



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Primeiro Semestre de 2020

Mecânica Clássica

09/03/2020 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Considere a função de Lagrange $\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)]$ e defina o campo de Euler-Lagrange $\varepsilon = (\varepsilon_x, \varepsilon_y)$, onde

$$\varepsilon_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}.$$

Considere a transformação para coordenadas polares $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

(a) (30%) Escreva \mathcal{L} em coordenadas polares.

(b) (40%) Obtenha o campo de Euler-Lagrange em coordenadas polares $\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)$ e mostre que

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{pmatrix}.$$

(c) (30%) Escreva dx e dy em termos de dr e $d\theta$ e mostre que $\varepsilon_x dx + \varepsilon_y dy = \varepsilon_r dr + \varepsilon_\theta d\theta$.

Usando este resultado, escreva a equação de Euler-Lagrange nos dois sistemas de coordenadas e interprete o procedimento.

QUESTÃO 2 – POTENCIAL CENTRAL

Considere uma partícula de massa m que se move em um plano horizontal entre duas paredes que formam um ângulo agudo e que são perfeitamente refletoras, ou seja o módulo da velocidade da partícula não muda nas reflexões e os ângulos de incidência e reflexão são iguais. A partícula está submetida a um potencial atrativo central dado por $U(r) = -a/r^4$, onde $a > 0$ é uma constante e r é a distância ao ponto P de interseção das paredes, que é a origem do sistema de coordenadas. Admita que o momento angular da partícula é constante e que a partícula parte da posição $\vec{r} = (R, 0)$ com uma velocidade $\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{2}}(-1, 1)$. (*Sugestão: Note que o único efeito das paredes refletoras é confinar o movimento da partícula entre elas*).

- (a) (20%) Faça um esboço da forma do potencial efetivo.
- (b) (40%) Obtenha a distância r_0 entre a partícula e a origem (ponto P) para a qual o potencial efetivo é máximo e determine seu valor U_0 em termos de m , R , v e a .
- (c) (40%) Determine para que valores de R e da energia total, E , a partícula fica ligada ou é refletida e escapa para o infinito.

Dados:

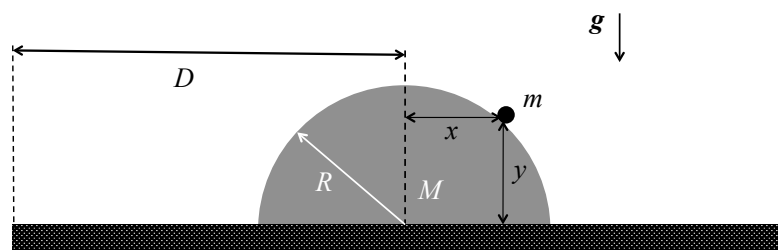
Em coordenadas polares (r, θ) : $|\vec{v}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

QUESTÃO 3 – FORMALISMO LAGRANGIANO: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Um partícula de massa m é liberada a partir do repouso do topo de um corpo semi-cilíndrico, com massa M e raio R , que se encontra inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. A partícula pode se deslocar livremente sobre a superfície cilíndrica pela ação da gravidade atuando ao longo da direção vertical, conforme indicado na figura abaixo. Na figura são mostradas as coordenadas generalizadas (D, x, y) determinando as posições de cada uma das massas.



- (a) (20%) Isole cada uma das massas e identifique todas as forças que atuam sobre elas. A partir das leis de Newton, obtenha as equações de movimento para cada uma das massas. Identifique as grandezas físicas que são conservadas durante o movimento e justifique fisicamente.
- (b) (30%) Obtenha a lagrangiana deste sistema em função das coordenadas generalizadas, isto é, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D, x, y; \dot{D}, \dot{x}, \dot{y})$.
- (c) (30%) Identifique a equação de vínculo e introduza o multiplicador de Lagrange, λ , para obter as equações de Euler-Lagrange. Qual o significado físico do multiplicador de Lagrange neste problema? Justifique.
- (d) (20%) Considere agora o caso limite em que $M \gg m$. Determine a posição y em que a partícula perde contato com a superfície cilíndrica.
-

QUESTÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS E TEORIA DE HAMILTON-JACOBI

Um sistema com apenas um grau de liberdade é descrito pela hamiltoniana

$$H = H(q, p) = ap^2 + bq,$$

com a e b constantes.

- (a) (30%) Considere a transformação canônica $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ com função geratriz do tipo $F = F(p, P)$. Determine a função geratriz de modo que a nova hamiltoniana seja dada por $K(Q, P) = P$ e obtenha as novas coordenadas canônicas em termos das coordenadas antigas.
- (b) (30%) Resolva as equações de movimento para as coordenadas transformadas (Q, P) e a partir desta solução obtenha uma expressão para $q(t)$, sabendo-se que as condições iniciais são dadas por $q(0) = q_0$ e $p(0) = p_0$.
- (c) (20%) A teoria de Hamilton-Jacobi pode ser entendida como uma transformação canônica gerada por uma função geratriz apropriada $S(q, P, t)$. Escreva a equação de Hamilto-Jacobi para este problema.
- (d) (20%) Argumente, de forma qualitativa, como a partir da equação de Hamilton-Jacobi e das constantes de integração associadas podemos obter a mesma solução anterior para $q(t)$.

Dados:

$$dF_1(q, Q, t) = \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt$$

$$dF_2(q, P, t) = \sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (K - H)dt$$

$$dF_3(p, Q, t) = \sum_i (-q_i dp_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt$$

$$dF_4(p, P, t) = \sum_i (-q_i dp_i + Q_i dP_i) + (K - H)dt$$
