudemos perceber a tentativa de resolução de situações do Campo Conceitual

Multiplicativo, a partir de operações pertencentes ao Campo Conceitual Aditivo. Em algumas situações, isso é possível, uma vez que há uma filiação entre os dois campos conceituais. Contudo, é importante que você, professor, esteja atento e faça a intervenção, propondo situações que exijam o trabalho com a multiplicação e divisão ou analise com seus estudantes a possibilidade de superar o uso das operações do Campo Conceitual Aditivo em situações do Campo Conceitual Multiplicativo.

2.3 INDICAÇÕES PARA A PRÁTICA DA SALA DE AULA

Os resultados aqui apresentados indicam um desempenho muito aquém do esperado para estudantes nos anos finais do ensino fundamental – 6° ao 9°. A análise dos esquemas ajuda a entender um pouco essas dificuldades, bem como aponta caminhos para sua superação.

Os esquemas discutidos evidenciam que os estudantes ainda não compreendem as relações multiplicativas apresentadas em diferentes situações. Em muitas das resoluções analisadas, observa-se o uso do raciocínio aditivo, o que indica uma compreensão limitada das relações multiplicativas apenas como adição repetida. Isso indica a necessidade de se trabalhar com situações diversificadas abrangendo várias classes e eixos do campo multiplicativo, conforme discutidas no Capítulo 1. Diante disso, professor, o planejamento de atividades deve envolver a maior variedade de situações possível.

A escolha da operação deve vir posteriormente à compreensão das relações existentes numa situação e não a priori. Da mesma forma, as situações devem ser cuidadosamente elaboradas de modo a não representarem meramente um artifício para a realização de operações matemáticas. Quanto mais significativas forem as situações para os estudantes, maior será a chance de que eles busquem compreender as relações presentes nas situações, em lugar de apenas operar com os dados.

As representações utilizadas podem ser um bom indício de como os estudantes estão compreendendo as relações envolvidas, mesmo quando elas expressam respostas erradas. Assim, é importante que você, professor, peça aos estudantes que expliquem suas resoluções, sempre que possível. Desse modo, você vai poder perceber se eles compreenderam, efetivamente, a situação dada; se relacionam as quantidades (medida) corretamente; se usam a operação adequada ou estão tomando por base aquela induzida pela "palavra dica" existente em algumas situações.

Com base nessa perspectiva, estabelecemos com os professores das escolas parceiras um processo de formação colaborativa. Esse processo foi realizado durante o ano 2015 e envolveu a discussão de conceitos do Campo Conceitual Multiplicativo, a elaboração de situações, sua aplicação com estudantes e observação dos esquemas usados por eles para resolver as situações. Todas essas questões foram trabalhadas na troca de experiências que caracterizou as práticas colaborativas entre os professores e os pesquisadores. Os resultados dessa formação colaborativa estarão discutidos no próximo capítulo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação/INEP. Sistema de Avaliação da Educação básica: **edição 2015**, resultados. Brasília: INEP, 2016.

CASTRO, J. B. **Construção do conceito de covariação por estudantes do ensino fundamental em ambientes de múltiplas representações com suporte das tecnologias digitais**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.

GITIRANA, V. et al. **Repensando multiplicação e divisão**: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

HUGHES, M. **Children and number:** difficulties in lerning mathematics. Oxford: Basil Blackwell, 1986.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como as crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. **Temas em Psicologia** (Ribeirão Preto), Brasília, v. 7, p. 23-36, 1999.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L.. O raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 20, p. 517-533, 2014

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York, NY: Academic Press, 1983. p. 127-174.

______. **Ciência Exata** - Matemática não é bicho de sete cabeças. Folha Opinião, 2010. Disponível em: http://www.folhadelondrina.com.br/opiniao/ciencia-exata-matematica-nao-e-bicho-de-sete-cabecas-708748.html Acesso em: 21 set. 2017.

Capítulo III

José Aires de Castro Filho
Marcília Chagas Barreto
Juscileide Braga de Castro

SITUAÇÕES ELABORADAS E APLICADAS POR PROFESSORES EM FORMAÇÃO

Neste capítulo, estão discutidas as situações elaboradas e aplicadas pelos professores do 6º ao 9º ano que participaram do processo formativo, no ano 2015. A formação teve características colaborativas, professores e pesquisadores atuaram como parceiros na discussão da teoria e na definição de estratégias sobre como tratar os conteúdos do Campo Conceitual Multiplicativo na escola. A formação foi realizada de acordo com a espiral proposta por Magina (2008) e experimentada por Santana, Alves e Nunes (2015) que consta de reflexão – planejamento – ação – reflexão. Com o propósito de atender às especificidades de cada região e da escola, dois fatores foram levados em conta: (i) a realização da formação *in lócus*, (ii) a periodicidade dos encontros de formação. Procedeu-se de forma diferenciada em cada um dos núcleos (Bahia, Ceará e Pernambuco) do projeto de forma a atender às especificidades de cada região e escola.

O ponto de partida da formação foi a apresentação da Teoria dos Campos Conceituais e do Campo Conceitual Multiplicativo (abordado no Capítulo 1 deste livro). Para dar significação da teoria para a prática dos professores, foi realizada discussão acerca do desempenho dos estudantes nas situações contidas no instrumento diagnóstico (visto no Capítulo 2 deste livro).

Nos vários encontros da formação, os professores e pesquisadores refletiram sobre o Campo Conceitual Multiplicativo. Os professores elaboravam situações e aplicavam com seus estudantes, registrando o desempenho e suas impressões acerca das diferentes formas de resolução que surgiram. Na sequência, professores e pesquisadores refletiram sobre os resultados das aplicações. Mais detalhes sobre a formação podem ser encontrados em Santana; Lautert; Castro Filho; Santos (2016).

O Quadro 3.1 apresenta a relação do nome dos professores participantes da formação dos estados participantes e o ano escolar em que eles atuaram. No Núcleo Recife, não houve professores que atuassem do 6° ao 9° ano.

Quadro 3.1 – Professores do 6º ao 9º ano que participaram do processo formativo da Rede E-Mult

ESTADO	MUNICÍPIO	ANO ESCOLAR	PROFESSORES
Bahia	-	6º ano	Raimunda Costa dos Santos Santana
	São José da Vitória	6° e 7° ano	Geni da Silva Santos
		7°, 8° e 9° ano	Maria Gilliard S. Santos
Ceará	Fortaleza	8° ano	José Joel Alexandre
		9° ano	Ana Carla Amâncio Machado Dias
	São Gonçalo do Amarante	7° ano	Andrea Silva Vasconcelos
		8° e 9° ano	Jessyka Sales de Lima Morais

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Foram selecionadas situações elaboradas pelos professores do 6° ao 9° ano que se encontram discutidas na próxima seção. É possível consultar o conjunto das situações elaboradas pelos professores no Apêndice A.

3.1 SITUAÇÕES ELABORADAS PELOS PROFESSORES DO 6º ao 9º ANO

As situações estão apresentadas seguindo a classificação do Campo Conceitual Multiplicativo discutida no Capítulo 1 deste livro. Nas relações quaternárias, envolveu-se o eixo Proporção Simples, classes um para muitos e muitos para muitos. Os eixos Proporção Múltipla e Dupla não foram trabalhados durante a formação e, por isso, não aparecem neste capítulo. Nas relações ternárias, foram trabalhados o eixo Comparação Multiplicativa, classes referido ou referente desconhecidos e relação desconhecida; além do eixo Produto de Medidas, nas classes Configuração Retangular e Combinatória.

Em cada situação, podem ser encontradas considerações feitas pelos professores após a aplicação na sua sala de aula. Essas considerações foram feitas por meio do preenchimento, pelo professor, de relatório que incluía questões sobre o número de estudantes que responderam e que acertaram a situação, os esquemas de resolução usados pelos estudantes, os tipos de erro encontrados, como esses erros foram trabalhados e a classificação da atividade (péssima, ruim, razoável, boa, ótima) com a justificativa.

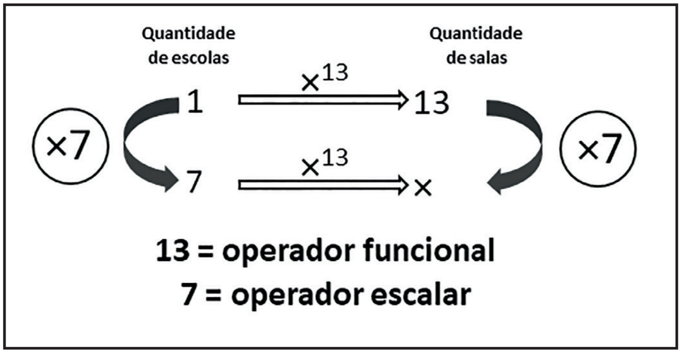
3.1.1 Proporção Simples Um para Muitos

Nessa classe, pode-se elaborar situações cuja resolução envolve a multiplicação ou a divisão por partes ou a divisão por quotas, conforme discutido no Capítulo 1. A seguir, um exemplo de cada situação elaborado pelos professores.

Multiplicação

Situação 1: A prefeitura pretende construir 12 escolas iguais, sendo que cada escola tem 13 salas de aula. Quantas salas de aula há em sete escolas iguais a essas?

Figura 3.1 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 1



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

A Situação 1 pode ser resolvida usando o operador funcional ou o operador escalar. O operador funcional compreende a relação 13 salas por escola. Aplicando-se essa quantidade para sete escolas, obtém-se a resposta 91 salas. O operador escalar é encontrado pela relação entre as quantidades de escolas (um e sete). Multiplicamos o operador escalar pelo número de salas em uma escola para encontrar a mesma quantidade de salas (91 salas).

Relato do professor que aplicou a Situação 1 em sala de aula:

O professor afirma que 34 estudantes responderam a essa situação, dos quais um pouco mais da metade acertou. Para resolver a situação, alguns estudantes efetuaram a multiplicação de 13 por sete ou a soma de parcelas iguais (sete parcelas de 13).

O professor explica que, de acordo com sua previsão, muitos estudantes confundiram a quantidade de escolas que envolvia o cálculo – 12 escolas ou sete escolas – e confundiram também a quantidade de escolas (12) com a quantidade de salas de aula (13). Esses foram os principais empecilhos.

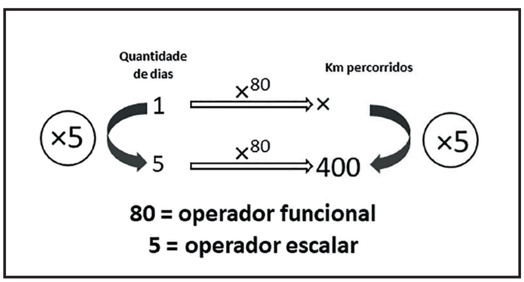
Foi afirmado, também, pelo professor que, com base nos erros dos estudantes, pretendia-se chegar a soluções distintas e coerentes da questão e ainda criar outras situações semelhantes de forma que eles conseguissem enxergar o erro e não mais cometê-lo.

A atividade foi classificada pelo professor como boa, pois lhe propiciou a possibilidade de diagnosticar as dificuldades dos alunos no Campo Conceitual Multiplicativo e, assim, auxiliá-los melhor.

Divisão por partes

Situação 2: Em uma viagem de cinco dias, João percorreu 400 Km. Quantos quilômetros ele percorre em um dia?

Figura 3.2 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 2



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Essa situação requer uma distribuição equitativa de 400 km em cinco dias. A situação pode ser resolvida encontrando-se o operador funcional, dividindo-se a quantidade total de quilômetros pelo total de dias, obtendo-se 80 km por dia. E, em seguida, multiplicando o operador funcional por um dia para encontrar a quantidade de 80 Km. Ressalta-se que, embora o operador funcional e a quantidade de quilômetros percorridos em um dia tenham o mesmo valor numérico (80), eles não correspondem à mesma grandeza, visto que a primeira grandeza é velocidade e, a segunda, comprimento.

Outra forma de resolução é encontrar o operador escalar, ao dividir a quantidade total de dias (cinco dias) por um dia, obtendo-se cinco. Divide-se a distância total (400 km) por esse operador (cinco), encontrando-se o número de km para um dia (80).

Relato da professora que aplicou a Situação 2 em sala de aula:

Segundo a professora, 21 alunos fizeram a situação e somente nove acertaram.

A professora relatou que alguns estudantes utilizaram algoritmo e outros usaram métodos comparativos, embora não tenha esclarecido o que são métodos comparativos.

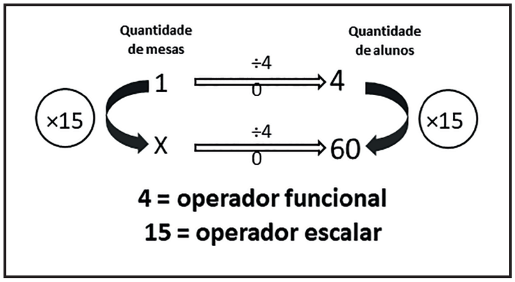
Para a professora, os estudantes, muitas vezes, conseguiam montar a proporção, mas, na hora de dividir, não encontravam a resposta correta. Para trabalhar o erro, ela explicitou novamente a situação e a resolveu.

A situação foi classificada como razoável pela professora, pois, como a Proporção Simples já havia sido trabalhada com a turma, em forma de atividades e trabalhos, ela esperava um melhor desempenho.

Divisão por partes

Situação 3: A escola Cristo Redentor fará uma festa junina para 60 alunos. Em cada mesa ficarão quatro alunos. Quantas mesas a escola precisará para a festa?

Figura 3.3 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 3



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

A Situação 3 envolve novamente uma distribuição equitativa, sendo que, agora, almeja-se encontrar a quantidade total de mesas nas quais distribuir 60 alunos, com quatro alunos por mesa.

O operador funcional já está explícito no enunciado do problema (quatro alunos por mesa). Divide-se a quantidade total de alunos (60) pelo operador funcional (quatro alunos por mesa) para se encontrar a quantidade de mesas (15 mesas).

Na resolução pelo operador escalar, divide-se a quantidade total de alunos (60 alunos) pela quantidade de alunos em uma mesa (quatro alunos) e multiplica-se por uma mesa para encontrar a quantidade de mesas (15 mesas).

Em ambas as situações de divisão (por partes e por quotas), usam-se operações de multiplicação e divisão. As duas operações nem sempre são explicitadas, visto que uma das quantidades é o valor unitário (um).

Relato do professor que aplicou a Situação 3 em sala de aula:

Os professores classificaram essa atividade como razoável e indicaram que 68 estudantes a responderam, com 44 respostas corretas.

Os professores informaram que alguns estudantes usaram desenhos e outros o diagrama de Vergnaud. Eles apresentaram dificuldades de interpretação, de encontrar as grandezas e, alguns, não sabiam resolver a multiplicação e a divisão. Alguns ainda erraram por falta de atenção.

Os professores registraram que orientaram os estudantes no sentido de que primeiro eles devem entender a situação, para depois encontrar as grandezas e chegar ao cálculo e ao resultado.

Ao todo, os professores elaboraram 10 situações de Proporção Simples um para muitos, sendo quatro de multiplicação, três de divisão por partes e três de divisão por quotas. Nota-se que houve uma diversidade de situações propostas, não se concentrando somente em situações de multiplicação, conforme a literatura indica ser comum nas práticas pedagógicas (GITIRANA et al., 2014).

3.1.2 Proporção Simples muitos para muitos

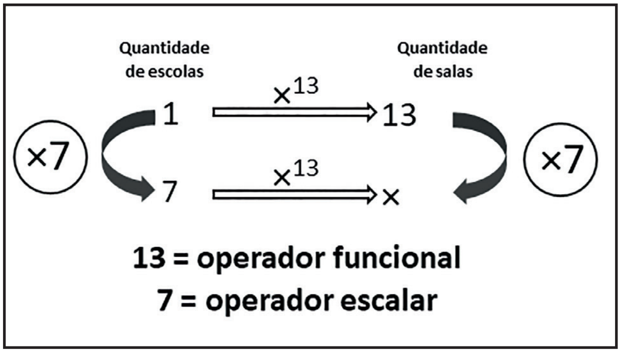
Conforme já explanado no Capítulo 1 deste livro, nas situações de Proporção Simples muitos para muitos, existe uma relação de proporcionalidade entre quatro quantidades, duas a duas, mas a unidade não é dada explicitamente. Vejamos duas situações propostas pelos professores. A primeira parte de uma quantidade menor buscando uma maior e, a segunda, faz o inverso, pois parte de uma quantidade maior e busca uma menor.

Busca da quantidade maior

Situação 4: Em três pacotes de bombons há trinta unidades. Quantos bombons há em cinco pacotes?

A situação 4 requer a utilização da multiplicação e da divisão. Professor, observe como fica a resolução usando o operador escalar ou o operador funcional.

Figura 3.4 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 4



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

O operador funcional é encontrado pela relação entre a quantidade de bombons e a quantidade de pacotes (30 bombons ÷ três pacotes = 10 bombons por pacotes). Mantendo a proporcionalidade, encontramos a quantidade de bombons em cinco pacotes (cinco pacotes x 10 bombons por pacotes = 50 bombons).

Já o operador escalar representa a relação entre as duas quantidades de pacotes (cinco pacotes ÷ três pacotes = ⁵⁄₃). Esse operador escalar é usado para encontrar a quantidade de bombons em cinco pacotes multiplicando-se pela quantidade de bombons em três pacotes (30 bombons = 50 bombons).

Relato do professor que aplicou a Situação 4 em sala de aula:

O professor indicou que 34 estudantes responderam a essa situação, sendo que 25 acertaram.

Em seu relato, o professor explicou que alguns estudantes dividiram 30 por três e multiplicaram o resultado por cinco. Outros dividiram por três e depois fizeram a soma de parcelas. Um aluno escreveu duas colunas e cinco linhas, colocando, em cada linha, o valor um em uma coluna e o valor 10 na outra coluna. Nenhum estudante a resolveu usando regra de três.

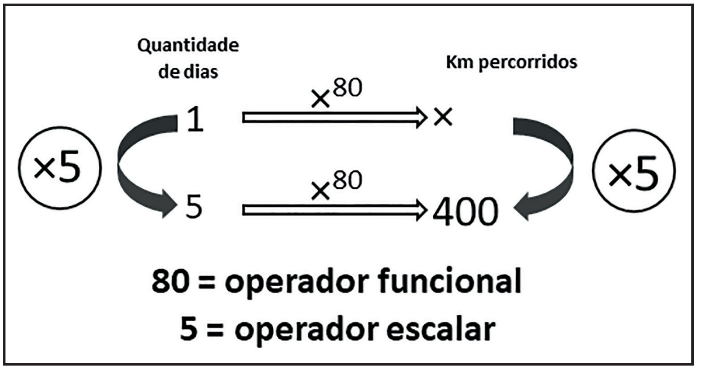
O tipo de erro relatado pelo professor foi a multiplicação da quantidade de bombons três pacotes (30 bombons) por cinco. Esse erro foi trabalhado com soluções distintas da questão e criação de situações semelhantes.

A atividade foi classificada como boa pelo professor, pois foi possível diagnosticar a dificuldade dos estudantes no Campo Conceitual Multiplicativo e, por meio dessas dificuldades, auxiliá-los melhor.

Busca da quantidade menor

Situação 5: João vende 60 bolos de tapioca, ganhando, assim, R$ 120,00. Quantos bolos ele terá que vender para ganhar R$ 360,00?

Figura 3.5 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 5



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

O operador funcional é a relação entre o número de bolos de tapioca vendidos e o valor ganho em reais (R$ 120,00 ÷ 60 bolos = R$ 2,00 por bolo). Para encontrar o número de bolos correspondente a um ganho de R$ 360, divide-se esse valor pelo operador funcional (R$ 360,00 ÷ R$ 2,00 por bolo = 180 bolos).

O operador escalar equivale à relação entre os dois valores ganhos (R$ 360,00 ÷ R$ 120 = três). Multiplica-se o operador escalar (três) por 60 bolos, encontrando-se 180 bolos.

Relato dos professores que aplicaram a Situação 5 em sala de aula:

Os professores relataram que 88 estudantes responderam a essa situação, com 26 acertos.

Eles registraram que os estudantes utilizaram várias formas para resolver a situação, com desenhos (bolinhas, riscos), diagrama, regra de três, contas de multiplicação e divisão.

Os erros relatados pelos professores envolveram a troca das parcelas, dos sinais e dos números, sendo que alguns alunos não sabiam ler e, por isso, tiveram dificuldade de interpretar. Houve, ainda, erros com as operações, principalmente com a multiplicação e a divisão.

Para superar os erros, alguns professores fizeram uma intervenção de forma explicativa e expositiva e, depois, realizaram mais atividades com situações. Outros colocaram os problemas, no quadro, e foram resolvendo com os estudantes, ajudando-os a interpretar, para, posteriormente, eles corrigirem o que haviam errado.

Os professores atribuíram uma classificação diferente para a situação, os que a classificaram como ruim, justificaram que os alunos apresentaram muita resistência e dificuldade, e o rendimento caiu muito. Os que a classificaram como boa, afirmaram que ela possibilitou que os alunos compreendessem que, por trás de cada número, há uma grandeza, que deve ser organizada e, assim, eles conseguiram identificar as operações e resolver as situações.

Os professores elaboraram sete situações de Proporção Simples, muitos para muitos. Apresentamos, aqui, duas situações. As demais podem ser encontradas no Anexo A.

Os resultados do instrumento diagnóstico, discutidos no Capítulo 2, indicaram que os estudantes apresentam mais dificuldades para responder a situações de Proporção Simples muito para muitos do que as de um para muitos. Deve-se isso, principalmente, à necessidade de compreender que a resolução das situações, necessariamente, envolve dois cálculos, um de multiplicação e outro de divisão. É importante que as situações muitos para muitos sejam trabalhadas com frequência para que os estudantes venham a compreendê-la.

Passaremos a discutir, agora, as situações envolvendo relações ternárias.

3.1.2 Comparação Multiplicativa

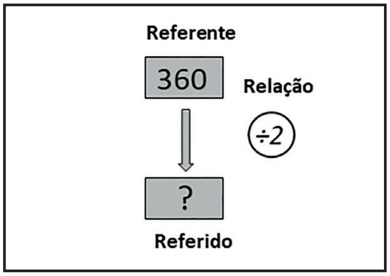
Conforme discutido no Capítulo 1 deste livro, na Comparação Multiplicativa, há duas classes de situações, as que apresentam referente ou referido desconhecido e as que trazem a relação desconhecida. Veremos situações de comparação multiplicativa elaboradas pelos professores.

3.1.2.1 Referido/Referente Desconhecido

Situação 6: Carlos e José estão jogando bate-bate[1]. Carlos tem 360 figuras e José tem duas vezes menos a quantidade de Carlos. Quantas figuras tem José?

A Situação 6 apresenta o referente (quantidade de figurinhas de Carlos), a relação (duas vezes menos) e solicita o referido (quantidade de figurinhas de José).

Figura 3.6 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 6



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

As terminologias, referido, referente e relação são termos técnicos específicos da Teoria dos Campos Conceituais. Não é necessário que você, professor, ensine esses termos para os seus estudantes. Eles são importantes na medida em que determinam qual a quantidade que se deve tomar por referência, facilitando a interpretação do cálculo relacional da situação. O diagrama pode ser utilizado com os estudantes

1 Em alguns locais do Brasil, essa brincadeira é conhecida como Bafo.

para a compreensão das relações da situação, sem necessariamente referir-se aos termos (referido, referente e relação).

No diagrama apresentado na Figura 3.8, Carlos é o referente, pois José tem duas vezes menos figurinhas do que Carlos. Desse modo, para determinar a quantidade de figurinhas de José – referido – é preciso dividir a quantidade de figurinhas de Carlos (360) – referente, pela relação entre essas quantidades (2). Ressaltamos que a relação duas vezes menos também pode ser interpretada como metade.

Relato do professor que aplicou a Situação 6 em sala de aula:

O professor relatou que 37 estudantes responderam a essa situação, com 25 acertos. Alguns alunos não registraram a forma de resolução, mas conseguiram, de maneira diferente, a divisão.

Na percepção do professor, os estudantes apresentaram dificuldade na divisão e também na leitura e interpretação. Para trabalhar os erros, eles foram colocados no quadro e, ao lado, foi explicado o correto.

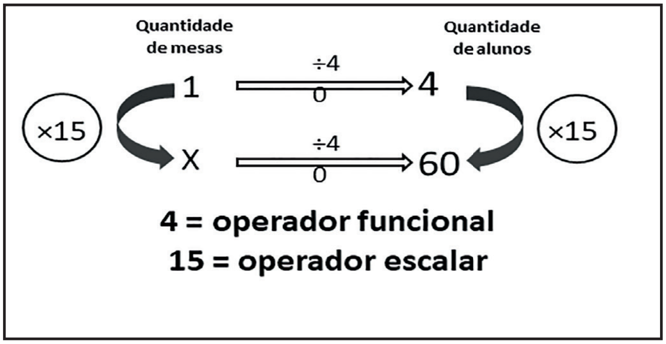
A atividade foi classificada como razoável pelo professor que afirmou: estou feliz, em alcançar mais de 50% do nosso objetivo que era fazer com que eles [estudantes] aprendessem a interpretar e realizar a solução dos problemas usando o esquema estudado.

3.1.2.2 Relação Desconhecida

Situação 7: Jó tem quatro bombons e Alan tem 28. Quantas vezes a quantidade de bombons de Jó é menor que a de Alan?

A Situação 7 apresenta o referente (a quantidade de bombons de Alan), o referido (quantidade de bombons de Jó) e é solicitada a relação entre as duas quantidades de bombons (Figura 3.9). A quantidade de bombons de Alan é a referência que necessito para ter a quantidade de bombons de Jó, pois a quantidade de Jó é menor do que a quantidade de Alan.

Figura 3.7 – Diagrama de Vergnaud para a Situação 7



Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

Para determinar a relação entre a quantidade de bombons de Jó e a de Alan, é preciso dividir a quantidade de bombons de Alan (28) pela quantidade de bombons de Jó (quatro) encontrando a relação escalar sete.

Relato do professor que aplicou a Situação 7 em sala de aula:

O professor afirma que 34 estudantes responderam a essa situação, dos quais um pouco mais da metade acertou. Para resolver a situação, alguns estudantes efetuaram a multiplicação de 13 por sete ou a soma de parcelas iguais (sete parcelas de 13).

Não foi explicitado, pelo professor, a quantidade de alunos que respondeu e acertou a situação proposta.

Para essa situação, o professor registrou a seguinte forma de resolução:

Relação Desconhecida
Divisão

Referente	*Relação*	*Referido*
4	$\div\boxed{?}$	28

7 vezes.

O professor relatou que os estudantes utilizaram, no processo de resolução, as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para o professor, o erro consistiu no uso de diferentes operações. Isso não foi trabalhado como erro, mas sim como outras possibilidades, sempre mostrando a operação.

O professor afirma que foi possível diagnosticar uma dificuldade dos alunos no que se refere à Comparação Multiplicativa.

Os professores elaboraram cinco situações de Comparação Multiplicativa, sendo duas de relação desconhecida e três de referido desconhecido. Não foram elaboradas situações com referente desconhecido. Essa ausência pode ser explicada pela complexidade dessa situação, conforme tratado no Capítulo 1.

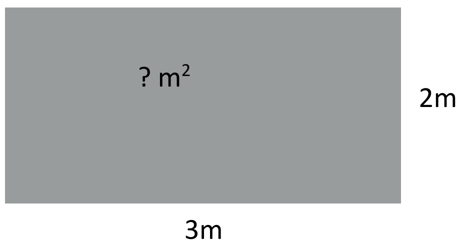
3.1.3 Configuração retangular

As situações de configuração retangular envolvem um produto cartesiano obtido a partir de duas medidas lineares. É o que ocorre, por exemplo, ao se trabalhar com área. Há dois tipos de situação: quando são dadas as duas medidas lineares (comprimento e largura) e se solicita o produto entre elas que é a medida de superfície de área; quando se conhece a medida de superfície de área e uma das medidas lineares e se procura conhecer a outra medida linear.

Produto cartesiano desconhecido

Situação 8: Se a janela da nossa sala de aula medisse 2m de altura e 3m de comprimento. Qual o valor da superfície da área da janela?

Na Situação 8, a área da janela é obtida pelo produto da altura (2m) pelo comprimento (3m).



Área = Comprimento x Largura

Área = 2m x 3m

Área = 6m²

Relato do professor que aplicou a Situação 8 em sala de aula:

Os professores relataram que 76 estudantes responderam a essa situação, com 48 acertos.

Segundo os professores, os estudantes utilizaram as operações de adição, subtração, divisão e multiplicação, algoritmo, desenhos e perímetro.

Os erros apontados pelos professores foram relativos ao uso das operações de adição e subtração utilizadas no lugar da multiplicação e da divisão.

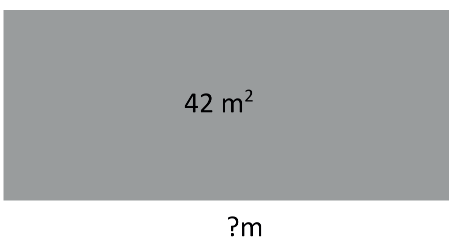
Duas professoras afirmaram que, diante das dificuldades dos estudantes, utilizaram material concreto, fita, tabuleiro da multiplicação, caixa de dados e jogo da caixa de ovos coloridos. Outra professora usou a malha quadriculada.

Os professores classificaram essa atividade como boa, pois alguns alunos conseguiram associar a figura da configuração retangular com o algoritmo. Consideraram que alguns alunos ainda precisam melhorar a interpretação dos problemas e as operações.

Uma das quantidades do produto cartesiano desconhecida

Situação 9: O piso do refeitório da escola é retangular e tem $42m^2$. A largura é de 6m. Qual o comprimento do piso desse refeitório?

Na Situação 9, o comprimento é encontrado pela divisão da área (42) pela largura (6 m).



$$\begin{cases} \text{Comprimento} = \text{Área} \div \text{Largura} \\ \text{Comprimento} = 42m^2 \div 6m \\ \text{Comprimento} = 7m \end{cases}$$

Relato dos professores que aplicaram a Situação 9 em sala de aula:

Os professores comentaram que 76 estudantes responderam a essas situações e apenas 15 estudantes acertaram.

Segundo os professores, os estudantes utilizaram as operações de adição, subtração, divisão e multiplicação, algoritmo, desenhos e perímetro.

Os erros apontados pelos professores foram relativos ao uso das operações de adição e subtração utilizadas no lugar da multiplicação e da divisão.

Duas professoras afirmaram que, diante das dificuldades dos estudantes, utilizaram material concreto, fita, tabuleiro da multiplicação, caixa de dados e jogo da caixa de ovos coloridos. Outra professora usou a malha quadriculada.

Os professores classificaram essa atividade como boa, pois alguns alunos conseguiram associar a figura da configuração retangular com o algoritmo. Consideraram que alguns alunos ainda precisam melhorar a interpretação dos problemas e as operações.

3.1.4 Combinatória

Essa classe de situação estabelece relações entre elementos de dois conjuntos disjuntos, combinando-se dois a dois, todos os elementos dos conjuntos envolvidos, produzindo um novo conjunto. A quantidade de elementos do novo conjunto é determinada pelo produto da quantidade de elementos de cada um dos conjuntos originais.

Nessa classe, há duas situações: são conhecidas as quantidades de elementos de cada um dos conjuntos e se deseja encontrar a quantidade de elementos do novo conjunto; são conhecidas as quantidades de elementos do novo conjunto e de um dos conjuntos originais, buscando achar a quantidade de elementos do outro conjunto original.

Os professores propuseram quatro situações de combinação, todas em que são dados os conjuntos disjuntos e é pedida a quantidade de elementos do novo conjunto. Comentamos, a seguir, uma situação proposta por uma professora.

Conjunto produto desconhecido

Situação 10: Na fábrica de carros, a produção de carros é feita em cinco modelos: Corsa, Fiat Uno, Fiesta, Logan, Gol e em quatro cores diferentes: branco, cinza, verde e preta. Quantos tipos diferentes de automóveis poderão ser produzidos com esses modelos e essas cores?

Na situação 10, são dados dois conjuntos disjuntos: o conjunto de modelos de carro (cinco modelos) e o conjunto de cores (quatro cores) e se deseja encontrar o terceiro conjunto que é o da combinação entre modelos de carro e opção de cores. A solução é encontrada pela multiplicação da quantidade de modelos de carro (cinco) pela quantidade de cores (quatro), encontrando-se 20 tipos diferentes de carros.

As situações da classe combinatória que envolvem quantidades pequenas podem ser resolvidas com o uso de listas ou do diagrama de árvore. A Figura 3.8 apresenta um diagrama de árvore para a situação.

Figura 3.8 – Diagrama de árvore para a Situação 10

Fonte: Rede E-Mult (2013/2017).

A ideia do diagrama de árvore é pertinente e se faz importante para a interpretação da situação. Contudo, também é fundamental trabalhar diferentes formas de resolução, uma vez que tal solução pode-se tornar limitada se as quantidades envolvidas forem maiores. Outro ponto relevante é que esse tipo de resolução remete à contagem e não às operações do Campo Conceitual Multiplicativo. É preciso avançar, pois, em situações em que se fornece a quantidade de um dos conjuntos originais, a quantidade do novo conjunto e pede a quantidade do outro conjunto original, esse tipo de resolução não dá conta de resolvê-la.

Relato da professora que aplicou a Situação 10 em sala de aula:

A professora registrou que 26 estudantes do 6° ano fizeram essa situação e apenas 10 acertaram.

Ela relata que fez a leitura da situação antes de sua aplicação e que, em uma aula anterior, havia utilizado o livro didático para resolver uma situação semelhante, tendo explorado o uso de tabelas, diagramas de árvore e o uso do algoritmo da multiplicação. Dessa forma, imaginava que os estudantes teriam mais facilidade em resolver a situação.

Os estudantes usaram tabelas, diagramas de árvore, legendas, algoritmo da adição e multiplicação, desenhos e pares ordenados.

Os erros apontados pela professora foram na interpretação dos dados e nas representações incompletas.

O erro foi trabalhado de forma coletiva, pela amostra das sugestões de estratégias.

A professora esperava que, pelo menos, 60% dos estudantes representassem as combinações por desenhos, tabelas, diagramas de árvores ou pela operação de multiplicação, no entanto, isso não aconteceu.

A atividade foi classificada pela professora como boa, pois, segundo ela, deu condições de observar a percepção dos estudantes sobre as situações.

O relato apresentado indica a diversidade das situações elaboradas pelos professores. Pode-se considerar esse um dos reflexos do processo formativo que se encontra em consonância com os pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais, uma vez que, para Vergnaud, a elaboração do campo conceitual depende de experiências com a variedade de situações.

As reflexões dos professores sobre a aplicação das situações revelam um ganho obtido no processo formativo, ao compreenderem a importância de considerar não somente as respostas dos alunos como certas ou erradas, mas também de valorizar as diferentes formas de resolução, quer conduzam a respostas certas ou erradas. Percebe-se, também, uma compreensão da importância de considerar o erro e as dificuldades dos alunos como um norte para a prática pedagógica.

Na próxima seção, passamos a voz para os professores para que relatem sua experiência no processo de formação colaborativa vivenciado.

3.2 MEMÓRIAS QUE SE CRUZAM EM DIFERENTES CAMINHOS FORMATIVOS

Nesta seção, apresentamos memórias de dois professores dos anos finais do ensino fundamental de escolas parceiras da Rede E-Mult, acerca da sua participação no processo formativo, no ano 2015. Os seguintes questionamentos foram feitos aos professores, de modo a nortear suas memórias: por que o Campo Conceitual Multiplicativo está incluído como um dos componentes curriculares a serem estudados desde os anos iniciais; como você avalia o conhecimento dos seus estudantes em relação ao Campo Conceitual Multiplicativo; qual a principal contribuição que essa formação trouxe para sua prática docente quanto ao ensino do Campo Conceitual Multiplicativo.

Memórias do professor Fernando[2]

Fernando lecionava nas turmas do 8º e 9º anos de uma escola da rede pública municipal, vejamos suas memórias.

Eu terminei o curso de Licenciatura em Matemática, em 2014. Escolhi esse curso, escolhi ser professor, pois gosto muito de Matemática. Comecei a trabalhar como professor de Matemática em 2013, ainda na graduação. Tenho pouco mais

2 Por questões éticas, os nomes utilizados para os professores são fictícios.

de três anos de experiência docente. Não fiz nenhuma especialização, mas gostaria muito de fazer um mestrado na área de Matemática.

O Campo Conceitual Multiplicativo está presente no currículo dos anos iniciais e finais do ensino fundamental. Não conheço muito bem o currículo dos anos iniciais, mas, com certeza, trabalha-se a multiplicação e a divisão. Trabalhando desde o começo, ajuda quando o estudante chegar aos anos finais. No currículo dos anos finais, há muitos conteúdos, além da multiplicação e da divisão, que fazem parte do Campo Conceitual Multiplicativo: proporção, função, princípio multiplicativo, combinatória, entre outros. Alguns desses conteúdos até estão nos livros didáticos, mas não são explorados, pois precisamos seguir os conteúdos que são determinados pela Secretaria Municipal de Educação (SME). Por isso, exploramos muito pouco o conteúdo de combinatória, por exemplo. Em relação aos conteúdos relacionados ao Campo Conceitual Multiplicativo, considero que meus alunos estão no nível básico, eles ainda têm muita dificuldade, mesmo em situações mais simples, talvez, porque uso os exercícios do livro didático e as questões são todas muito parecidas. Acho que não tem todos esses tipos de situações do Campo Conceitual Multiplicativo que estudamos na formação.

A formação me fez refletir sobre como pensa o estudante e como incentivá-lo a utilizar seus próprios esquemas para chegar ao resultado, mesmo com ajuda. Achei muito interessante conhecer a classificação das diferentes situações; poder criar uma situação, identificando seu grau de dificuldade e saber que existem grandezas discretas e contínuas.

Considerando o que aprendi na formação, vou poder propor algo diferente, fazer diferente. Por exemplo, quando for ensinar proporção, não preciso apenas apresentar aquela fórmula da regra de três: os meios pelos extremos. Posso trabalhar com os operadores escalar e funcional. Mas, fico com medo de trabalhar com os alunos que já usam a regra de três, pois, quando fazemos diferente, eles dizem que estamos complicando; dá medo de confundir a cabeça do aluno. Por isso, acho importante que esse trabalho com o Campo Conceitual Multiplicativo seja feito desde os anos iniciais. Gostei da formação e queria que continuássemos no próximo ano para poder entender melhor proporção dupla e múltipla.

Memórias da professora Aline

Aline lecionava nas turmas do 6° ano de uma escola da rede pública municipal. Vejamos suas memórias.

Minha inserção na educação surgiu na década de 1980, tendo formalizado meu acesso à rede municipal de educação a partir de 2011. Minha formação inicial é na área técnica e em Engenharia nas quais atuei por muitos anos antes de assumir a função de professora. Fiz opção para atuar na educação por interesse e afinidade com a área. Concluí o curso de Licenciatura em Matemática no ano 2009. Atuo como professora dos anos finais do ensino fundamental desde 2011.

Sempre estou em busca de novos conhecimentos, principalmente, devido aos problemas e às dificuldades observadas no ensino e na aprendizagem dos estudantes do 6° ao 9° ano. Motivada a prosseguir meus estudos, optei por fazer o mestrado nas áreas da informática educativa e de Matemática. Foi então que, da inserção no mundo da pesquisa e a possibilidade de aliá-la à prática na condução dos conteúdos da Matemática, surgiu a formação promovida pela Rede E-Mult, tendo contribuído para o fortalecimento das ações já desenvolvidas no dia a dia da sala de aula.

A formação influenciou minha prática pedagógica de forma positiva, por promover uma reflexão das minhas estratégias no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Estando, na época, elaborando a dissertação, a formação agregou a necessidade, cada vez maior, de valorizar as pesquisas que evidenciavam a contribuição no aprendizado do Campo Conceitual Multiplicativo. Tendo como prática, na sala de aula, diversidades de atividades e o uso de variados recursos objetivando promover maior interesse e engajamento do aluno, a formação confirmou a importância de como podemos nos apropriar do conhecimento novo e inseri-lo no planejamento do conteúdo a ser explorado.

O estudo da Teoria dos Campos Conceituais fundamenta minha prática pedagógica e me estimula a compartilhar com outros professores da rede municipal o que aprendi. No planejamento das formações que atualmente participo na Secretaria Municipal de Educação (SME), a Teoria dos Campos Conceituais tem sido utilizada como uma das referências na temática da resolução de problemas apresentada para os professores e formadores dos anos iniciais e finais do ensino fundamental que lecionam na Rede de Ensino Municipal. Sensibilizar os professores da importância de valorizar e incentivar o aluno a interpretar e representar o cálculo, ao resolverem diversas situações do conteúdo matemático, é um desafio. O processo de interpretação aliada à representação complementa-se e faz o professor refletir sobre a necessidade do aluno na elaboração dos conceitos, dando significado ao que se pretende ensinar. Também permite ao professor e ao aluno um novo olhar ao serem conduzidos à resolução, não somente por meio do algoritmo.

REFERÊNCIAS

MAGINA, S. (RE)Signifcar as estruturas multiplicativas a partir da formação ‘ação-reflexão-planejamento-ação’ do professor. Edital Universal, Projeto nº 471247/2008- 1. CNPq. 2008.

SANTANA, E.R.S.; ALVES, A. A.; NUNES, C. B. A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, dez, 2015, p. 1162-1180.

SANTANA, E.R.S.; LAUTERT, S. L. ; CASTRO FILHO, J.A.; SANTOS, E. M. Observatório da educação em rede: as estruturas multiplicativas e a formação continuada. **Educação Matemática em Foco** (UEPB), v. 5, 2016. p. 77-96.

ANEXO A

Situações elaboradas por professores participantes do processo formativo

Proporção Simples – um para muitos

1- Um automóvel gasta 8 litros para percorrer 1 km. Quantos quilômetros o carro irá percorrer com 480 litros de gasolina?

2- Camila comprou 4 blusas e pagou R$ = 72,00. Quanto ela pagou por uma blusa?

3- Em uma viagem de 5 dias, João percorreu 400 km. Quantos quilômetros ele percorre em 1 dia?

4- Em uma sala, há seis tomadas. Quantas tomadas há em seis salas?

5- A prefeitura pretende construir 12 escolas iguais, sendo que cada escola tem 13 salas de aula. Quantas salas de aula há em 7 escolas iguais a essas?

6- Simone comprou 15 litros de mel. Pagou R$ 3,00 por litro. Quanto custaram os 15 litros?

7- Antônio tem 56 selos. Quer distribuir com 7 colegas seus, para que todos tenham a mesma quantidade. Quantos selos cada um receberá?

8 - A escola Cristo Redentor fará uma festa junina para 60 alunos. Em cada mesa ficarão 4 alunos. Quantas mesas a escola precisará para a festa?

9 - Uma loja tem 16 carros. Sabendo-se que cada carro tem 4 rodas. Qual o total de rodas dos 16 carros da loja?

10 - A professora Ana Carla recebeu 4 embalagens totalizando 45 diferentes brinquedos para distribuir com suas 3 turmas do 6º ano A/B/C. Sabendo-se que será dividida a mesma quantidade de brinquedos por turma, quantos brinquedos será para cada 6º ano?

Proporção Simples – muitos para muitos

1- Numa lanchonete, a cada 27 pastéis de carne vendidos, vendem-se 9 de palmito. Em certo dia, foram vendidos 30 pastéis de carne. Quantos pastéis de palmito foram vendidos nesse dia?

2- Em três pacotes de bombom há 30 unidades. Quantos bombons há em 5 pacotes?

3- Eva comprou 4 barras de chocolate da mesma marca e pagou R$ 9,00. Com R$ 27,00, quantas barras de chocolate da mesma marca ela podia ter comprado?

4- No posto de saúde Jardilina Gomes, atende-se o mesmo número de pessoas todos os dias. Se forem atendidas 90 pessoas em 6 dias, quantas pessoas serão atendidas em 2 dias?

5- No aniversário da Beatriz, foram encomendados 10 kits de guloseimas para cada 3 crianças. Sabendo-se que são 45 alunos, quantos kits serão necessários?

6- João vende 60 bolos de tapioca, ganhando, assim, R$ 120,00. Quantos bolos ele terá que vender para ganhar R$ 360,00?

Comparação Multiplicativa

1- Luan tem 100 gudes e seu irmão tem cinco vezes menos a quantidade de gudes de Luan. Quantas gudes tem o irmão de Luan?

2- Manoel tem uma dúzia de frutas, sendo que seu vizinho Carlos possui 36 frutas. Quantas vezes a quantidade de frutas de Carlos é maior do que a de Manoel?

3- Carlos e José estão jogando bate-bate. Carlos tem 360 figuras e José tem duas vezes menos a quantidade de Carlos. Quantas figuras tem José?

4- Jonas tem 21 figurinhas. Ana tem 3 vezes menos. Quantas figurinhas Jonas tem a mais que Ana?

5- Jó tem 4 bombons e Alan tem 28 bombons. Quantas vezes a quantidade de bombons de Jó é menor que a de Alan?

Configuração retangular

1- Se a janela da nossa sala de aula medisse 2m de altura e 3m de comprimento. Qual o valor da superfície da área da janela?

2- O piso do refeitório da escola é retangular e tem $42m^2$. A largura é de 6m. Qual o comprimento do piso desse refeitório?

Combinatória

1- Na fábrica de carros, a produção de carros é feita em 5 modelos: Corsa, Fiat Uno, Fiesta, Logan, Gol e em 4 cores diferentes: branco, cinza, verde, preta. Quantos tipos diferentes de automóveis poderão ser produzidos com esses modelos e essas cores?

2- Imaginem que vocês estão se conhecendo agora. Os meninos vão cumprimentar as meninas dando as mãos para elas, mostrando todas as possibilidades de dar os cumprimentos. Sabendo que são 4 meninos e 4 meninas e a partir das ações acima, quantos cumprimentos foram realizados?

MINI CURRÍCULO

EURIVALDA RIBEIRO DOS SANTOS SANTANA

Doutora em Educação Matemática pela PUC/SP, Pós-doutorado pela Universidade de Lisboa. Professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz. Atua na área de Educação Matemática com ênfase em processo de ensino, em processos de aprendizagem e produção de material didático.

E-mail: eurivalda@uesc.br

JOSÉ AIRES DE CASTRO FILHO

Ph.D em Mathematics Education pela University Of Texas At Austin. Professor Titular da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Atua principalmente nos seguintes temas: Educação a Distância, Informática Educativa e Psicologia da Educação Matemática.

E-mail: aires@virtual.ufc.br

JUSCILEIDE BRAGA DE CASTRO

Doutora em Educação pela Universidade Federal do Ceará. Professora Adjunta da Universidade Federal do Ceará (UFC).

Atuando, principalmente nas áreas de Informática Educativa, Educação Matemática e Didática.

E-mail: juscileide@virtual.ufc.br

MARCILIA CHAGAS BARRETO

Doutora em Educação pela UFC, Pós-doutorado pela Université du Québec a Chicoutimi. Professora da Universidade Estadual do Ceará – UECE.

Atua na área de Educação Matemática com ênfase na formação de professores.

E-mail: marcilia.barreto@uece.br

SINTRIA LABRES LAUTERT

Doutora em Psicologia Cognitiva pela UFPE, com Pós-Doutorado no Poincaré Institute for Mathematics Education – Tutfs University. Professora Associada do Departamento de Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Atua na Pós-Graduação Stricto Sensu em Psicologia Cognitiva e na Graduação em Psicologia. É coordenadora do grupo de trabalho Psicologia da Educação Matemática da Associação Nacional de Pós-graduação em Psicologia (ANPEPP) e vice-coordenadora do grupo de trabalho Processos cognitivos e linguísticos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

E-mail: sintrialautert@gmail.com

PARTICIPANTES DA REDE E-MULT

O E-Mult foi idealizado inicialmente pela Dra Sandra Magina, a ela todo nosso agradecimento. E, várias foram as mãos que construíram e desenvolveram essa Rede. Gratidão é palavra para todos que se dedicaram no planejamento e implementação da pesquisa, para simbolizar essa gratidão deixamos o nome de cada um gravado neste livro.

Professores da Educação Básica

Alda Nara Ferreira de Alencar – Centro Integrado Cristo Redentor

Alexis Martins Teixeira – IFBA

Ana Carla Amâncio Machado Dias - Escola de Tempo Integral Filgueiras Lima

Antonia Neta Torres Costa - EMEIEF Antônio Julião Neto

Lucivânia da Silva Costa Ribeiro – Centro Integrado Cristo Redentor

Maria Benevides dos Santos – Escola Municipal Guilhermina Cabral

Maria Rita Lima Santos de Almeida – Centro Educativo Fé e Alegria

Silvana Lopes da Silva Santos – Escola Municipal Guilhermina Cabral

Simone Soares De Moraes - EMEIF Monteiro Lobato

Estudantes de Graduação

Alice Zenyanne Moreira dos Santos - UECE

Ariedja de Carvalho Silva – UFPE

Brena Rabelo dos Santos – UECE

Catarina Maria de Melo Linhares – UFPE

Claire Souza da Costa Marques – UESC

Clarissa Távora Tavares Cavalcante Viana – UFPE

Dacymere da Silva Gadelha – UFPE

Daniela Brayner de Farias Xavier – UFPE

Danielle Sobral Maciel – UFPE

Danilo do Carmo de Souza – UECE

Dara Catarina Santos da Silva – UFPE

Débora Silva dos Santos – UFPE

Deborah Monte Medeiros – UFC

Fabiane Santana da Silva – UESC

Farildes da Silva de Souza – UESC

Francisca Wellingda Leal da Silva – UECE

Gerlândia Santos Silva – UFC

Gleiciane Ferreira Farias – UECE

Hanna Gisellia Nogueira Antunes - UECE

Hosana de Fátima Melo da Silva – UECE

Jacilma Barata de Lima – UESC

Joyce Maria dos Santos – UFPE

Layane Carolinne de Lima Santos – UFPE

Maria Silvânia Marques Xavier de Souza - UFC

Maria Eduarda Chaves de Mendonça Galvão – UFPE

Maritza Maria Lima de Almeida Souza – UESC

Mônica de Moraes Oliveira – UFPE

Nássara Maia Cabral Cardoso Gomes – UECE

Nerivaldo Honorato da Cruz Santos – UESC

Paulo César da Silva Batista – UECE

Priscila Alves de Paula Belo – UECE

Sarah Rayssa Silva de Azevedo – UFPE

Thaynara Dias Martins – UECE

Taynan Vitória Lima de Castro – UECE

Valeria Conceição dos Santos – UESC

Estudantes de pós-graduação

Alexis Martins Teixeira – UESC

Ana Carla Amâncio Machado Dias – UECE

Anna Bárbara Barros Leite – UFPE

Antônio Cézar Teixeira – UESC

Caio Fábio dos Santos Oliveira – UESC

Camila Xavier Dias Souza Sena – UESC

Clara Raissa Fernandes de Melo – UFPE

Débora Cabral Lima – UESC

Dennys Leite Maia – UFC

Eliziane Rocha Castro – UECE

Elys Vânny Fernanda Rodrigues de Oliveira - UECE

Emanuella Figueira Pereira – UESC

Emília Isabel Rabelo Souza – UESC

Jaqueline Santana de Souza Santos – UESC

Joserlene Lima Pinheiro - UECE

Larissa Elfisia de Lima Santana – UFPE

Leidy Johana Peralta Marín – UFPE

Lemerton Matos Nogueira – UESC

Luana Cerqueira de Almeida – UESC

Mariana Oliveira Santos – UESC

Pedro Henrique Milagre – UESC

Taianá Silva Pinheiro – UESC

Jaqueline Santana de Souza Santos – UESC

Rayssa Melo de Oliveira – UECE

Rodrigo Lacerda de Carvalho – UFC

Silene Cerdeira Silvino da Silva - UECE

Silvana Holanda da Silva – UECE

Tamiles da Silva Oliveira – UESC

Pesquisadores

Alex Alexandre Alves – IFBA

Alina Galvão Spinillo – UFPE

Antônio Luiz de Oliveira Barreto – UECE

Aparecido dos Santos – UNINOVE

Claudia Roberta Araújo Gomes – UFRPE

Diná da Silva Correia – UESC

Ernani Martins dos Santos – UPE

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana – UESC

Irene Mauricío Cazorla – UESC

José Aires de Castro Filho – UFC

Juscileide Braga de Castro – UFC

Juliana Ferreira Gomes da Silva – UFAL

Marcilia Chagas Barreto - UECE

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba – UFPE

Sandra Maria Pinto Magina – UESC

Sintria Labres Lautert – UFPE

Vera Lúcia Merlini – UESC

Coordenadores

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana – responsável pela coordenação Geral e pelo Núcleo Ilhéus

José Aires de Castro Filho – responsável pela coordenação do Núcleo Fortaleza

Sintria Labres Lautert – responsável pela coordenação do Núcleo Recife

Primeira edição impressa em 2017

ISBN: 978-85-8151-151-1