

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2024

Eletrodinâmica Clássica

26/02/2024 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE LAPLACE NA ELETROSTÁTICA

Considere uma esfera maciça de raio R , com centro na origem e no vácuo. A esfera é feita de material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, de permissividade elétrica ϵ . Não há cargas livres em todo o espaço, isto é, as densidades de cargas livres no interior da esfera e na sua superfície valem, respectivamente, $\rho_\ell = 0$ e $\sigma_\ell = 0$.

- (a) (20%) Justifique porque a equação de Laplace para o potencial eletrostático $\Phi(\mathbf{r})$ é válida no interior da esfera.
- (b) (40%) Considere, agora, que a esfera é colocada numa região onde anteriormente havia um campo elétrico uniforme de módulo E_0 ao longo do eixo z , $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$. Calcule o potencial eletrostático Φ dentro e fora da esfera no equilíbrio eletrostático.
- (c) (20%) Calcule o vetor polarização na esfera, \mathbf{P} , e a densidade de cargas de polarização na superfície da esfera, σ_p .
- (d) (20%) Obtenha a carga de polarização total na esfera. Justifique o resultado obtido.

Dados:

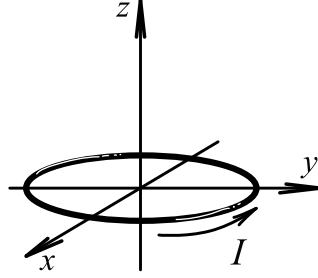
Polinômios de Legendre: $P_{\ell=0}(x) = 1$, $P_{\ell=1}(x) = x$

$$\int_{-1}^1 P_{\ell'}(x) P_{\ell}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'}$$

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \hat{e}_\phi$$

QUESTÃO 2 – MAGNETOSTÁTICA

Considere uma espira circular de raio R , na qual circula uma corrente elétrica constante I . A espira se encontra no plano $z = 0$, com centro na origem, conforme a figura abaixo.



- (a) (40%) Mostre que o campo magnético em um ponto arbitrário $\mathbf{r}_0 = z \hat{z}$ sobre o eixo de simetria é

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \Big|_{\text{eixo } z} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

- (b) (30%) Determine o momento de dipolo magnético, \mathbf{m} , criado pela espira circular.
- (c) (30%) Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a distância do centro da espira até um ponto \mathbf{r} qualquer no espaço. Mostre que, para $r \gg R$, o campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ criado pela espira decai como $|\mathbf{B}| \sim r^{-n}$, e encontre o valor do expoente n .

Dados:

Dada uma densidade de corrente, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, espacialmente localizada, o potencial vetor longe desta distribuição é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

onde $\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$ é o momento de dipolo magnético da distribuição de corrente.

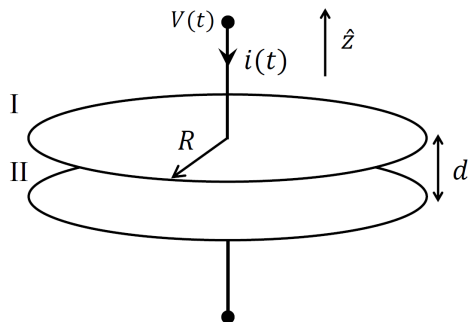
Identidade vetorial útil:

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}$$

QUESTÃO 3 – EQUAÇÕES DE MAXWELL E CORRENTE DE DESLOCAMENTO

- (a) (30%) Demonstre a necessidade da corrente de deslocamento introduzida por Maxwell na lei de Ampère. Use argumentos quantitativos.

A diferença de potencial aplicada aos terminais do capacitor de placas planas circulares e paralelas mostrado na figura abaixo é dada por $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Suponha que $d \ll R$, de modo que efeitos de borda podem ser desprezados.



- (b) (40%) Usando as equações de Maxwell determine os campos elétrico $\mathbf{E}_{II}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}, t)$ na região II, entre as placas, em função do tempo.
- (c) (30%) Determine a densidade superficial de carga, $\sigma(\mathbf{r}, t)$, e a carga acumulada, $Q(t)$, na placa superior. Determine a corrente elétrica, $i(t)$, que flui nos fios condutores.
-

QUESTÃO 4 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A propagação de uma onda monocromática plana, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, em um meio formado por N osciladores harmônicos clássicos por unidade de volume, todos de massa m , frequência de ressonância ω_0 , carga q e constante de amortecimento γ , é descrita pela permissividade elétrica complexa

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} .$$

(a) (40%) A partir das equações de Maxwell em um meio sem cargas livres e com permissividade elétrica $\epsilon(\omega)$, mostre que o campo elétrico é solução da equação de onda com a velocidade de fase dada por $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)}$.

(b) (30%) Mostre que o índice de refração complexo, $\tilde{n}(\omega)$, e a constante dielétrica relativa estão relacionados através de

$$\tilde{n}(\omega) \equiv n_r(\omega) + i\kappa(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)/\epsilon_0} \approx 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} ,$$

sendo que a aproximação é válida no limite de baixas densidades de osciladores. Determine as partes real e imaginária do índice de refração, $n_r(\omega)$ e $\kappa(\omega)$.

(c) (30%) A intensidade $I(z)$ de um feixe de luz propagando ao longo do eixo z , através de um meio absoritivo, é

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} ,$$

onde α é o coeficiente de absorção do meio. Relacione α com a parte imaginária do índice de refração complexo.

Dados: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$