



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2020

Mecânica Quântica

05/03/2020 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – FUNDAMENTOS

Considere uma partícula de spin $1/2$ e momento magnético $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}$, onde \mathbf{S} é o momento angular de spin e γ a razão giromagnética.

(a) (35%) Determine os autovalores e os autovetores normalizados do operador $\hat{O} = A\hat{S}_y + B\hat{S}_z$, onde \hat{S}_y e \hat{S}_z são os operadores de momento angular e A e B são constantes.

(b) (15%) Se a partícula se encontra no estado de maior autovalor do operador \hat{O} , qual é a probabilidade de que uma medição de \hat{S}_z forneça o valor $+\hbar/2$?

Considere que a medição em (b) foi realizada em $t = 0$ e que o autovalor $+\hbar/2$ foi obtido. Logo em seguida a partícula é colocada em uma região de campo magnético constante ao longo da direção x .

(c) (10%) Qual o estado da partícula em $t = 0$, imediatamente após a medição descrita em (b)?

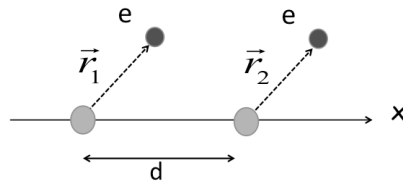
(d) (40%) Determine a probabilidade de encontrarmos a partícula com autovalor de \hat{S}_y igual a $+\hbar/2$ para $t > 0$.

Dados:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

QUESTÃO 2 – OSCILADOR HARMÔNICO, TEORIA DA PERTURBAÇÃO

Podemos modelar a força de van der Waals entre dois átomos considerando que cada átomo consiste de um elétron (carga e e massa m) ligado a um núcleo de massa infinita por um potencial $V(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$, com ω sendo a frequência de oscilação e $i = 1, 2$. Admita que os dois núcleos estão separados por uma distância d ao longo do eixo x e que a interação entre eles possa ser aproximada por $V_{12} = \beta \frac{e^2}{d^3} x_1 x_2$, onde β é uma constante (ver figura). Ignore o fato das partículas serem indistinguíveis.



- (a) (25%) Considere inicialmente que cada átomo pode ser tratado isoladamente ($V_{12} = 0$). Neste caso, escreva os autovalores de energia e discuta a degenerescência do estado fundamental e do primeiro estado excitado para cada átomo.
- (b) (25%) Escreva o hamiltoniano de todo o sistema. Para $V_{12} = 0$, escreva a energia e a função de onda do estado fundamental em função de $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.
- (c) (50%) Calcule a primeira correção não nula, para a energia e para a função de onda do sistema, devida ao potencial de interação V_{12} .

Comentário: Este modelo simples nos permite obter a variação na energia com uma dependência inversamente proporcional à sexta potência da distância entre os átomos, em concordância com a teoria de van der Waals.

Dados:

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}}; \quad \psi_1(x) = \langle x|1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} x e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}};$$

$$\langle n|x|m\rangle = 0, \quad \text{for } |n - m| \neq 1;$$

$$\langle n - 1|x|m\rangle = (n\hbar/2m\omega)^{1/2}; \quad \langle n + 1|x|m\rangle = ((n + 1)\hbar/2m\omega)^{1/2}.$$

QUESTÃO 3 – ESTADOS DE DUAS PARTÍCULAS E ADIÇÃO DE MOMENTO ANGULAR

Considere dois núcleons (cada um com spin $1/2$), cujo potencial de interação depende dos graus de liberdade de spin, $V(\mathbf{r}) = V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)$, onde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i = 2\hat{\mathbf{S}}_i/\hbar$ é o operador de Pauli associado ao spin da partícula i ($i = 1, 2$) e $V_1(\mathbf{r})$ e $V_2(\mathbf{r})$ são componentes do potencial de interação.

- (a) (20%) Determine os possíveis autovalores dos estados de spin de duas partículas associados aos operadores $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)^2$ and $\hat{\sigma}_{1,z} + \hat{\sigma}_{2,z}$. Escreva os correspondentes autovetores de base em termos de $|\pm\rangle_1$ and $|\pm\rangle_2$.
- (b) (20%) Identifique quais destes autovetores de base correspondem aos estados singlete e tripleto de duas partículas. Prove que um estado arbitrário $|a\rangle$ de spin de duas partículas pode ser escrito como uma combinação linear $|a\rangle = |s\rangle + |t\rangle$, onde $|s\rangle$ e $|t\rangle$ são vetores dos subespaços dos estados singlete e tripleto, respectivamente.
- (c) (40%) Prove que $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)|t\rangle = |t\rangle$ e $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)|s\rangle = -3|s\rangle$. Verifique que $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)^2 = 3 - 2(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)$.
- (d) (20%) Determine o valor esperado do potencial de interação dos dois núcleons para os estados singlete e tripleto em termos dos valores esperados das componentes $V_1(\mathbf{r})$ e $V_2(\mathbf{r})$.
-

Dados:

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^2|\alpha\rangle_i = 3|\alpha\rangle_i$, $\hat{\sigma}_{i,z}|+\rangle_i = |+\rangle_i$, $\hat{\sigma}_{i,z}|-\rangle_i = -|-\rangle_i$, onde $|\alpha\rangle_i$ é um estado arbitrário da partícula i .

QUESTÃO 4 – TEORIA DE ESPALHAMENTO

O espalhamento em gases frios interagentes pode ser descrito tratando as partículas do gás como esferas macias. O potencial de uma esfera macia $gV(\mathbf{r})$ é especificado pela constante de acoplamento g e pela função $V(\mathbf{r}) = \theta(r_0 - r)$, onde $r = |\mathbf{r}|$ e r_0 o alcance da interação.

(a) (10%) Escreva a equação de Schrödinger para a função de onda $u(\mathbf{r})$ de uma partícula sujeita ao potencial $gV(\mathbf{r})$. Considere a partícula incidente descrita por uma onda plana com o momento $\hbar\mathbf{k}$, satisfazendo a condição de contorno $u(\mathbf{r}) \rightarrow u_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ para $r \rightarrow \infty$.

(b) (20%) Demonstre que a equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + g \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') u(\mathbf{r}'),$$

onde $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é a função de Green da equação de Helmholtz.

(c) (40%) Uma solução aproximada para a equação integral acima, quando $g \rightarrow 0$, é obtida através da série de Born. Demonstre que a primeira aproximação de Born produz

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + g \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}').$$

Obtenha a expressão geral para a amplitude de espalhamento na primeira aproximação de Born.

(d) (30%) Calcule a amplitude de espalhamento (na primeira aproximação de Born) correspondente ao potencial da esfera macia e demonstre que ela se anula no limite $k \rightarrow \infty$.

Dados:

$$\theta(r_0 - r) = \begin{cases} 1 & r_0 \geq r \\ 0 & r_0 < r \end{cases}$$

$$\nabla_r^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$