

**Renato José de Sobral Cintra**

**Aproximação Espectral e Construção de Wavelets com Aplicações em  
Eletrogastrografia**

**Recife**

**2005**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**APROXIMAÇÃO ESPECTRAL E  
CONSTRUÇÃO DE WAVELETS COM  
APLICAÇÕES EM ELETROGASTROGRAFIA**

por

**RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da  
Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de  
Doutor em Engenharia Elétrica

**ORIENTADOR: HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, Docteur**

**CO-ORIENTADOR: MARTIN PAVLOV MINTCHEV, Ph.D.**

Recife, fevereiro de 2005.

© Renato José de Sobral Cintra, 2005

Cintra, Renato José de Sobral

Aproximação espectral e construção de wavelets com aplicações em eletrogastrografia / Renato José de Sobral Cintra. – Recife : O Autor, 2005. xxiv, 192 folhas: il., fig., tab., gráf., fotos.

Tese (doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Elétrica, 2005.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Engenharia Elétrica — Processamento digital de sinais. 2. Algoritmos — Análise espectral — Métodos de aproximação. 3. Wavelets — Construção de wavelets — Wavelet “casada”. 4. Eletrogastrografia — Wavelet ótima — Análise quantitativa — Desacoplamento elétrico gástrico. I. Título.

621.391

CDU (2.ed.)

UFPE

621.38223

CDD (22.ed.)

BC2001-060



Universidade Federal de Pernambuco  
*Pós-Graduação em Engenharia Elétrica*

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE DOUTORADO

# RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA

TÍTULO

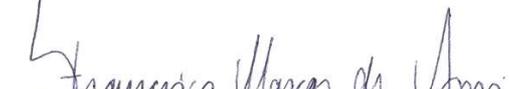
**“APROXIMAÇÃO ESPECTRAL E CONSTRUÇÃO DE WAVELETS COM  
APLICAÇÕES EM ELETROGASTROGRAFIA”**

A comissão examinadora composta pelos professores: HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, DES/UFPE, RICARDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE, FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE, FRANCISCO MARCOS DE ASSIS, DEE/UFCG e RUBEM CARLOS DE ARAÚJO GUEDES, DN/UFPE sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA APROVADO.**

Recife, 18 de fevereiro de 2005.

  
JOAQUIM FERREIRA MARTINS FILHO  
Coordenador do PPGEE

  
HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA  
Orientador e Membro Titular Interno

  
FRANCISCO MARCOS DE ASSIS  
Membro Titular Externo

  
RICARDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA  
Membro Titular Interno

  
RUBEM CARLOS DE ARAÚJO GUEDES  
Membro Titular Externo

  
FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE  
SOUZA  
Membro Titular Interno



## A Deus

(Minha vida é uma seqüência  
de eventos de probabilidade  $p \rightarrow 0$ .  
Só posso explicá-la com a intervenção dEle.)

e

a meus pais.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço àqueles que sempre me motivaram: Prof. Caitano de Oliveira Cintra e Sônia Maria de Sobral Cintra, meus pais. Sempre interessado e aberto à conversa, papai foi meu “orientador” de todos os dias. Sempre com a dica certa, na hora certa. Endereço-lhe meu mais profundo respeito e a certeza de que ele “já esqueceu muito mais sobre estes assuntos do que eu jamais aprenderei”. Mamãe é “minha santa”. Sempre me apoiando e dizendo “sim” (que mais poderia pedir?).

Sou imensamente grato ao Prof. Dr. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur, pela exemplar orientação. Nesses anos de trabalho conjunto, sob seus conselhos, fui positivamente influenciado e muito aprendi sobre ciência, pesquisa científica e liberdade de pensamento.

A co-orientação do Prof. Dr. Martin Pavlov Mintchev (Мартин Павлов Минчев), Ph.D., *University of Calgary*, complementou áreas em que eu não havia explorado. Aprendi que logística é fundamental e que “*the devil is not that black*”.

Agradeço ao Prof. Dr. Ricardo Campello de Souza, Ph.D., por sempre me confiar desafios.

Ao Prof. Dr. Cecilio Lins Pimentel, Ph.D., agradeço pelas conversações sobre cadeias de Markov e pelo apoio que sempre demonstrou.

O Prof. Dr. Vassil Simeonov Dimitrov (Васил Симеонов Димитров), Ph.D., recebeu-me de maneira ímpar durante meu estágio na *University of Calgary*, Canadá. Sempre foi uma grande satisfação ir a seu gabinete para conversar sobre a Matemática, ser apresentado a seus trabalhos e lhe falar sobre Recife. Agradeço-lhe pela confiança que demonstrou e continua demonstrando.

No Departamento de Matemática, UFPE, lugar que sempre me atraiu, tive alguns apoios. Sempre me recebendo com boa vontade, o Prof. Dr. Paulo Santiago, D.Sc., possibilitou-me utilizar os recursos computacionais do seu departamento para a solução numérica de algumas equações de Mathieu. Prof. Dr. Sérgio Santa Cruz, Ph.D., talvez nem saiba, me ajudou com um par de “conversas de corredor”. Mesmo sem saber de imediato a resposta para meu questionamento, fez-me fazer a pergunta certa.

Agradeço ao Prof. Dr. Fernando Menezes Campello de Souza, Ph.D, pelas excelentes horas conversando sobre Matemática e por ter me proposto resolver produtivas listas de exercícios, quando fui seu aluno de Probabilidade.

Os colegas de trabalho do *Low-Frequency Instrumentation Laboratory*, Universidade de Calgary, foram amigos constantes: Sr. Iljan Vladimirov Tchervensky (Илиян Владимиров Червенски), Sr. Charles Newton-Price, Sr. Ehsan Jalilian, Sr. Yves Pauchard, M.Sc. (boas conversas sobre  $\LaTeX$  e ciência), Sr. Denis Owen, M.Sc., Sr. Jose Gonzalez, Sr. Ray Jui e Sr. Georgio Gattiker.

Faço meu registro ao Prof. Emérito Dr. Irving S. Reed, Ph.D., *University of Southern California*, por ter gentilmente me enviando uma cópia da tese de doutorado de Chin-Chin Hsu, um de seus alunos. Bem como ter me presenteado com (i) um exemplar do seu livro *Error-Control Coding for Data Networks* e (ii) *preprints* de seus últimos trabalhos.

Novamente, faço meu tributo ao Dr. Donald Knuth, Ph.D. e ao Dr. Leslie Lamport, Ph.D., por nos terem dado o  $\TeX$  e o  $\LaTeX$ .

Ao meu irmão Henrique José de Sobral Cintra, tenho a agradecer. Sem dúvida o mais brilhante dos “de Sobral Cintra”, ensinou-me algumas coisas importantes, ele saberá do que se trata.

Agradeço também a minha esposa Catarina. Sem ela, eu não teria conseguido.

RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA

*Universidade Federal de Pernambuco*

*18 de fevereiro de 2005*

Resumo da Tese apresentada à Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

# **APROXIMAÇÃO ESPECTRAL E CONSTRUÇÃO DE WAVELETS COM APLICAÇÕES EM ELETROGASTROGRAFIA**

**Renato José de Sobral Cintra**

fevereiro/2005

Orientador: Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur

Co-orientador: Martin Pavlov Mintchev, Ph.D.

Área de Concentração: Comunicações

Palavras-chaves: Aproximação espectral, algoritmos aproximados, transformadas aritméticas, construção de wavelets, eletrogastrografia, atividade elétrica gástrica

Número de páginas: xxiv+192

Análise de Sinais é uma das partes mais importantes da área de Processamento de Sinais. Esta tese encontra-se dividida em três partes, cada uma abordando um tópico de análise de sinais. Foram endereçadas as seguintes subáreas: (i) métodos aproximados para avaliação espectral; (ii) construção de wavelets e (iii) análise de sinais biomédicos.

O problema da estimação espectral sujeita à minimização da complexidade computacional foi abordado por meios de métodos de aproximação. Dois métodos foram utilizados para propor algoritmos eficientes para a transformada discreta de Hartley. O primeiro método introduzido consiste da transformada de Hartley arredondada, um procedimento que utiliza a função de arredondamento para gerar uma matriz de transformação com complexidade multiplicativa nula. A segunda abordagem contempla a proposição da transformada aritmética de Hartley. É demonstrado o papel da interpolação como elemento decisivo na teoria das transformadas aritméticas. Esquemas de interpolação para as transformadas de Hartley, Fourier cosseno e Fourier seno são introduzidos.

O foco foi então dirigido para a construção de novas wavelets. Dois procedimentos foram examinados: (i) definição de novas wavelets a partir de equações diferenciais e (ii) construção de wavelets ótimas associadas a uma dada classe de sinais. Da primeira abordagem, foram obtidas duas wavelets propostas nesta tese: a wavelet de Mathieu (baseada nas funções de Mathieu) e a wavelet de Chebyshev (baseada nos polinômios de Chebyshev). Foram examinadas as propriedades de tais wavelets e evidenciadas potenciais aplicações. O segundo método consistiu da proposição de um algoritmo para determinar wavelets ótimas para sinais eletrogastrográficos. Para tal, foram utilizados argumentos de minimização do erro de reconstrução de sinais compactados via wavelet.

Na parte final, foi elaborado um algoritmo para classificação de sinais eletrogastrográficos. Foi objetivada a discriminação entre estados de desacoplamento elétrico gástrico e o estado basal.

Abstract of Thesis presented to the Federal University of Pernambuco as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Electrical Engineering.

# **SPECTRUM APPROXIMATION AND WAVELET DESIGN WITH APPLICATIONS IN ELECTROGASTROGRAPHY**

**Renato José de Sobral Cintra**

february/2005

Supervisors: Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur; Martin Pavlov Mintchev, Ph.D.

Area of Concentration: Communications

Keywords: Spectrum approximation, approximate algorithms, arithmetic transforms, wavelet design, electrogastrography, gastric electrical activity

Number of pages: xxiv+192

Signal analysis is one of the most important areas of Signal Processing. This thesis is divided in three parts, each one addressing a specific topic of signal analysis. The sub-areas were: (i) approximate methods for spectrum evaluation; (ii) wavelet design; and (iii) biomedical signal analysis.

The problem of spectrum estimation under constraints of minimal computational complexity was addressed by means of approximation methods. The first proposed procedure was the Rounded Hartley transform, which utilizes the round-off function to generate a transformation matrix of null multiplicative complexity. The second introduced method was the arithmetic Hartley transform. The major role of interpolation in arithmetic transform theory was demonstrated. Moreover, interpolation schemes for Hartley, Fourier cosine and Fourier sine transform were suggested.

The emphasis was then directed to wavelet design. Two new approaches were examined: (i) designing new wavelets from differential equations; and (ii) designing matched optimal wavelets for a given class of signals. The first methodology furnished the definition of two new wavelets: the Mathieu wavelets (based on Mathieu functions) and the Chebyshev wavelets (based on Chebyshev polynomials). The properties of such wavelets were quantitatively investigated and potential applications were suggested. The second approach consisted of an algorithm for the determination of optimal wavelets to analyze electrogastrographic (EGG) signals. Arguments of error minimization of reconstructed compressed signals were invoked to determine optimal wavelet parameters.

In the final part, an algorithm for the classification of EGG signals was formulated. It was sought the discrimination between gastric electrical uncoupling and basal groups.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xviii</b>
<b>Introdução</b>	<b>xx</b>
<b>I Avaliação Espectral Aproximada</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1 Complexidade Aritmética</b>	<b>2</b>
1.1 Transformadas Discretas e Suas Complexidades . . . . .	2
1.2 Complexidade Multiplicativa e Aditiva . . . . .	7
1.3 Cálculo Aproximado . . . . .	10
<b>Capítulo 2 A Transformada de Hartley Arredondada</b>	<b>13</b>
2.1 Transformada Arredondada de Hartley . . . . .	14
2.2 Inversão Aproximada . . . . .	16
2.2.1 Uma Inversa Aproximada para a Matriz de Hartley Arredondada . . . . .	17
2.2.2 Observações . . . . .	21
2.3 Algoritmo Rápido para a Transformada Arredondada de Hartley . . . . .	22
2.4 Transformada de Hartley Arredondada Bidimensional . . . . .	24
2.5 Conexão com as Transformadas de Fourier e de Hadamard-Walsh . . . . .	30
2.5.1 Transformada Discreta de Fourier . . . . .	30
2.5.2 Transformada de Hadamard-Walsh . . . . .	30

2.6	Conclusões . . . . .	32
<b>Capítulo 3 A Transformada Aritmética de Hartley</b>		<b>33</b>
3.1	Perspectiva Histórica: Visão Geral sobre a Teoria . . . . .	33
3.2	A Transformada Aritmética de Fourier . . . . .	36
3.2.1	Algoritmo de Tufts-Sadasiv . . . . .	39
3.2.2	Algoritmo de Reed-Tufts . . . . .	41
3.2.3	Algoritmo de Reed-Shih (AFT Simplificada) . . . . .	44
3.2.4	Um Exemplo . . . . .	46
3.3	Uma Nova Transformada Aritmética . . . . .	48
3.3.1	Transformada Aritmética de Hartley . . . . .	49
3.3.2	Interpolação . . . . .	52
3.4	Conclusões . . . . .	59
<b>Capítulo 4 Autofunções de Transformadas Integrais</b>		<b>61</b>
4.1	Pontos Fixos de uma Transformada . . . . .	61
4.1.1	Pontos Fixos da Transformada de Fourier . . . . .	62
4.1.2	Pontos Fixos da Transformada de Hartley . . . . .	66
4.1.3	Pontos Fixos da Transformada de Fourier Cosseno e de Fourier Seno . . . . .	71
4.1.4	Pontos Fixos da Transformada de Hankel . . . . .	74
4.2	Expansão em Autofunções . . . . .	75
4.3	Perspectivas . . . . .	78
<b>II Análise Multiresolução</b>		<b>79</b>
<b>Capítulo 5 Análise de Sinais por Wavelets</b>		<b>80</b>
5.1	Incerteza no Plano Tempo-Frequência . . . . .	80
5.2	Wavelets . . . . .	86
5.2.1	Série de Wavelet . . . . .	88
5.2.2	Transformada Discreta de Wavelet . . . . .	89
5.2.3	Multiresolução . . . . .	89
5.3	Definindo Novas Wavelets . . . . .	91
<b>Capítulo 6 Wavelets de Mathieu</b>		<b>93</b>
6.1	Introdução . . . . .	93

6.2	Comentários Gerais sobre as Equações de Mathieu . . . . .	94
6.3	Wavelets de Mathieu . . . . .	96
6.3.1	Relações entre Wavelet e Função de Escala . . . . .	96
6.3.2	Filtros de Mathieu . . . . .	97
6.4	Resultados . . . . .	100
6.5	Observações Finais . . . . .	101
<b>Capítulo 7 Wavelets de Chebyshev</b>		<b>103</b>
7.1	Introdução . . . . .	103
7.2	Wavelets de Chebyshev . . . . .	105
7.2.1	Filtros de Chebyshev de Primeira Espécie . . . . .	105
7.2.2	Wavelets de Chebyshev de Segunda Espécie . . . . .	110
7.2.3	Implementando as Wavelets de Chebyshev . . . . .	116
7.3	Comentários Finais . . . . .	116
<b>III Uma Aplicação em Engenharia Biomédica: Eletrogastrografia</b>		<b>120</b>
<b>Capítulo 8 Eletrogastrografia</b>		<b>121</b>
8.1	Anatomia do Estômago . . . . .	121
8.2	Atividade Mioelétrica . . . . .	123
8.3	Eletrogastrografia . . . . .	124
8.4	Estado da Arte . . . . .	126
<b>Capítulo 9 Wavelet Ótima para Eletrogastrografia</b>		<b>128</b>
9.1	Introdução e Motivação . . . . .	128
9.2	Métodos . . . . .	129
9.2.1	Preparação Experimental . . . . .	129
9.2.2	Análise de Sinais . . . . .	131
9.2.3	Escolha dos Parâmetros . . . . .	135
9.3	Resultados . . . . .	140
9.3.1	Determinação dos Parâmetros . . . . .	140
9.4	Conclusão . . . . .	141
<b>Capítulo 10 Análise de Eletrogastrogramas via Wavelet</b>		<b>142</b>
10.1	Introdução e Motivação . . . . .	142

10.2 Métodos . . . . .	144
10.2.1 Preparação Experimental . . . . .	144
10.2.2 Análise de Sinais . . . . .	145
10.2.3 Análise Estatística . . . . .	145
10.2.4 Escolha dos Parâmetros . . . . .	146
10.3 Resultados . . . . .	147
10.3.1 Determinação da Taxa de Compressão . . . . .	147
10.3.2 Análise Estatística . . . . .	148
10.4 Discussão . . . . .	148
10.5 Conclusão . . . . .	150
<b>Capítulo 11 Conclusões Gerais</b>	<b>151</b>
<b>Apêndice A Lista de Publicações</b>	<b>154</b>
<b>Apêndice B Notação</b>	<b>157</b>
<b>Apêndice C Bibliografia Anotada sobre a Transformada Aritmética</b>	<b>159</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>172</b>
<b>O Autor</b>	<b>188</b>
<b>Índice</b>	<b>189</b>

# Lista de Figuras

1.1	A curva cheia denota a complexidade computacional do cálculo da DFT pela definição. A curva em pontilhado mostra esta mesma complexidade quando se utiliza a FFT (Gauss-Cooley-Tukey). . . . .	7
1.2	Diagrama localizando alguns algoritmos. Os métodos marcados por (*) são originais e propostos nesta tese. . . . .	12
2.1	Funções $\text{cas}(x)$ (linha cheia) e $[\text{cas}(x)]$ (linha tracejada), para $x \in [-\pi, \pi]$ . . . . .	15
2.2	Um exemplo da RHT. . . . .	16
2.3	Padrões obtidos pela matriz de Hartley aproximada para ordens $n = 16, 64, 256, 1024$ . Cada matriz $\mathbb{H}$ foi convertida em diagramas de intensidade representando cada elemento por um tom em escala de cinza (branco representa 1, cinza representa 0 e preto representa $-1$ ). . . . .	16
2.4	Conceito de inversão aproximada. . . . .	18
2.5	Norma- $n$ de $(\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n)$ para $n = 2, 3, \dots, 1024$ . . . . .	19
2.6	Padrões da Matriz $\mathbb{H}_n^2$ . . . . .	20
2.7	Algoritmo Rápido para RHT. . . . .	24
2.8	Transformação de Hartley arredondada: Imagens Afins. . . . .	27
2.9	Transformação de Hartley aproximada: Imagens Militares. . . . .	28
2.10	Elaine e Lena. . . . .	29
3.1	Alguns pesquisadores importantes na história dos algoritmos da transformada aritmética. . . . .	36
3.2	Diagrama para o cálculo da AHT para $N = 8$ . As caixas fornecem as médias $k$ -ésimas, seguidas de uma série de simples escalonamentos. Ao fim, um arranjo para se levar em conta a função de Möbius. . . . .	51
3.3	Funções peso de Hartley utilizadas para interpolar $v_{10,1}$ e $v_{10,5}$ (transformada de comprimento $N = 32$ ). . . . .	55

3.4	(a) Função peso para o núcleo de Fourier cosseno. Observe que cada curva vale essencialmente zero, exceto em $i \approx r$ e $i \approx N - r$ . (b) Função peso para o núcleo de Hartley. . . . .	56
3.5	Comparação entre os espectros discretos de Hartley calculados pela DHT (linha cheia) e pela AHT (linha pontilhada). A função utilizada foi $f(t) = \cos(90\pi t) \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ , $t = 0 \dots 1$ , $N = 32$ . . . . .	59
5.1	Base de Gabor contínua para várias frequências e janela gaussiana. A linha cheia (tracejada) corresponde à parte real (imaginária) da base de Gabor. . . . .	82
5.2	Reticulado de Heisenberg para um janelamento particular. . . . .	83
5.3	Discretização do plano tempo-frequência pela transformada de Fourier de tempo curto para diversas janelas. . . . .	84
5.4	Wavelet típica: wavelet de Morlet. . . . .	86
5.5	Possível representação do plano tempo-frequência induzido pela análise via wavelets. . . . .	87
5.6	Cascata de filtros: Algoritmo rápido para a transformada de wavelet. Os coeficientes são computados recursivamente, através de uma iteração dos filtros de escala e de wavelet. (a) Estrutura de decomposição e (b) estrutura de reconstrução. . . . .	91
6.1	Algumas curvas de funções de Mathieu par de primeira espécie e período $2\pi$ . Estes cossenos elípticos foram calculados para os seguintes parâmetros: (a) $\nu = 1$ e $q = 5$ , (b) $\nu = 5$ e $q = 5$ . . . . .	96
6.2	Magnitude da função de transferência dos filtros de Mathieu para construção de wavelets: filtro de aproximação $ H_\nu(\omega) $ (linha fina) e filtro de detalhe $ G_\nu(\omega) $ (linha cheia). Estes filtros foram encontrados para os seguintes parâmetros: (a) $\nu = 3$ , $q = 3$ , $a = 9,916$ ; (b) $\nu = 5$ , $q = 15$ , $a = 31,958$ . . . . .	100
6.3	Wavelets de Mathieu geradas através de filtros em aproximação tipo FIR submetidos ao algoritmo cascata após 2, 4 e 6 iterações $k$ . (a)–(c) Wavelet de Mathieu para $\nu = 3$ e $q = 3$ . (d)–(e) Wavelet de Mathieu para $\nu = 5$ e $q = 15$ . . . . .	101
7.1	Gráficos de $ T_m(\cos(\omega/2)) $ , para $m = 3, 5$ , $\omega \in [0, \pi]$ . . . . .	106
7.2	Formas de onda geradas pelo algoritmo cascata quando filtros de Chebyshev de primeira espécie de ordem três são utilizados. São mostrados os resultados para as iterações 1 (a), 2 (b), 3 (c) e 4 (c) do algoritmo. . . . .	110
7.3	Gráficos de $\frac{1}{m+1} U_m(\cos(\omega/2)) $ , para $m = 5, 7$ , $\omega \in [0, \pi]$ . . . . .	112

7.4	Wavelets de Chebyshev de segunda espécie: resultados após 2, 3 e 4 iterações, da esquerda para direita. As curvas (a)–(c) são para $m = 5$ e as curvas (d)–(f), para $m = 7$ .	115
7.5	Um exemplo do uso da decomposição em escala utilizando a wavelet de Chebyshev de quinta ordem: análise da função degrau. . . . .	117
7.6	(a) Análise de um sinal com perturbação em frequência (decomposição de 3 níveis), (b) Remoção de ruído de um sinal-teste de MATLAB <sup>TM</sup> noisbump através da wavelet de Chebyshev de segunda espécie para $m = 3$ . . . . .	118
8.1	Anatomia macroscópica do estômago. . . . .	122
8.2	Atividade mioelétrica gástrica. . . . .	124
8.3	Posicionamento de eletrodos para leituras eletrogastrográficas neste trabalho. . . . .	125
9.1	Posicionamento dos eletrodos internos (a) e cutâneos (b). Múltiplas combinações de eletrodos foram utilizadas para os registros da GEA (c) e para a eletrogastrografia (d).	130
9.2	Exemplos de artefatos frequentemente encontrados em aquisições de sinais de EGG: perda de sinal (a), mudança de nível DC e saturação (b), ruído e saturação (c) e perda de sinal por problemas tecnológicos (d). . . . .	131
9.3	Traçados típicos da aquisição multicanal de sinais de EGG em estado basal. Os canais 1–6 correspondem à atividade elétrica gástrica interna. Os canais restantes representam atividade eletrogastrográfica. . . . .	132
9.4	Banco de filtros para análise via wavelets. O sinal é iterativamente decomposto através de um banco de filtros para obter sua transformada discreta de wavelet. . . . .	133
9.5	Um segmento de 2 minutos de duração de um sinal de EGG típico em estado basal (a), decomposto em sinais de aproximação (b) e detalhe (c) após a sexta iteração utilizando o algoritmo cascata de Mallat. A wavelet utilizada nesta análise foi Daubechies-2. . . . .	134
9.6	Plano de parametrização de Pollen (eixos normalizados por $\pi$ ). Os pontos destacados correspondem às seguinte wavelets: Haar (*), Daubechies-2 ( $\times$ ), Daubechies-3 ( $\bullet$ ) e Coiflet-1 ( $\triangle$ ). . . . .	138
9.7	Sinal de teste em onda quadrada com polaridade aleatória. . . . .	139

9.8	Superfície de PRD sobre o plano de parametrização de Pollen resultante do processamento do sinal de teste com taxa de compressão 3. Uma escala de tons de cinza é utilizada para representar os valores de PRD. As regiões mais escuras são os mínimos da superfície e coincidem com as regiões que geram as wavelets de Haar: a diagonal marcada e os pares coordenados $(0.5, -0.5)$ , $(0.5, 0)$ , $(-0.5, 0.5)$ , $(-0.5, 0)$ (indicados por setas). Os eixos estão normalizados por $\pi$ . . . . .	139
9.9	Curva de nível gerada após o cálculo da superfície de PRD para todas as possíveis wavelets do plano de parametrização de Pollen para dois sinais de EGG canino em estado basal. O valor mínimo é denotado por um círculo ( $\circ$ ). Os pontos coordenados que correspondem às wavelets de Haar ( $*$ ), Daubechies-2 ( $\times$ ), Daubechies-3 ( $\bullet$ ) e Coiflet-1 ( $\triangle$ ) são também denotados para fins de comparação. Os eixos estão normalizados por $\pi$ . . . . .	139
9.10	Wavelets ótimas obtidas para sinais de EGG caninos (curva pontilhada) e humanos (curva cheia) para uma taxa de compressão igual a 3. A wavelet de Daubechies-3 (curva fina) é exibida para comparação. A semelhança entre Daubechies-3 e as wavelets ótimas para EGG é nítida. . . . .	140
10.1	Taxa de compressão <i>versus</i> percentagem de canais em que houve sucesso na detecção de desacoplamento elétrico gástrico ( $p < 0.05$ ). Cada curva traz a análise para uma wavelet específica: Daubechies-2 (linha fina), Daubechies-3 (linha cheia) e Coiflet-1 (linha pontilhada). . . . .	148
C.1	Distribuição da literatura sobre a Transformada Aritmética. . . . .	161

# Lista de Tabelas

1.1	Quantidade de pulsos de relógio para algumas instruções aritméticas implementadas no processador Pentium <sup>TM</sup> . . . . .	7
1.2	Complexidade Multiplicativa Mínima . . . . .	9
2.1	PSNR de imagens padronizadas. . . . .	29
2.2	Permutação de Colunas em Binário . . . . .	31
3.1	Amostras necessárias para o cálculo das médias alternantes de Bruns. . . . .	47
4.1	Algumas Funções Não-triviais Invariantes à Transformada de Fourier . . . . .	67
4.2	Funções Invariantes à Transformada de Fourier . . . . .	68
4.3	Algumas Funções Não-triviais Invariantes à Transformada de Hartley . . . . .	72
4.4	Funções Invariantes à Transformada de Hartley . . . . .	73
4.5	Funções Invariantes à Transformada de Hankel . . . . .	76
5.1	Incerteza depende da função de janelamento . . . . .	85
7.1	Resumo das propriedades dos bancos de filtros baseados em filtros de Chebyshev. . . . .	117
9.1	Número de escalas de decomposição $J_0$ para algumas wavelets . . . . .	136
9.2	Valores ótimos de parametrização . . . . .	140
10.1	Comparação estatística entre os valores de PRD do grupo em estado basal e do grupo em desacoplamento elétrico gástrico moderado, para $CR = 3$ . . . . .	148
10.2	Comparação estatística entre os valores de PRD do grupo em estado basal e do grupo em desacoplamento elétrico gástrico severo, para $CR = 3$ . . . . .	149
10.3	Comparação estatística entre os valores de PRD do grupo em desacoplamento elétrico gástrico moderado e do grupo em desacoplamento elétrico gástrico severo, para $CR = 3$ . . . . .	149
C.1	Distribuição dos tópicos da bibliografia. . . . .	159

C.2	Maiores contribuintes em quantidade de artigos publicados na área. . . . .	160
C.3	Os artigos mais citados. . . . .	160

# Introdução

*Thesis est omnis divisa in partes tres.*

PARODIANDO JÚLIO CÉSAR (100 A.C.–44 A.C.) NA FRASE  
“GALLIA EST OMNIS DIVISA IN PARTES TRES.”.

Nesta tese, teve-se a oportunidade de trabalhar com uma diversidade relativamente ampla de tópicos que possibilitaram o estudo de vários problemas relacionados ao tema central: análise de sinais. Devido a esta característica multifacetada e, em certos momentos, multidisciplinar, houve uma certa dificuldade em amalgamar os temas deste trabalho em um texto único. Decidiu-se, então, seccionar o trabalho em três partes. Cada uma das partes visa a ser razoavelmente autocontida, trazendo a motivação do problema a ser atacado e as abordagens propostas.

Desta maneira, este capítulo introdutório é bem breve, deixando a função de “introduzir/motivar” o assunto a cargo do capítulo inicial de cada parte da tese. Apesar disto, é fornecida aqui uma breve visão geral do que cada parte da tese representa e contribui. Uma visão de águia.

## Motivação

O “fio condutor” desta tese é o processamento digital de sinais. Sob este tema maior foram investigados essencialmente três tópicos: (i) análise de sinais clássica sujeita à minimização da complexidade computacional; (ii) análise de sinais em tempo-frequência via wavelets e (iii) processamento de sinais biológicos.

Os frutos destas investigações motivaram pesquisas originais que se constituíram nas contribuições principais desta tese. Foram elas:

1. Investigar e propor algoritmos que tenham baixa complexidade computacional para o cálculo de transformadas trigonométricas definidas no corpo dos números reais, considerando técnicas de aproximação;
2. Propor métodos de projeto de filtros de análise multiresolução e de criação de novas wavelets;

3. Examinar a possibilidade da aplicação de métodos quantitativos de análise tempo-frequência para a análise de sinais elétricos de origem biológica, em particular os sinais elétricos do estômago.

## Organização

Este trabalho encontra-se dividido em três partes:

**Parte I.** Abrange métodos aproximados para análise espectral;

**Parte II.** Traz um procedimento para proposição de wavelets;

**Parte III.** Propõe uma análise de sinais biológicos por wavelets.

As Partes I e II trazem, essencialmente, contribuições teóricas com alguns incursões em aplicações potenciais. Deste modo, a pesquisa utiliza o método científico — hipotético-dedutivo. Na Parte III, mais evidenciadamente, é observada a utilização da prática experimental e validação de hipótese.

**Parte I.** A primeira parte traz proposições de dois métodos para a avaliação aproximada de espectros de frequência. Os esforços foram concentrados na transformada de Hartley.

O Capítulo 2 traz uma investigação sobre o cálculo da transformada discreta de Hartley através de procedimentos de arredondamento de números reais. É introduzida uma abordagem que promove uma significativa redução na complexidade aritmética, resultando em uma estimativa da transformada de Hartley com esforço multiplicativo nulo.

Ainda sobre métodos para o cálculo aproximado de transformadas, é introduzida no Capítulo 3 a Transformada Aritmética de Hartley. Os métodos de transformada aritmética visam o cálculo de transformadas sujeito à minimização do número de multiplicações. A princípio, tal procedimento elimina as multiplicações. O capítulo é aberto com uma revisão sobre o estado da arte, trazendo uma exposição dos métodos mais importantes para o cálculo da transformada aritmética de Fourier. Como contribuição original, obtem-se o desenvolvimento teórico para o cômputo da transformada discreta de Hartley através de métodos aritméticos. É evidenciado, neste trabalho, a importância fundamental que o processo de interpolação desempenha nos métodos aritméticos.

O Capítulo 4 traz um estudo sobre as autofunções de transformadas integrais. Este estudo é proposto como passo inicial para a definição de novos algoritmos aproximados para cálculo de transformadas.

**Part II.** A segunda parte desta tese versa sobre análise multiresolução utilizando wavelets. No Capítulo 5, é feita uma breve revisão dos conceitos fundamentais da análise de sinais via wavelets. Nesta parte, há alguns resultados acerca da dualidade tempo-frequência. Ademais, é proposto um método sistemático para o projeto de wavelets, conectando soluções de equações diferenciais clássicas com banco de filtros para geração de wavelets. Este procedimento proporcionou a definição de uma classe específica de wavelets, com os seguintes representantes:

- Wavelet de Chebyshev;
- Wavelet de Mathieu.

No Capítulo 6, é proposta a wavelet de Mathieu. Associou-se neste caso, a solução da equação diferencial de Mathieu como sendo a resposta do filtro passa-baixa a ser usado no processo iterativo para geração de wavelets.

A wavelet de Chebyshev é gerada a partir de polinômios de Chebyshev. No Capítulo 7, foram examinados os polinômios de Chebyshev de primeira e segunda espécie, demonstrando-se a possibilidade de se gerar novas wavelets a partir das funções de segunda espécie. As propriedades gerais da wavelet proposta foram investigadas, inclusive provando a existência de wavelets baseadas em qualquer polinômio de Chebyshev de 2a. espécie. A conexão entre polinômios de Chebyshev e wavelets induziu a definição de filtros extremamente simples (por exemplo, filtro média móvel), o que, até certo ponto, caracterizou-se como um resultado não-trivial.

É possível mostrar que os polinômios de Chebyshev são na realidade casos particulares de uma classe mais geral de polinômios ortogonais denominados polinômios de Gegenbauer [1]. A publicação “*New Compactly Supported Scaling and Wavelet Functions Derived from Gegenbauer Polynomials*”<sup>1</sup> explora esta generalização, fornecendo uma classe mais ampla de wavelets. Mostra-se também que as wavelets de Chebyshev podem ser geradas via um ajuste de parâmetros da wavelet de Gegenbauer. Trata-se de um resultado com potencial aplicação em detecção de falhas em redes de transmissão [2].

**Parte III.** A parte final da tese constitui-se de resultados de uma aplicação de wavelets no contexto de Engenharia Biomédica. Foi abordado o problema de análise de sinais oriundos da atividade elétrica do estômago. A análise com sucesso de tais sinais — eletrogastrogramas — pode se constituir numa valiosa ferramenta clínica para o diagnóstico de patologias gástricas relacionadas a disfunções da motilidade gástrica.

---

<sup>1</sup>Soares, L. R. and Oliveira, H. M. and de Sobral Cintra, R. J., “*New Compactly Supported Scaling and Wavelet Functions Derived from Gegenbauer Polynomials*”, Proceedings of the IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, Cataratas do Niágara, Canadá, 2004

O Capítulo 8 situa o problema do ponto de vista fisiológico, trazendo, numa visão simplificada, uma revisão da área com os avanços realizados. É fornecida também uma breve descrição da atividade elétrica e seu relacionamento com o comportamento mecânico do estômago. No presente momento, a eletrogastrografia (registro cutâneo da atividade elétrica gástrica) tem seu uso questionado. A razão disto é a dificuldade em se conseguir extrair informações relevantes dos eletrogastrogramas que possam ser conectadas a alguma forma de diagnóstico.

Nessa tese, é feita uma análise por meio de wavelets. Para iniciar este estudo, buscou-se definir um critério de ótimo para encontrar wavelets que sejam adequadas para os sinais gástricos. Este tópico é coberto no Capítulo 9. Propõe-se um método para a construção de wavelets “casadas” (*matched*) com uma classe de sinais a ser analisado.

No Capítulo 10, é proposto um novo método para a análise de sinais eletrogastrográficos. A motivação é de desenvolver um método que possa distinguir um grupo de animais com disfunções em sua motilidade gástrica de um grupo de animais de controle (animais normais). Este seria o passo inicial para validar a hipótese de que é possível detectar patologias gástricas através de eletrogastrogramas. Um resultado neste sentido é tido como um avanço nesta área, pois evidencia que de fato há informação a se extrair do eletrogastrograma, fornecendo subsídios para pesquisas subseqüentes. Para tanto, foram utilizadas ferramentas de análise de sinais, tais como: wavelets, compressão de sinais, avaliação de erro e análise estatística.



## **Parte I**

# **Avaliação Espectral Aproximada**

# Capítulo 1

## Complexidade Aritmética

*“It is the mark of an instructed mind to rest satisfied with the degree of precision which the nature of the subject admits and not to seek exactness when only an approximation of the truth is possible.”*

ATRIBUÍDA A ARISTÓTELES (384 A.C.–322 A.C.)

### 1.1 Transformadas Discretas e Suas Complexidades

De modo geral, as transformadas discretas, quando formuladas pela sua definição, exigem um elevado esforço computacional para serem calculadas. Para esclarecer este conceito, tome-se o seguinte exemplo. A transformada discreta de Fourier (DFT) [3] de comprimento  $N$  tem a seguinte definição:

$$V_k = \sum_{i=0}^{N-1} v_i \exp(-2\pi i k / N), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1.1)$$

$$v_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V_k \exp(2\pi i k / N), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (1.2)$$

em que  $v_i$  são elementos de um vetor  $N$ -dimensional e  $V_k$  são elementos do vetor transformado. Ou seja,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{V}$  formam um par transformada discreta de Fourier. É bem sabido que tal procedimento tem complexidade de  $O(N^2)$ . Isto é, o número de operações necessárias para sua realização é dominado por uma função quadrática em  $N$ . Tal complexidade, torna o procedimento, em muitos casos, proibitivo, haja vista o elevado número de operações e os tempos de máquina exigidos.

O uso de algoritmos rápidos fornecem um meio eficiente de calcular uma transformada. Um algoritmo rápido é uma implementação que busca a redução do tempo gasto na execução de um dado procedimento. Uma maneira de se atingir este objetivo é através da redução no número de operações aritméticas envolvidas. Uma outra interpretação é dada por Richard E. Blahut [4]:

*“By a fast algorithm, we mean a detailed description of a computational procedure that is not the obvious way to compute the required output from input.”*

Quando voltados para o cálculo de transformadas, os algoritmos rápidos são usualmente denominados de transformadas rápidas.

Apesar de não ser o único fator que determina o desempenho de um algoritmo, o número de operações aritméticas é, sem dúvida, o fator mais relevante [5]. Por completicidade, são listados abaixo alguns fatores que contribuem para desempenho de um algoritmo:

**Dimensões.** Em várias aplicações, tais como filtragem de imagens bidimensionais ou soluções de problemas de valor inicial em regiões tridimensionais, é mais adequado que a transformada não ocorra de uma vez só, mas em seqüência. A transformada de uma matriz pode ser feita substituindo cada linha por sua transformada e então calculando a transformada de cada coluna. Pode ser vantajoso também converter sinais unidimensionais em matrizes (mapeamento 1D em 2D) para explorar este procedimento;

**Cálculos Extra.** Em geral, há uma preocupação com a quantidade de operações aritméticas envolvidas. Entretanto, há outras operações que são muitas vezes negligenciadas nas avaliações de desempenho de algoritmos. Algumas destas operações são: permutações e movimentação de dados, deslocamentos de registradores e alocações de memória necessárias para o armazenamento de índices;

**Estratégias Híbridas.** Algoritmos rápidos diferentes podem ser combinados. Por exemplo, para se calcular uma transformada rápida de comprimento  $N = 421875 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$ , pode considerar algumas estratégias: (i) fatorar  $N = N_1 N_2 N_3$ , em que  $N_1 = 2^3$ ,  $N_2 = 3^3$  e  $N_3 = 5^3$  e aplicar o algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey para cada uma destas bases (para mais exemplos, vide [4, p.118–130]); (ii) fatorar  $N = N_1 N_2$ , em que  $N_1 = 2 \times 3^2 \times 5$  e  $N_2 = 2^2 \times 3 \times 5^2$  são constituídos de fatores primos entre si, e chamar o algoritmo de Good-Thomas e, subsequentemente, combinar os resultados através do algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey [5]. Assim, em transformações de comprimentos longos, é possível associar transformadas de tipos diferentes e assim abrir margem a um grande número de combinações. Analisar algoritmos que se baseiam neste princípio não é uma tarefa trivial. Mais adiante, os algoritmos de Gauss-Cooley-Tukey e Good-Thomas serão sucintamente comentados.;

**Arquiteturas.** As transformadas rápidas são implementadas sob as mais variadas formas. Podem ser descritas fisicamente em circuito integrado para uso em satélites, podem ser descritas em programas para computadores de processamento paralelo. Assim, a escolha do algoritmo também

depende de considerações sobre a tecnologia (arquitetura) de que se dispõe. Alguns algoritmos podem ser mais facilmente adaptados para novas arquiteturas que outros.

Outro fator que influi na concepção de um algoritmo é o conhecimento *a priori* de propriedades do sinal de entrada. É identificado que se um sinal a ser analisado exibir algum tipo de simetria (por exemplo, simetria par ou ímpar), simplificações e reduções de cálculos e armazenamento (memória) podem ser feitas e algoritmos mais eficientes podem ser obtidos.

O fato do sinal a ser analisado ter a propriedade de ser puramente real é particularmente interessante, pois pode oferecer reduções computacionais da ordem de dois aproximadamente [6]. Neste caso, explora-se o fato de que sinais reais têm a transformada discreta de Fourier simétrica, necessitando assim que se calcule apenas a metade do espectro discreto.

Uma outra transformada trigonométrica discreta de grande importância é a transformada discreta de Hartley (DHT) [7]. A DHT relaciona dois vetores  $N$ -dimensionais,  $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})^T \leftrightarrow \mathbf{V} = (V_0, V_1, \dots, V_{N-1})^T$ , por:

$$V_k \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \cdot \text{cas} \left( \frac{2\pi ki}{N} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.3)$$

$$v_i = \sum_{k=0}^{N-1} V_k \cdot \text{cas} \left( \frac{2\pi ki}{N} \right), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.4)$$

em que  $\text{cas } x \triangleq \cos x + \text{sen } x$ . Apresentando uma formulação bastante similar à da DFT, a transformada discreta de Hartley [3, 7] tem atraído considerável atenção desde sua introdução em 1983. Principalmente, as razões para isto são: (i) a DHT é uma transformada puramente real, não exigindo uma aritmética no corpo dos números complexos; (ii) as fórmulas para a transformada direta e inversa são essencialmente idênticas; (iii) a DHT é computacionalmente equivalente a DFT [8]; (iv) grande simetria é encontrada na DHT [7].

Estas características motivaram muita pesquisa para promover o uso da DHT no lugar da DFT. Assim, a DHT encontrou área para diversas aplicações, tais como análise espectral, cálculo de convoluções, filtragem adaptativa, interpolação, sistemas OFDM/CDMA, sistemas de comunicação e processamento de imagens médicas [9]. Uma lista representativa da literatura existente acerca da transformada de Hartley é encontrada em [10]. Nessa tese, serão focalizadas apenas algoritmos para transformadas definidas no corpo dos números reais. Entretanto, por completicidade, vale a pena chamar a atenção para a definição da transformada de Hartley em corpos finitos (FFHT) [11].

Como conseqüência da definição da transformada discreta de Hartley, é possível relacioná-la com a transformada de Fourier [3]. Considerando o vetor transformada discreta de Fourier e de Hartley

denotados por  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}$ , respectivamente, é razoavelmente direto mostrar que

$$H_k = \Re\{F_k\} - \Im\{F_k\}, \quad (1.5)$$

em que  $\Re$  e  $\Im$  informam a parte real e imaginária de seus argumentos, respectivamente.

A existência de uma transformação linear que conecta a transformada de Fourier com a transformada de Hartley faz com que a vasta maioria dos algoritmos rápidos destinados à DFT sejam convertidos para a DHT. De modo geral, um algoritmo proposto para a transformada discreta de Fourier pode ser adaptado para a transformada discreta de Hartley. Em um excelente artigo, Sorensen *et al.* [6] reescrevem os algoritmos rápidos mais importantes da DFT para serem utilizados para o cálculo da DHT.

O inverso também é verdadeiro: dado um algoritmo para a DHT, é possível versá-lo para calcular a DFT. A transformada de Fourier é obtida a partir da transformada de Hartley por:

$$\Re\{F_k\} = \mathcal{E}\{H_k\}, \quad (1.6)$$

$$\Im\{F_k\} = -\mathcal{O}\{H_k\}, \quad (1.7)$$

em que  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{O}$  indicam a parte real e ímpar, respectivamente.

No caso da transformada discreta de Fourier, há uma grande quantidade de algoritmos rápidos propostos. Nesta classe, sem dúvida, o mais importante é o algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey (ou simplesmente Cooley-Tukey), escolhido em várias seleções como um dos 10 algoritmos mais importantes do século XX [12]. A razão para isso deve-se em parte ao fato do algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey (i) ser um dos primeiros algoritmos na área, (ii) ter uma implementação bastante simples para comprimentos que são potência de dois e (iii) ser livre de patentes [4, 13]. Apesar do algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey ser tão importante para calcular a transformada de Fourier (Hartley), há diversos outros algoritmos para o mesmo fim. De modo geral, as propostas de algoritmos rápidos procuram explorar vantagens em condições particulares. Abaixo, os principais algoritmos para a DFT, já clássicos. Tais algoritmos são denominados de modo geral de transformadas rápidas de Fourier ou FFT's (*Fast Fourier Transform*).

**Gauss-Cooley-Tukey [4].** De longe o método mais utilizado, é apropriado para transformadas de comprimento  $N = N_1 N_2$ . Este algoritmo divide uma transformada de comprimento  $N$  em transformadas menores de comprimento  $N_1$  e  $N_2$ . Torna-se extremamente útil e simples, se  $N$  for uma potência de dois.

**Good-Thomas [4].** É baseado no Teorema Chinês do Resto [14]. Converte uma transformada de comprimento  $N = N_1 N_2$  em transformadas de comprimentos  $N_1$  e  $N_2$  sem a necessidade de fatores multiplicativos de ajuste (*twiddle factors*). Entretanto, exige-se que  $N_1$  e  $N_2$  sejam primos entre si.

**Bruun [15].** Proposto em 1978, este algoritmo é adequado para transformada de comprimentos que são potências de dois. É baseado em uma recursão do polinômio  $z^N - 1$  e generaliza o algoritmo de Cooley-Tukey para base dois. Apesar disto, é muito menos utilizado do que Cooley-Tukey e apresenta certas dificuldades numéricas (precisão) [16].

**Rader [4].** Reescreve a DFT como uma convolução. O método é aplicável apenas para transformadas de comprimentos primos.

**Bluestein (*chirp-z*) [4].** Trata-se de um outro algoritmo que explora a conversão da DFT em uma convolução.

**Winograd [17, 18].** Matematicamente profundo, este algoritmo explora fatorações de  $z^N - 1$  com coeficientes 1,  $-1$  ou 0. Deste modo, reduzindo dramaticamente a complexidade computacional e freqüentemente atingindo limitantes inferiores.

Todos estes algoritmos citados têm seus análogos para a DHT.

A Figura 1.1 ilustra a importância dos algoritmos rápidos, através de uma comparação entre a complexidade computacional exigida para o cálculo da DFT pela definição,  $O(N^2)$ , e através do algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey,  $O(N \log_2 N)$ .

A importância de tais métodos é ilustrada em um caso bastante citado, encontrado em [13] e transcrito abaixo:

*“The FFT was put right to work by Lee Alsop, a geophysicist at IBM and Columbia University. Alsop analyzed the seismographic record of a 1965 earthquake in Rat Island, Alaska, using 2048 data points representing a 13.5-hour period. A conventional Fourier transform took more than 26 minutes to do the analysis; the FFT spit out the answer in 2.4 seconds. Moreover, by running tests with numerically generated data, Alsop found that the fast Fourier transform was not only faster, but also more accurate than conventional methods.”*<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Nos computadores pessoais atuais, esta mesma operação pode ser realizada em milésimos de segundos.

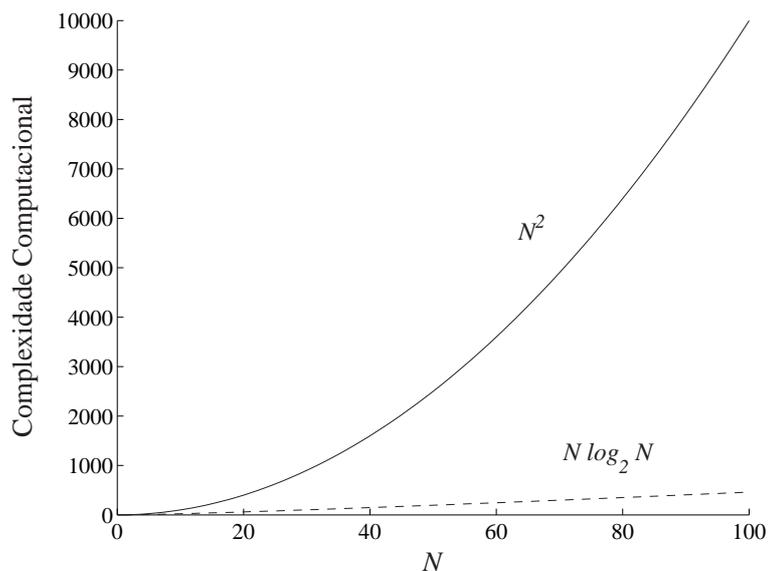


Figura 1.1: A curva cheia denota a complexidade computacional do cálculo da DFT pela definição. A curva em pontilhado mostra esta mesma complexidade quando se utiliza a FFT (Gauss-Cooley-Tukey).

## 1.2 Complexidade Multiplicativa e Aditiva

Apesar dos algoritmos rápidos reduzirem a quantidade de operações aritméticas do cálculo das transformadas discretas, o número de operações de multiplicação recebe atenção especial. É interessante observar que as operações de multiplicação e divisão consomem muito mais tempo de máquina do que as operações de adição ou subtração. A Tabela 1.1 mostra o número de pulsos de *clock* requerido por algumas operações matemáticas do processador Intel Pentium™ [19]. Apenas a título de comparação são exibidos também os custos computacionais das funções trigonométricas seno e cosseno.

Tabela 1.1: Quantidade de pulsos de relógio para algumas instruções aritméticas implementadas no processador Pentium™.

Instrução	Pulsos
add	1–3
sub	1–3
fadd	1–7
fsub	1–7
mul (unsigned)	10–11
mul (signed)	10–11
div (unsigned)	17–41
div (signed)	22–46
fdiv	39
sin, cos	17–137

Esta diferença de desempenho entre as operações de adição e multiplicação é objeto de estudo há muito tempo [18]. E tal fato estimula muita pesquisa visando o desenvolvimento de algoritmos que minimizam a quantidade de multiplicações [4, 6, 8, 18, 20, 21].

Devido à variedade de algoritmos existentes, é de interesse levantar critérios para classificá-los e compará-los entre si. Existe uma dificuldade em escolher estes critérios, pois nem sempre é simples determinar o desempenho de um algoritmo sob um determinado parâmetro.

O número de multiplicações de um algoritmo é, sem dúvida, uma das variáveis do funcional desempenho. Apesar de haver outras variáveis, um algoritmo ótimo é normalmente escolhido como sendo aquele que apresenta o menor número de multiplicações. Segundo Heideman [8], essa abordagem é aceita, pois (i) as multiplicações são operações relativamente lentas e (ii) a quantidade de multiplicações exigida para um algoritmo pode ser prevista (há uma teoria). Além disto, atualmente não existe uma teoria (e talvez nunca venha a existir!) que leve em conta todos os fatores que contribuem para a complexidade computacional de um algoritmo.

A teoria da complexidade multiplicativa é bem desenvolvida e se aplica bem a sistemas cujas saídas são descritas em termos de suas entradas usando-se apenas adição, subtração, multiplicação e divisão definidas em um corpo de interesse [8].

A complexidade multiplicativa de um algoritmo é expressa pelo número de multiplicações por ele exigido. É útil, neste caso, esclarecer o que representa uma multiplicação. Uma multiplicação pode ser trivial ou não trivial. Para dois valores  $a$  e  $b$ , a operação  $a \cdot b$  só será contada como uma multiplicação não-trivial se ambas as quantidades  $a$  e  $b$  puderem assumir valores reais arbitrários. Assim,  $3 \cdot b$  não representa uma multiplicação. Multiplicações em que um dos fatores é um número racional são consideradas triviais [4], pois multiplicações por inteiros podem ser interpretadas como adições repetidas (por exemplo,  $3 \cdot b = b + b + b$ ) e divisões por inteiros podem ser evitadas através de re-escalamentos.

A complexidade aditiva é simplesmente definida como o número de adições necessárias para o cálculo de um algoritmo. Mínimos teóricos para a complexidade aditiva são desconhecidos, em verdade, não há uma teoria para complexidade aditiva mínima!

Em sua tese de doutorado [8], Heideman tenta abranger a maior parte da teoria da complexidade multiplicativa e chega a resultados notáveis. Entre eles, a cota inferior para a complexidade multiplicativa para transformadas discretas de Fourier, que é aqui enunciado. Por  $M_{DFT}(N)$  será denotada a complexidade multiplicativa mínima de uma transformada discreta de Fourier de comprimento  $N$ .

**Teorema 1.1 (Heideman)** Para  $N = \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$ , onde  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , são primos tais que  $p_i \neq p_j$  para  $i \neq j$ , e  $e_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  são inteiros positivos, tem-se que

$$M_{DFT}(N) = 2N - \sum_{i_1=0}^{e_1} \sum_{i_2=0}^{e_2} \cdots \sum_{i_m=0}^{e_m} \phi \left( \text{mdc} \left( \prod_{j=1}^m p_j^{i_j} \right) \right) \times \left( 1 + \sum_{d_1 | \frac{\phi(p_1^{i_1})}{\phi(\text{mdc}(p_1^{i_1}, 4))}} \sum_{d_2 | \frac{\phi(p_2^{i_2})}{\phi(\text{mdc}(p_2^{i_2}, 4))}} \cdots \sum_{d_m | \frac{\phi(p_m^{i_m})}{\phi(\text{mdc}(p_m^{i_m}, 4))}} \frac{\prod_{k=1}^m \phi(d_k)}{\phi(\text{mmc}(d_1, d_2, \dots, d_m))} \right). \quad (1.8)$$

■

A demonstração deste teorema foge completamente do escopo desse trabalho. Vide a referência [8, p.98] para obter a prova. O uso desse teorema para diversos valores de  $N$  gera a Tabela 1.2.

A existência de uma transformação inversível que apresente apenas adições e multiplicações por racionais entre as componentes da transformada discreta de Hartley e da transformada discreta de Fourier faz com que os dois sistemas sejam considerados equivalentes do ponto de vista da complexidade multiplicativa [8]. Dessa forma, pode-se resumir este resultado no seguinte lema.

**Lema 1.1 (Equivalência)** Para qualquer comprimento de bloco  $N$ , tem-se que a complexidade multiplicativa da DHT é idêntica à complexidade multiplicativa da DFT. Ou seja:

$$M_{DHT}(N) = M_{DFT}(N).$$

■

Dessa maneira, todo algoritmo para o cálculo da transformada discreta de Hartley também o é para o cálculo da transformada discreta de Fourier e vice-versa.

Em resumo, dois fatores levam a um grande interesse pela complexidade aritmética multiplicativa:

- o elevado custo computacional das multiplicações, se comparadas com adições; e
- a existência de uma teoria estabelecida [8].

Tabela 1.2: Complexidade multiplicativa mínima para alguns comprimentos de bloco.

$N$	2	3	4	5	6	8	12	16	24	32	48	64	128	256
$M_{DFT}(N)$	0	1	0	4	2	2	4	10	12	32	38	84	198	438

### 1.3 Cálculo Aproximado

Todos os algoritmos rápidos, até agora citados, implementam a transformada discreta de Fourier de maneira exata. É interessante notar que mesmo os algoritmos “exatos” produzem algum tipo de erro, durante seu cálculo. Por exemplo, os erros oriundos da aritmética de ponto flutuante são, à princípio, inevitáveis. Outro ponto relevante é que alguns algoritmos, como é o caso do algoritmo de Gauss-Cooley-Tukey, são muito sensíveis à precisão dos termos de ajuste. Um exemplo de algoritmo exato que pode exibir erros consideráveis é o Rader-Brenner. Este método apresenta, devido a sua própria construção, uma considerável instabilidade numérica [4]. Escalonamentos, muitas vezes presentes em algoritmos, também são outra fonte de erros. Um escalonamento indevido pode acarretar em perda de precisão na representação em ponto flutuante.

Este cenário, de certo modo, forneceu mais uma justificativa para o desenvolvimento de algoritmos que em vez de realizar o cálculo exato, realizam a operação de modo aproximado, oferecendo uma complexidade aritmética menor. Assim, seria possível ajustar o compromisso entre exatidão e esforço computacional. Tais algoritmos visam deixar a encargo do usuário a exatidão necessária, avaliando o espectro com precisão tão grande (ou tão pequena) quanto se deseje. Alguns exemplos de algoritmos aproximados são encontrados em [22–25].

Pode-se identificar diversas estratégias para conceber algoritmos de baixa complexidade multiplicativa. Entretanto, três abordagens merecem nota:

- Considerar o uso cálculo aproximado (aproximações), observando-se um balanço entre exatidão e complexidade computacional;
- Explorar vantagens da representação numérica. Por exemplo, numa aritmética de base-2, multiplicações por potências de dois são realizadas através de deslocamentos no conteúdo de registradores: uma operação bem mais rápida do que uma multiplicação. Outro exemplo é a codificação de inteiros algébricos proposto por Dimitrov [26];
- Utilizar métodos aritméticos (Teoria Aritmética) [27].

Como exemplo de algoritmo para o cálculo aproximado da DHT, pode-se citar o algoritmo de Bhatnagar [28], que utiliza números de Ramanujan. Um inteiro  $n$  é um número de Ramanujan se

$$\frac{2\pi}{N} \approx 2^{-a},$$

em que  $a$  é um inteiro não-negativo. Tal procedimento reduz a dificuldade computacional da DHT de  $O(N^2)$  operações aritméticas para  $O(N^2)$  deslocamentos (*shifts*, adequado para aritmética em base

binária) e adições; e  $O(N)$  re-escalamentos. Por outro lado, a escolha de comprimento de bloco é reduzida aos números de Ramanujan, tais como  $N \in \{13, 25, 50, 101\}$ . Outro exemplo é o algoritmo proposto por Dee-Jeoti [29] também para a DHT.

O estágio final do processo de redução da complexidade multiplicativa seria a eventual eliminação completa das operações de multiplicação. Algumas transformadas, entretanto, já apresentam, por sua própria natureza, complexidade multiplicativa nula (sem qualquer tipo de aproximação). É o caso das transformadas de Hadamard-Walsh, que sempre atraem grande interesse pela sua baixíssima complexidade aritmética [30]. Há uma motivação constante ao desenvolvimentos de algoritmos livres de multiplicação (*multiplication free*).

Observa-se que na classe de algoritmos aproximados, os limites inferiores teóricos para o número de multiplicações de uma transformada não se aplicam. Afinal, os limites estabelecidos em [8] (vide Tabela 1.2) dizem respeito ao cálculo *exato* da transformada. Deste modo, a princípio, pode-se aceitar a possibilidade de construção de algoritmos aproximados com complexidade multiplicativa nula.

No Capítulo 2, deste trabalho, será proposta uma transformada original baseada nos conceitos de cálculo aproximado e complexidade multiplicativa nula. Esta transformada, a Transformada de Hartley Arredondada (RHT), visa a obtenção de uma primeira aproximação para o espectro de Hartley. A RHT possui uma matriz de transformação cujos elementos são exclusivamente  $\{-1, 0, 1\}$ . Assim, de modo similar às transformadas de Hadamard-Walsh, há apenas complexidade aritmética aditiva.

Para o cálculo do espectro de Fourier, a Teoria das Transformadas Aritméticas desperta grande interesse [27, 31, 32], pois é capaz de fornecer alicerce teórico para o desenvolvimento de algoritmos que requerem apenas adições, desconsiderando-se alguns fatores escalamentos (multiplicações triviais). Dessa forma foi proposta a Transformada Aritmética de Fourier (AFT) [32], essencialmente baseada em teoremas acerca da função de Möbius, que oferece apenas multiplicações triviais por  $\{-1, 0, 1\}$ .

No Capítulo 3, será mostrada uma pequena revisão sobre o estado da arte da teoria da Transformada aritmética de Fourier. É então proposto um novo método aritmético, contemplando a transformada discreta de Hartley (AHT). Este novo método — a transformada aritmética de Hartley — permite a avaliação do espectro discreto de Hartley com complexidade multiplicativa ajustável. O desenvolvimento da AHT permitiu lançar novas interpretações sobre os métodos aritméticos, inclusive permitindo-se encontrar elementos que generalizam as transformadas aritméticas, como seu esquema de interpolação.

A Figura 1.2 localiza alguns algoritmos existentes para transformadas discretas. Entre eles, estão destacados a AHT e a RHT como contribuição dessa tese.

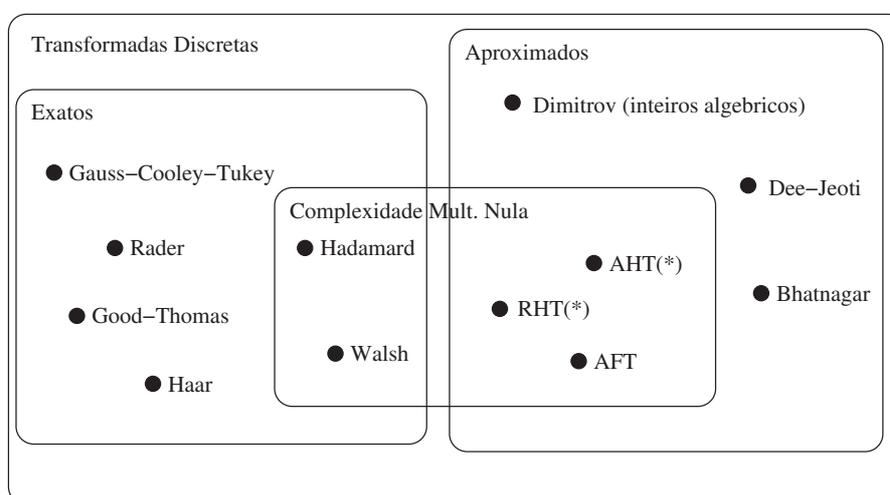


Figura 1.2: Diagrama localizando alguns algoritmos. Os métodos marcados por (\*) são originais e propostos nesta tese.

## Capítulo 2

# A Transformada de Hartley

## Arredondada<sup>1</sup>

*“Oh dear Lena, your beauty is so vast  
It is hard sometimes to describe it fast.  
I thought the entire world I would impress  
If only your portrait I could compress.  
Alas! First when I tried to use VQ  
I found that your cheeks belong to only you.  
Your silky hair contains a thousand lines  
Hard to match with sums of discrete cosines.  
And for your lips, sensual and tactual  
Thirteen Crays found not the proper fractal.  
And while these setbacks are all quite severe  
I might have fixed them with hacks here or there  
But when wavelets took sparkle from your eyes  
I said, ‘Skip this stuff. I’ll just digitize.’ ”*

*Poem for Lena, ANÔNIMO*

Este capítulo será devotado à definição de novas transformadas aproximadas para estimar a transformada discreta de Hartley. Nas Seções 2.1 e 2.2, define-se a Transformada de Hartley Arredondada (RHT, *Rounded Hartley Transform*). É também introduzido e discutido o conceito de *inversão aproximada*, construto crucial para a formulação da RHT. A Seção 2.3 oferece uma abordagem para a implementação de algoritmos rápidos para a RHT proposta. Trabalhos anteriores [34,35]<sup>2 3</sup> são utilizados amplamente, fornecendo as ferramentas matemáticas para tal. Um caso particular é explorado

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma ampliação do seguinte artigo: de Sobral Cintra, R. J., de Oliveira, H. M., Cintra, C. O., “*The Rounded Hartley Transform*”, *IEEE International Telecommunications Symposium*, Natal, RN, 2002 [33].

<sup>2</sup>de Sobral Cintra, R. J., “*A Transformada Rápida de Hartley: Novas Fatorações e um Algoritmo Aritmético*”, Dissertação de mestrado, Programa de Pós-graduação em Eng. Elétrica, UFPE, jul. 2001.

<sup>3</sup>de Oliveira, H. M., de Sobral Cintra, R. J. and Campello de Souza, R. M., “*A Factorization Scheme for Some Discrete Hartley Transform Matrices*”, ICSECIT 2001 Proceedings – International Conference on System Engineering, Communications and Informations Technologies, Universidad de Magallanes, Punta Arenas, Chile, 2001.

— um algoritmo rápido para a RHT de comprimento 16, bem como uma análise inicial sobre os limitantes da complexidade computacional destes algoritmos rápidos.

Subseqüentemente, na Seção 2.4, o caso bidimensional é examinado, com a introdução da transformada de Hartley arredondada 2-D (RHT 2-D). O efeito da RHT 2-D é investigado em várias imagens, sendo quantificado através da relação sinal-ruído de pico (PSNR, *Peak Signal-Noise Ratio*). Este capítulo é finalizado com uma Conjectura que pode estabelecer uma conexão entre a RHT e as transformadas de Hadamard-Walsh.

## 2.1 Transformada Arredondada de Hartley

A transformada discreta de Hartley (Equação 1.3)  $n$ -dimensional induz a definição de uma matriz de transformação  $\mathbf{H}_n$ , cujos elementos são da forma  $h_{i,k} = \text{cas}\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)$ ,  $i, k = 0, \dots, n-1$ . Essa matriz será chamada de *matriz de Hartley*. Seja  $\mathbf{v}$  um vetor  $n$ -dimensional com elementos reais e  $\mathbf{V}$  a transformada discreta de Hartley de  $\mathbf{v}$ , escreve-se  $\mathbf{v} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathbf{V}$ . Em termos matriciais, vem que

$$\mathbf{V} = \mathbf{H}_n \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

A princípio, uma matriz de Hartley possui elementos estritamente reais e apresenta uma grande redundância (repetição padronizada de seus elementos). O cálculo da transformada discreta de Hartley pela Equação 2.1 apresenta um esforço computacional multiplicativo da ordem de  $O(N^2)$  [6, 7].

Em um possível cenário em que o valor *exato* das componentes da transformada discreta de Hartley não tenha tanta relevância — e, sim, sua estimativa — pode-se conceber simplificações neste cálculo. Este trabalho propõe o uso da função de arredondamento como veículo para esta simplificação.

A matriz de Hartley pode ser modificada, obtendo-se uma nova matriz: a matriz de Hartley arredondada. Esta matriz é simplesmente definida através do arredondamento de cada elemento da matriz de Hartley. Assim, os elementos  $h_{i,k}$  da matriz de Hartley arredondada são expressos por

$$h_{i,k} \triangleq \left[ \underbrace{\text{cas}\left(\frac{2\pi ik}{n}\right)}_{h_{i,k}} \right], \quad i, k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

em que  $[\cdot]$  denota a função de arredondamento. A Figura 2.1 mostra o efeito do arredondamento sobre a função de Hartley no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . A matriz de Hartley arredondada de ordem  $n$  será denotada por  $\mathbb{H}_n$ .

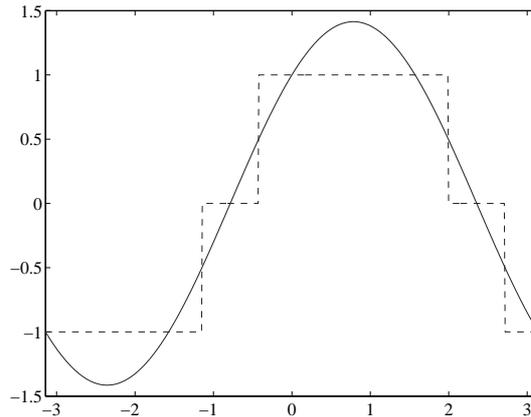


Figura 2.1: Funções  $\text{cas}(x)$  (linha cheia) e  $[\text{cas}(x)]$  (linha tracejada), para  $x \in [-\pi, \pi]$ .

A função de arredondamento simplesmente mapeia um número real em seu inteiro mais próximo. Fica claro que há uma ambigüidade quando se tenta arredondar números da forma  $x + 1/2$ , onde  $x \in \mathbb{Z}$ . Como regra adicional, admite-se que

$$[x + 1/2] \triangleq \text{sign}(x)(|x| + 1), \quad (2.3)$$

em que  $\text{sign}(\cdot)$  é a função sinal. Observa-se, sem maiores dificuldades, que os elementos da matriz de Hartley arredondada  $h_{i,k}$  pertencem ao conjunto  $\{-1, 0, 1\}$ , uma vez que  $|\text{cas}(x)| \leq \sqrt{2} \approx 1.4142 \dots$ . Conseqüentemente, a multiplicação de um vetor pela matriz de Hartley arredondada requer apenas operações de adição, independente do comprimento da transformada. Deste modo, a transformada de Hartley arredondada é uma transformação com complexidade multiplicativa nula, algo bastante atrativo. Em forma matricial, a transformada de Hartley arredondada  $\mathbf{V}$  de um vetor  $n$ -dimensional  $\mathbf{v}$  tem a seguinte expressão:

$$\mathbf{V} = \mathbb{H}_n \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Nota-se que  $\mathbf{V}$  é, em verdade, uma estimativa da transformada discreta de Hartley  $\mathbf{V}$ .

Com a definição da nova matriz  $\mathbb{H}_n$ , torna-se necessário endereçar uma investigação para (i) avaliar o quão bom é a estimativa espectral fornecida por  $\mathbf{V}$  e (ii) identificar uma transformação inversa para a  $\mathbb{H}_n$ .

Apenas para fornecer uma ilustração e motivador inicial, pode-se calcular os espectros da transformada discreta de Hartley e da transformada de Hartley arredondada (RHT), a fim de realizar uma comparação qualitativa. A Figura 2.2 mostra ambos os espectros para um sinal-exemplo  $f(x) = \cos(90\pi x)(x - \frac{1}{2})^2$  discretizado em 64 amostras no intervalo  $x \in [0, 1]$ .

De modo a ganhar mais informações sobre o comportamento da matriz de Hartley arredondada, gerou-se diagramas de intensidade para algumas matrizes particulares. O valor  $h_{i,k}$  de cada elemento

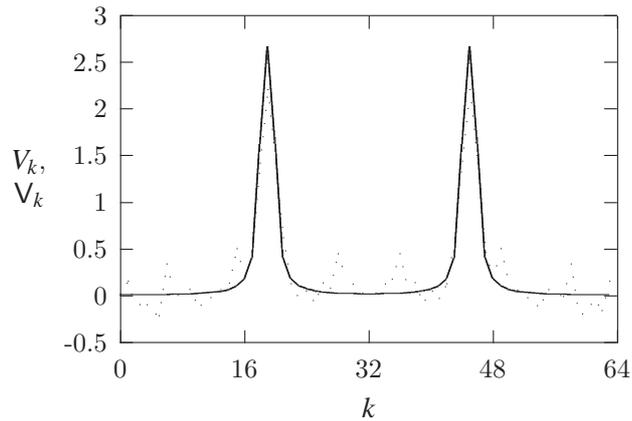


Figura 2.2: O espectro de Hartley calculado pela DHT  $\mathbf{V}$  (linha cheia —) e pela RHT  $\mathbf{V}$  (linha pontilhada  $\cdots$ ) de um sinal  $\mathbf{v}$  de 64 amostras da função  $f(x) = \cos(90\pi x)(x - \frac{1}{2})^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

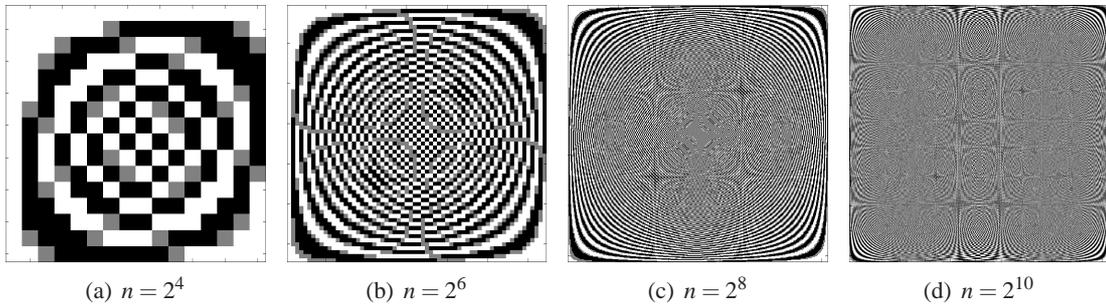


Figura 2.3: Padrões obtidos pela matriz de Hartley aproximada para ordens  $n = 16, 64, 256, 1024$ . Cada matriz  $\mathbb{H}$  foi convertida em diagramas de intensidade representando cada elemento por um tom em escala de cinza (branco representa 1, cinza representa 0 e preto representa  $-1$ ).

de  $\mathbb{H}_n$  foi mapeado em tons de cinza em uma figura de  $n^2$  pixels. Alguns padrões interessantes foram obtidos, como se observa na Figura 2.3. Chama a atenção a presença de padrões auto-similares induzidos pelas simetrias da função de Hartley,  $\text{cas}(\cdot)$ .

## 2.2 Inversão Aproximada

Para manter-se rigorosamente fiel à definição da transformada de Hartley definida por Hartley-Bracewell [11,36,37], a matriz de Hartley  $\mathbf{H}_n$  e a matriz de Hartley arredondada  $\mathbb{H}_n$  serão escalonadas por  $1/\sqrt{n}$ . Esta formulação faz com que a transformada direta e inversa sejam absolutamente iguais, sem a necessidade de escalonamentos de ajuste que quebram a simetria. É válido observar que, como se trata de um simples escalonamento, esta modificação não implica perda conceitual de qualquer espécie. Muito pelo contrário, confere maior elegância e harmonia aos resultados obtidos adiante.

Uma das mais interessantes propriedades da transformada discreta de Hartley é a involução. Isto é, a transformada de Hartley é invertida através de outra aplicação da transformada direta. Seja  $\mathbf{H}_n$  a

matriz de Hartley. Assim, por ser uma involução, tem-se que

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}_n(\mathbf{H}_n \mathbf{v}). \quad (2.5)$$

Deste modo, implica-se que

$$\mathbf{H}_n^{-1} = \mathbf{H}_n. \quad (2.6)$$

Após a operação de arredondamento, esta propriedade, entretanto, não é transferida para a matriz de Hartley arredondada. Como a RHT não se constitui em uma involução, tem-se, de modo geral, que:

$$\mathbb{H}_n^{-1} \neq \mathbb{H}_n. \quad (2.7)$$

Calculando explicitamente a matriz inversa de  $\mathbb{H}_n$ , verificou-se sua existência para qualquer ordem  $n \leq 1024$ . Entretanto, a boa característica computacional da matriz  $\mathbb{H}_n$  (apenas elementos  $-1, 0$  ou  $1$ ) não é verificada em sua matriz inversa. Sendo assim,  $\mathbb{H}_n^{-1}$  é mais computacionalmente intensa, sendo menos interessante.

Tal fato motivou uma investigação mais detalhadas sobre a inversão matricial. Em particular para uma matriz dada, foi-se guiado para a busca de matrizes com as seguinte propriedades:

- São aproximadamente (“quase”) iguais a matriz inversa da matriz dada;
- São computacionalmente menos complexas do que a matriz inversa (exata).

Isto é, dada uma matriz  $\mathbf{A}$ , visa-se obter uma nova matriz  $\tilde{\mathbf{A}}$  — a inversa aproximada, tal que:

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{I}, \quad (2.8)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e o símbolo  $\approx$  indica “aproximadamente igual a”. Este procedimento será denominado por *inversão aproximada*.

### 2.2.1 Uma Inversa Aproximada para a Matriz de Hartley Arredondada

Por inspeção, verifica-se que a matriz  $\mathbb{H}_n^{-1}$  (a menos de um escalonamento) é bastante similar à própria matriz  $\mathbb{H}_n$ . Em verdade,  $\mathbb{H}_n^{-1}$  é *quase*  $\mathbb{H}_n$ . Como  $\mathbb{H}_n$  é definida a partir de  $\mathbf{H}_n$ , pode-se ser levado a ampliar o conceito de involução e aceitar que, de algum modo,  $\mathbb{H}_n$  é *quase* uma involução. Estes são os pontos cruciais e qualitativos para o desenvolvimento a seguir. A Figura 2.4 ilustra as idéias principais do novo conceito.

Antes disto, serão introduzidos, nesta seção, conceitos auxiliares acerca da inversão aproximada.

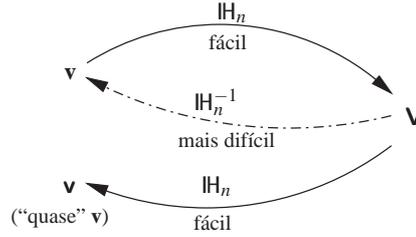


Figura 2.4: Este diagrama mostra a idéia principal da proposta. Objetiva-se matrizes que “quase” invertem. As setas cheias representam percursos de baixa complexidade computacional, ao passo que a seta tracejada indica maior complexidade computacional.

**Definição 2.1 (Período Matricial [38])** *O período de uma matriz  $\mathbf{A}$  é o menor inteiro positivo  $k$  tal que  $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}$ .* ■

Por exemplo, uma transformação idempotente  $\mathbf{A}$  satisfaz a seguinte expressão  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ , portanto pode-se dizer que  $\mathbf{A}$  tem período  $k = 1$ . De modo similar, uma transformação linear que tem período  $k = 2$  é uma involução.

Subseqüentemente, será avaliado o quão boa é uma inversão aproximada. Para isto, essencialmente, analisa-se a Equação 2.8 para obter:

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{I} = \mathbf{E}, \quad (2.9)$$

em que  $\mathbf{E}$  é a matriz de erro ocorrido durante a inversão aproximada. Deseja-se, portanto, que  $\mathbf{E}$  seja tão próximo quanto possível de uma matriz nula. Para quantificar esta análise, é introduzida uma medida que será utilizada como figura de mérito para avaliar o erro  $\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{I}$ .

**Definição 2.2** *A norma- $n$  de uma matriz  $\mathbf{A}$  é definida por*

$$\bar{\mu}(\mathbf{A}) = \frac{\|\mathbf{A}\|}{n}, \quad (2.10)$$

em que  $n$  é a ordem de  $\mathbf{A}$  e  $\|\cdot\|$  representa a norma de Frobenius de uma matriz:

$$\|\mathbf{A}\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2},$$

em que  $a_{i,j}$  são os elementos de  $\mathbf{A}$ . ■

Esta norma aqui definida pode ser interpretada como uma medida da quantidade de energia por dimensão de uma matriz.

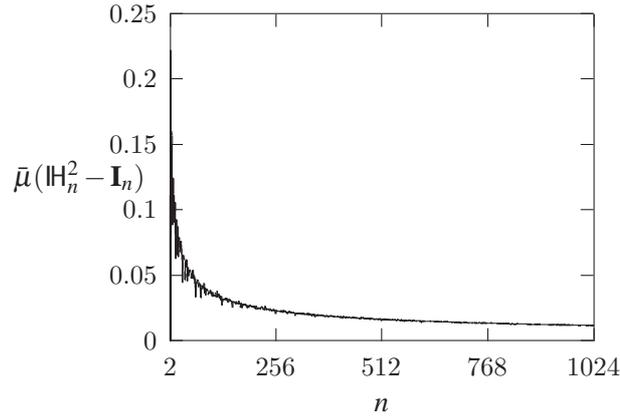


Figura 2.5: Norma- $n$  de  $(\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n)$  para  $n = 2, 3, \dots, 1024$ .

Utilizando a norma- $n$ , pode-se realizar uma análise preliminar da matriz de Hartley arredondada  $\mathbb{H}_n$ . Avaliando a norma- $n$  do erro de aproximação  $\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n$  para as dimensões  $n = 2, 3, \dots, 1024$ , pode-se gerar o gráfico exibido na Figura 2.5. Este gráfico indica que, dentro do intervalo analisado, o erro gerado pela aproximação, segundo a medida aqui definida, é dominado por uma função decrescente. Estes dados foram submetidos a uma análise para determinar uma função de encaixe sujeita a minimização do erro médio quadrático. Utilizando o modelo de Freundlich,

$$\bar{\mu}(\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n) \approx a \cdot n^b, \quad (2.11)$$

encontra-se os seguintes parâmetros  $a \approx 0.35167$  e  $b \approx -0.49324$ .

Tais observações motivam uma inferência sobre o comportamento assintótico de  $\bar{\mu}(\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n)$  e a proposição da seguinte conjectura.

### Conjectura 2.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}(\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n) = 0. \quad (2.12)$$

■

Uma interpretação para esta conjectura é a seguinte: a “distância” entre  $\mathbb{H}_n^2$  and  $\mathbf{I}_n$  tende a ser menor para transformadas de comprimento  $n$  maiores.

No escopo deste trabalho, é fornecido mais um novo conceito definido a seguir.

**Definição 2.3 (Quase-involução)** *Uma involução aproximada é definida como uma transformação linear  $\mathbf{A}$  tal que*

$$\mathbf{A}^2 \approx \mathbf{I}. \quad (2.13)$$

■

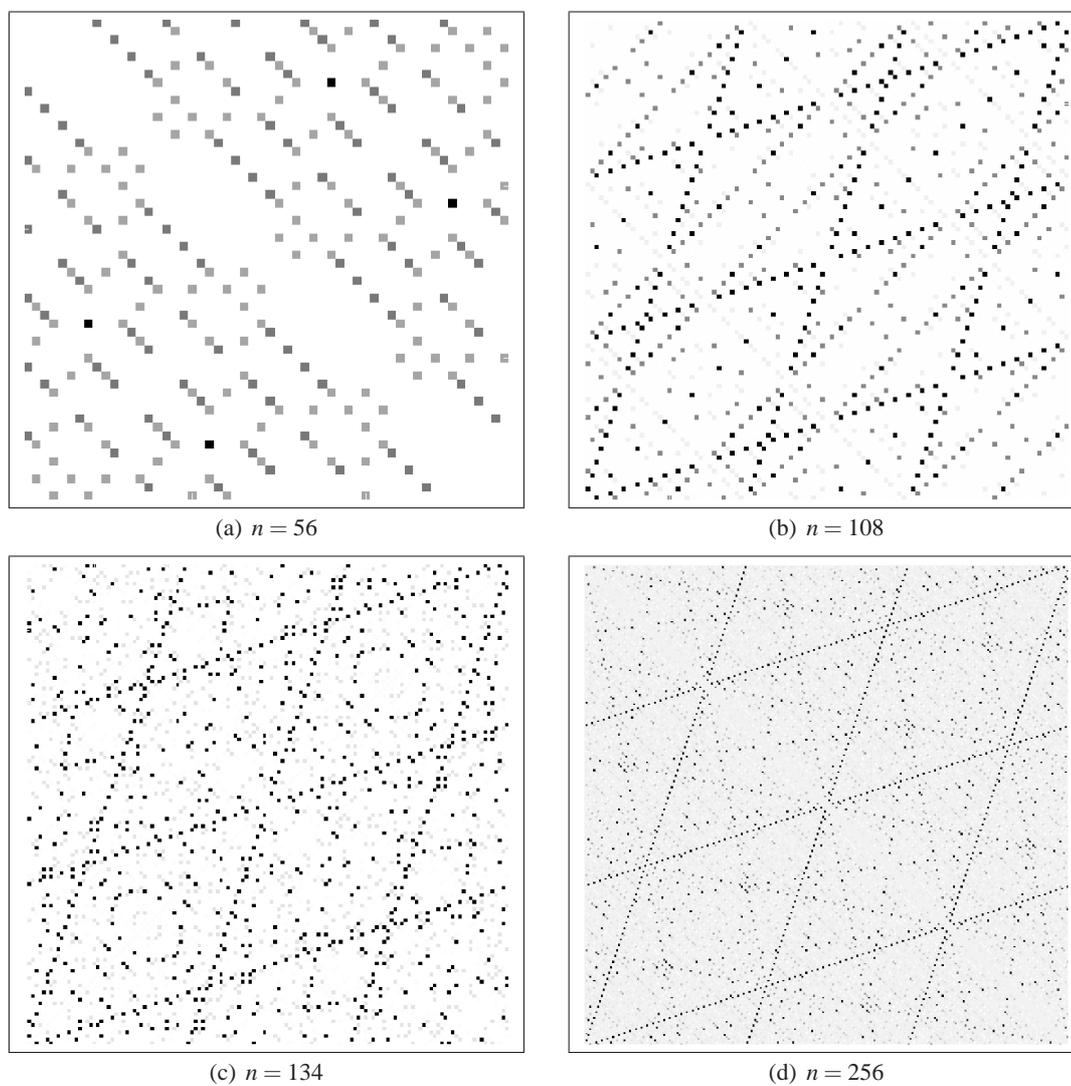


Figura 2.6: Alguns padrões matriciais de  $\mathbb{H}_n^2$ , para  $n = 56, 108, 134$  e  $256$ . A seguinte convenção para a escala em tons de cinza foi utilizada: os elementos de maior valor absoluto são representados em tons mais escuros (branco denota zero). A diagonal principal foi omitida para melhor visualização e contraste, pois seus elementos são em valor absoluto muito mais representativos que os elementos restantes da matriz.

De modo alternativo, a quase-involução pode ser vista como uma transformação de período aproximadamente igual a dois.

Passa-se agora a interpretar as matrizes de Hartley arredondadas como exemplos de involuções aproximadas. Em verdade, a matriz  $\mathbb{H}_n$  pode ser tomada como sua própria inversa, em vez de  $\mathbb{H}_n^{-1}$ .

Ou seja, apesar de

$$\mathbb{H}_n \cdot \mathbb{H}_n^{-1} = \mathbf{I}_n \quad (\text{inversão exata}), \quad (2.14)$$

tem-se que

$$\mathbb{H}_n \cdot \mathbb{H}_n \approx \mathbf{I}_n, \quad \text{e} \quad \bar{\mu} (\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.15)$$

**Conjectura 2.2** *Todas as matrizes de Hartley arredondadas são quase-involucionárias.*

Este resultado configura-se como Conjectura, pois se está baseado em observação computacional do cálculo  $\mathbb{H}_n \cdot \mathbb{H}_n$  limitado ao intervalo  $n = 2, 3, \dots, 1024$ . Ter-se-ia um teorema com a ampliação deste resultado para todo valor de  $n$ .

### 2.2.2 Observações

Nesta subseção, são enunciadas duas observações de caráter geral sobre as matrizes de Hartley arredondadas e suas propriedades.

#### Erro

Como uma inversa aproximada não é precisamente a inversa de uma matriz dada, qualquer procedimento que use o resultado de uma inversa aproximada contém inerentemente erros pela própria natureza do método.

Tem-se que a transformada de Hartley arredondada é dada por

$$\mathbf{V} = \mathbb{H}_n \mathbf{v}. \quad (2.16)$$

Pode-se, entretanto, considerar a seguinte formulação,

$$\mathbf{v} = \mathbb{H}_n \mathbf{V} = \mathbb{H}_n^2 \mathbf{v}, \quad (2.17)$$

para realizar a inversão da transformada de Hartley arredondada; em vez da inversa exata:

$$\mathbf{v} = \mathbb{H}_n^{-1} \mathbf{V}. \quad (2.18)$$

Claramente este procedimento introduz um erro pelo uso da inversão aproximada. O erro deste procedimento é expresso por

$$\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = (\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n) \mathbf{v}. \quad (2.19)$$

Como se observa, o erro  $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$  depende de  $\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n$ , bem como do sinal original  $\mathbf{v}$ .

### Fractal

Como a norma  $\bar{\mu} (\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n)$  fornece um expoente fracionário (Equação 2.11), os construtos  $\mathbb{H}_n^2 - \mathbf{I}_n$  podem ser associados à estruturas do tipo fractal. Os padrões exibidos na Figura 2.6 mostram um comportamento auto-similar.

## 2.3 Algoritmo Rápido para a Transformada Arredondada de Hartley

Os resultados desta seção foram alcançados utilizando-se algoritmos e a metodologia descrita em [34, 35]. Tais métodos são aplicados para o desenvolvimento de um algoritmo rápido para a transformada de Hartley arredondada de comprimento 16.

A matriz em questão,  $\mathbb{H}_{16}$ , tem a seguinte expressão:

$$\mathbb{H}_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - \\ 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & - & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 1 & 1 & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

em que “-” representa  $-1$  e os espaços em branco são zeros. O cálculo da RHT utilizando esta matriz oferece uma complexidade aritmética de 210 adições. Este valor é 12,5% menor do que o número máximo de adições possíveis na operação multiplicação entre uma matriz de ordem 16 e um vetor de comprimento 16:  $16 \times (16 - 1) = 240$ .

Aplicando a metodologia citada, pode-se mostrar que

$$\mathbb{H}_{16} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_4 \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1, \quad (2.21)$$



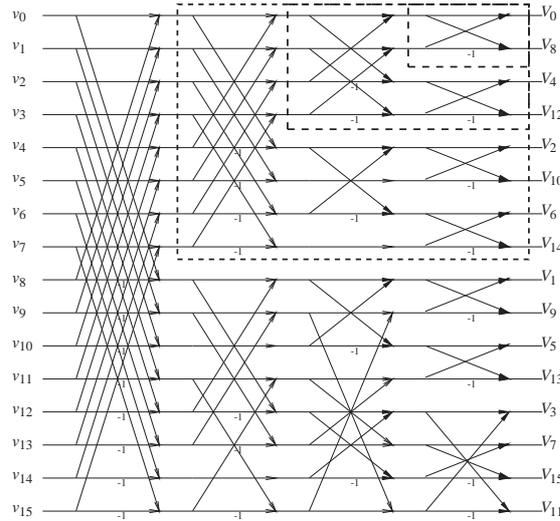


Figura 2.7: Diagrama de fluxo de um algoritmo rápido para a transformada de Hartley arredondada. As caixas tracejadas denotam transformadas de comprimento menor embutidas no algoritmo.

que é a principal característica da transformada de Hartley arredondada.

## 2.4 Transformada de Hartley Arredondada Bidimensional

A transformada discreta de Hartley bidimensional para uma imagem  $\mathbf{A}$  de dimensão  $n \times n$  é definida por

$$b_{u,v} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} \cdot \text{cas} \left( \frac{ui + vj}{n} \right), \quad (2.26)$$

em que  $a_{i,j}$  são os elementos de  $\mathbf{A}$  e  $b_{u,v}$  são os elementos da transformada discreta de Hartley bidimensional de  $\mathbf{A}$  [40].

Ao contrário da transformada de Fourier, o núcleo  $\text{cas}(\cdot)$  da transformada de Hartley não é separável. Isto é, não é possível expressar a transformada de Hartley bidimensional em termos da transformada das linhas da imagem e, subseqüentemente, das colunas [30]. Deste modo, para definir a transformada de Hartley arredondada bidimensional, será utilizado um método análogo ao utilizado para a DHT bidimensional [40].

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz  $n \times n$  que represente uma imagem. O procedimento proposto consiste do cálculo de uma matriz temporária  $\mathbf{T}$ , que é expressa por

$$\mathbf{T} = \mathbb{H}_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbb{H}_n, \quad (2.27)$$

em que  $\mathbb{H}_n$  é a matriz de Hartley arredondada de ordem  $n$ . Esta operação é equivalente a tomar a transformada de Hartley unidimensional das linhas de  $\mathbf{A}$  e, então, das colunas [30].

Representando os elementos da matriz temporária  $\mathbf{T}$  por  $t_{i,j}$ ,  $i, j = 0, \dots, n-1$ , novas matrizes serão consideradas a partir de  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}^{(c)}, \mathbf{T}^{(r)}, \mathbf{T}^{(c,r)}, \quad (2.28)$$

cujos elementos são da forma  $t_{i,n-j \pmod n}$ ,  $t_{n-i \pmod n, j}$ ,  $t_{n-i \pmod n, n-j \pmod n}$ , respectivamente.

A matriz  $\mathbf{T}^{(c)}$  representa uma permutação das colunas da matriz  $\mathbf{T}$  do seguinte modo: são trocadas as posições da segunda e última coluna, da terceira e penúltima, quarta e antepenúltima, e assim sucessivamente. A primeira coluna é, entretanto, mantida. Situação análoga ocorre com as linhas da matriz  $\mathbf{T}$  para se gerar a matriz  $\mathbf{T}^{(r)}$ . Quando ambos os procedimentos são realizados, tem-se a matriz  $\mathbf{T}^{(c,r)}$ . Utilizando estas novas estruturas, propõe-se a seguinte definição.

**Definição 2.4** A transformada de Hartley arredondada bidimensional  $\mathbf{B}$  de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  de ordem  $n$  é dada por

$$\mathbf{B} \triangleq \mathbf{T} + \mathbf{T}^{(c)} + \mathbf{T}^{(r)} - \mathbf{T}^{(c,r)}. \quad (2.29)$$

Esta definição é oriunda das propriedades da função  $\text{cas}(\cdot)$  de Hartley. Em particular, para  $a, b \in \mathbb{R}$ , tem-se que

$$\text{cas}(a+b) = \text{cas}(a)\text{cas}(b) + \text{cas}(a)\text{cas}(-b) + \text{cas}(-a)\text{cas}(b) - \text{cas}(-a)\text{cas}(-b), \quad (2.30)$$

induzindo as matrizes temporárias e seus formatos. A transformada de Hartley arredondada bidimensional inversa será definida do mesmo modo que a transformada direta.

Objetivando quantificar a degradação produzida pelo uso da inversão aproximada, no caso bidimensional, imagens padronizadas fornecidas pelo *Signal and Image Processing Institute Image Database (USC-SIPI Image Database)* [41] da *University of Southern California* foram submetidas à transformada de Hartley arredondada bidimensional direta e inversa. Após a realização da transformação inversa, têm-se acumulados em cascata dois erros: (i) o erro gerado pela transformação direta (aproximação da transformada de Hartley) e (ii) o erro gerado pela transformação inversa.

Uma ferramenta usualmente utilizada para medir a restauração/degração de uma imagem é a Relação Sinal-Ruído de Pico (PSNR, *Peak Signal-to-Noise Ratio*). A PSNR fornece um índice para avaliar a qualidade entre duas imagens e é expresso em decibels. Aqui a análise é restrita ao sinal de luminância, um estudo da crominância não ofereceria dificuldade adicional. Esta figura de mérito é definida pela seguinte expressão:

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left( \frac{m}{\text{RMSE}} \right), \quad (2.31)$$

em que  $m$  é o máximo valor de intensidade que um pixel pode assumir. Usualmente, são consideradas imagens em que  $m = 255$ . A quantidade RMSE é o erro médio quadrático entre duas imagens  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  de dimensão  $n \times n$ . Sua expressão é dada por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (m_{i,j} - n_{i,j})^2}{n^2}}. \quad (2.32)$$

Observa-se que a PSNR é um meio de medir a diferença entre duas imagens.

As Figuras 2.8, 2.9 e 2.10 mostram imagens originais e suas respectivas imagens após a transformação direta e inversa da RHT 2-D. O Programa 2.1 lista uma simples implementação para a RHT 2-D utilizando linguagem MATLAB<sup>TM</sup>.

---

**Programa 2.1** Um programa em MATLAB<sup>TM</sup> para o cálculo da RHT bidimensional, sua inversa aproximada e a PSNR entre a imagem original e restaurada.

---

```
function Z = rcas(N)

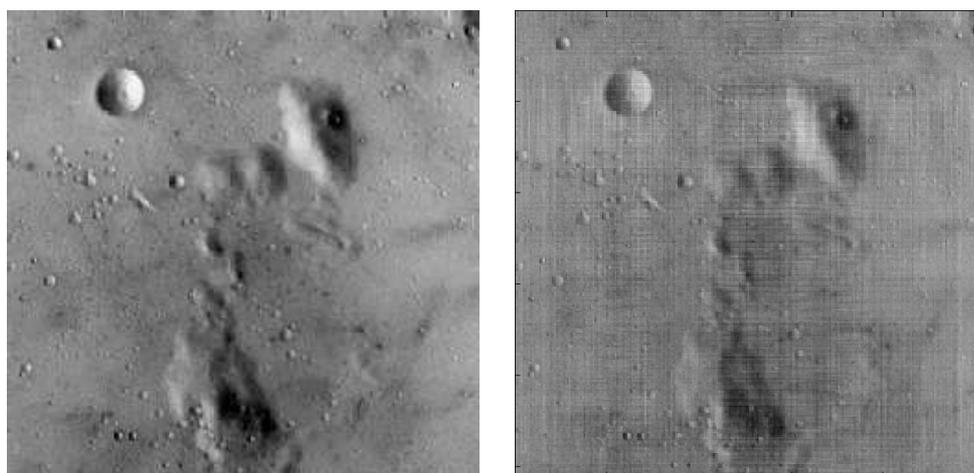
i = 0:(N-1);
j = 0:(N-1);
[I,J] = meshgrid(i,j);
Z = round ( cas ( 2 * pi / N * I .* J ) );

function [B, AA, PSNR] = twodrht(file)

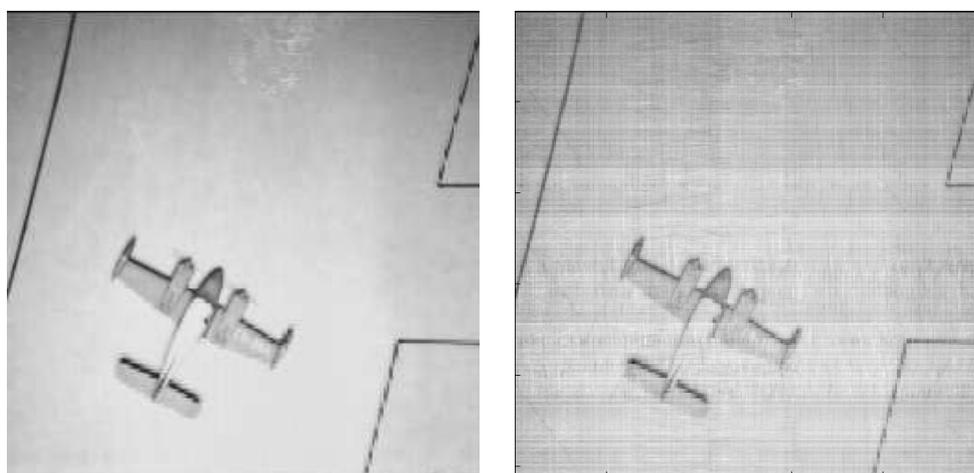
A = imread(file, 'bmp');
A = double(A);
[M, N] = size(A);
if M ~= N,
    return;
end;
colormap(gray(256));
K = rcas(N);
TEMP = K * A * K;
TEMPFLIPCOL = [TEMP(:,1), fliplr(TEMP(:,2:N))];
TEMPFLIPROW = [TEMP(1,:), flipud(TEMP(2:N,:))];
TEMPFLIPRC = [TEMPFLIPCOL(1,:), flipud(TEMPFLIPCOL(2:N,:))];
B = (1/2) * (TEMP + TEMPFLIPCOL + TEMPFLIPROW - TEMPFLIPRC);
temp = (1/N) * (1/N) * K * B * K;
tempFLIPCOL = [temp(:,1), fliplr(temp(:,2:N))];
tempFLIPROW = [temp(1,:), flipud(temp(2:N,:))];
tempFLIPRC = [tempFLIPCOL(1,:), flipud(tempFLIPCOL(2:N,:))];
AA = (1/2) * (temp + tempFLIPCOL + tempFLIPROW - tempFLIPRC);
MSE = (1/N^2) * sum(sum((AA-A).^2));
RMSE = sqrt(MSE);
PSNR = 20 * log10(255/RMSE);
```

---

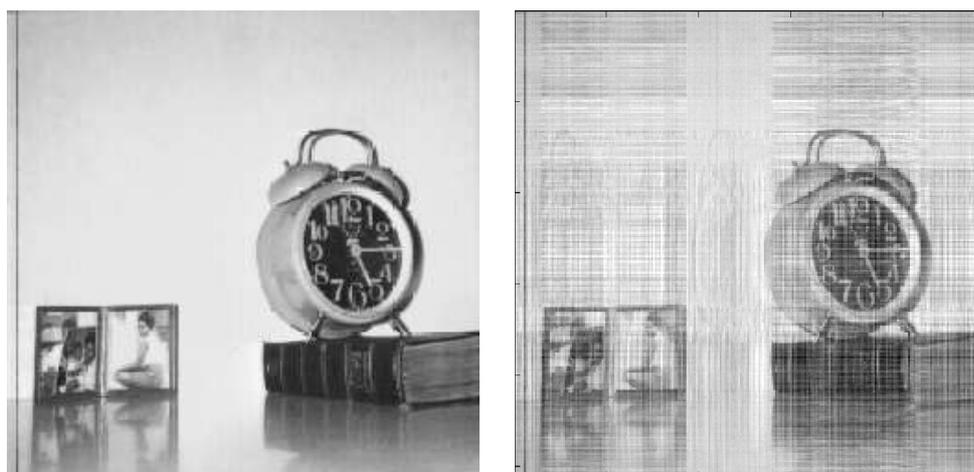
A Tabela 2.1 fornece valores da PSNR de imagens padronizadas após a transformação direta e inversa. O valor final da PSNR é dependente da imagem: o ruído de quantização da operação de arredondamento é influenciado pela morfologia da imagem.



(a) Moon surface



(b) Airplane

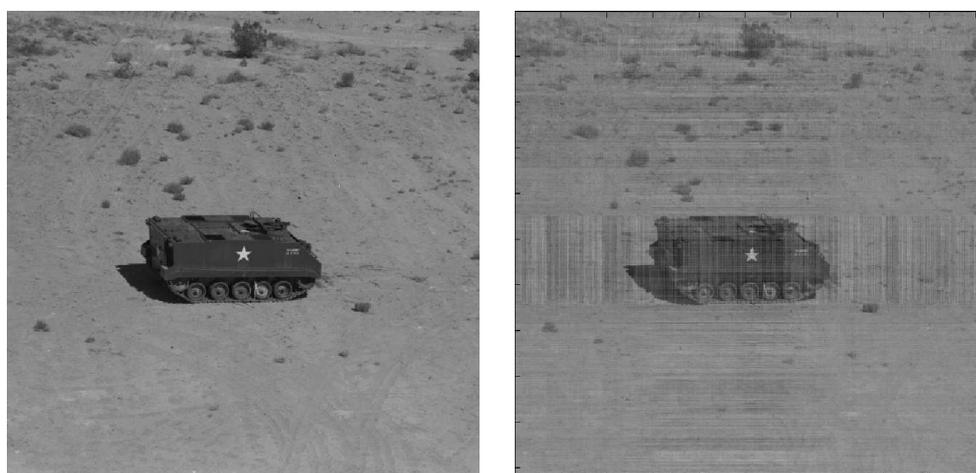


(c) Clock

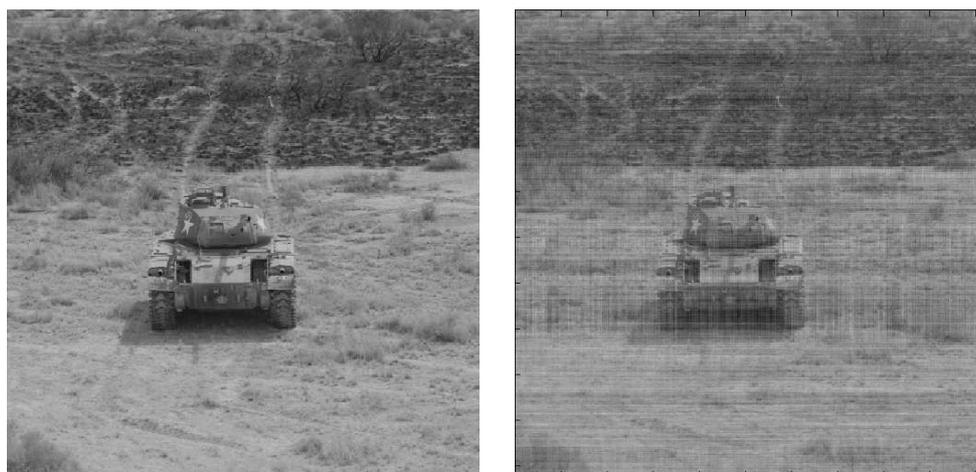
Figura 2.8: À esquerda, a imagem original; e à direita a imagem após a aplicação da transformada de Hartley arredondada direta e inversa.



(a) Aerial



(b) APC

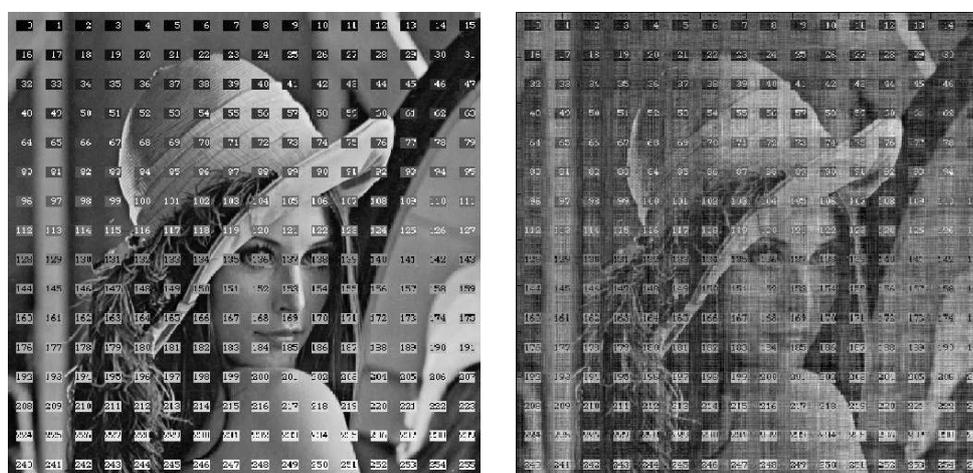


(c) Tank

Figura 2.9: À esquerda, a imagem original; e à direita a imagem após a aplicação da transformada de Hartley arredondada direta e inversa.



(a) Elaine



(b) Padrão de teste de 256 níveis (Lena)

Figura 2.10: À esquerda, a imagem original; e à direita a imagem após a aplicação da transformada de Hartley arredondada direta e inversa.

Tabela 2.1: Valores de PSNR para algumas imagens padronizadas após uma transformação direta e inversa da RHT 2-D. Todas as imagens foram obtidas do *USC-SIPI Image Database* [41]. Em parênteses, o código identificador da imagem no referido banco de dados.

Imagem	Dimensão (pixels)	PSNR (dB)
Moon surface (5.1.09)	256 × 256	26.5522
Airplane (5.1.11)	256 × 256	25.7277
Clock (5.1.12)	256 × 256	20.8538
Aerial (5.2.09)	512 × 512	22.2006
APC (7.1.08)	512 × 512	27.3035
Tank (7.1.09)	512 × 512	24.4590
Elaine (elaine.512)	512 × 512	21.0151
Lena (numbers.512)	512 × 512	18.8121

## 2.5 Conexão com as Transformadas de Fourier e de Hadamard-Walsh

Como observações finais sobre a transformada de Hartley arredondada, são apresentadas algumas relações entre esta nova transformada proposta e outras transformadas.

### 2.5.1 Transformada Discreta de Fourier

Como a transformada discreta de Hartley é completamente isomórfica à transformada discreta de Fourier (Equações 1.5 e 1.6), há, portanto, uma relação entre as duas. Deste modo, utilizando a mesma relação, a transformada de Hartley arredondada pode ser utilizada para fornecer uma estimativa espectral da transformada discreta de Fourier. Novamente, a complexidade multiplicativa de tal estimativa para a DFT seria nula, pois a conversão do espectro discreto de Hartley para o espectro discreto de Fourier consiste apenas de adições e de um escalonamento.

### 2.5.2 Transformada de Hadamard-Walsh

Em [42], foi estabelecida uma relação entre a transformada discreta de Hartley usual e a transformada de Hadamard. Esta conexão foi então utilizada para o desenvolvimento de algoritmos rápidos para a DHT usual [35, 42–44]<sup>4</sup> <sup>5</sup>.

No escopo deste presente trabalho, a seguinte Conjectura é proposta.

**Conjectura 2.3** *Seja  $n$  uma potência positiva de dois. A matriz  $\mathbb{H}_n$  é igual à matriz de transformação de Hadamard-Walsh de mesma ordem, à exceção dos elementos nulos e de permutações de colunas (ou linhas).* ■

Um exemplo vívido de uma permutação de colunas (ignorando os elementos nulos), é fornecida pela comparação entre a matriz de Hartley arredondada  $\mathbb{H}_8$  e a matriz de Hadamard  $\mathbf{Had}_8$ , ambas de ordem  $n = 8$ :

<sup>4</sup>de Oliveira, H. M., de Sobral Cintra, R. J., Campello de Souza, R. M., “The Multilayer Hadamard Decomposition of the Discrete Hartley Transform”, XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Gramado, Brasil, 2000.

<sup>5</sup>de Sobral Cintra, R. J., de Oliveira, H. M., Campello de Souza, R. M., “Um Algoritmo Bifuncional para a Avaliação dos Espectros de Hadamard e Hartley”, XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Fortaleza, Brasil, 2001.

Tabela 2.2: Permutação de Colunas em Binário

Posição Inicial	Posição Final	Reversão dos bit
000	000	Sim
001	100	Sim
010	010	Sim
011	110	Sim
100	001	Sim
101	101	Sim
110	111	Não
111	011	Não

$$\mathbb{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & - & - & - & 0 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 0 & - & - & - & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{Had}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & - \\ 1 & 1 & - & - & - & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & 1 & 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 & - & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

A matriz  $\mathbf{Had}_8$  é convertida (sob as condições da Conjectura 2.3) em  $\mathbb{H}_8$  através da seguinte permutação de colunas:

$$(1)(2,5)(3)(4,7,8)(6). \quad (2.35)$$

Iniciando a contagem das colunas do zero e convertendo seu número para binário, esta permutação fica descrita como na Tabela 2.2. Uma característica interessante é a presença quase total da propriedade de reversão dos bits do número em binário representativo da coluna.

## 2.6 Conclusões

Uma nova transformada livre de multiplicações foi obtida a partir da transformada discreta de Hartley usual. Esta nova transformada — a transformada de Hartley arredondada — constitui uma proposta de estimador espectral computacionalmente eficiente para o espectro discreto de Hartley.

Apesar da RHT não manter a propriedade involucional da DHT, foi observada a presença de propriedades particulares decorrentes do conceito de periodicidade de matrizes. Durante a definição e estudo desta nova transformada, novos conceitos, como o de inversão aproximada, foram introduzidos. Tais estruturas são inovadoras, sem referência na literatura consultada.

A involução aproximada foi introduzida a partir do conceito de inversão aproximada. Em vez de se usar a inversão exata (matriz inversa), a RHT utiliza a própria matriz de transformação direta para realizar sua inversão. Deste modo, o par transformação direta e inversa utiliza a mesma matriz, com complexidade multiplicativa nula. A RHT foi imediatamente estendida para o caso bidimensional com a introdução da RHT 2-D.

O preço a pagar por algoritmos tão simples, em termos computacionais, é a exatidão. A RHT é um estimador e introduz erros, tanto no cálculo da transformada direta, quando na transformada inversa. No caso bidimensional, foi realizada uma análise quantitativa sobre a degradação gerada pela transformada em imagens padronizadas.

Apesar do erro existente, observa-se que a transformada de Hartley arredondada pode facilmente encontrar aplicações em que tais erros sejam toleráveis. Possivelmente, as áreas destas aplicações incluem:

- Detecção;
- Estimação;
- Decisão.

A RHT é também uma boa candidata em aplicações que exigem o cálculo massivo de estimações espectrais, possivelmente, em tempo-real, haja vista os baixíssimos requisitos computacionais. O método em questão abre um tópico de pesquisa novo, em particular, o projeto de algoritmos de refinamento, possivelmente iterativos, para a obtenção de melhores estimadores.

## Capítulo 3

# A Transformada Aritmética de Hartley<sup>1</sup>

“The whole of arithmetic now appeared within the grasp of mechanism”.

CHARLES BABPAGE (1791–1871)

### 3.1 Perspectiva Histórica: Visão Geral sobre a Teoria

Quando em 1903 o matemático alemão Ernest Heinrich Bruns<sup>2</sup> publicou o artigo *Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens* [46] — trabalho que se tornaria pedra fundamental, teve-se o início formal da pesquisa acerca das Transformadas Aritméticas (AT) — procedimento que utiliza a função de Möbius e apenas adições para o cálculo de determinadas séries (por exemplo, a série de Fourier) e transformadas. A despeito da publicação de Bruns, a técnica da transformada aritmética, a qual será comentada em maiores detalhes a seguir, passou despercebida da comunidade científica, exceto por poucos matemáticos, por muito tempo. Apenas 42 anos após, em Baltimore, E.U.A., o húngaro Aurel Freidrich Wintner<sup>3</sup>, publicou, às suas custas, uma monografia intitulada *An Arithmetical Approach to Ordinary Fourier Series*. Este trabalho apresentava um método aritmético usando as funções de Möbius para se calcular a série de Fourier de funções periódicas de simetria par.

Desde então, a teoria da transformada aritmética entrou novamente em um estado de hibernação que persistiu por mais 43 anos. Entretanto, em 1988, quando o Dr. Donald W. Tufts e o Dr. Angaraih

---

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma compilação dos artigos: (i) de Sobral Cintra, R. J., de Oliveira, H. M., “A Short Survey on Arithmetic Transforms and The Arithmetic Hartley Transform” aceito para publicação na Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações e (ii) de Sobral Cintra, R. J., de Oliveira, H. M., “How to Interpolate in Arithmetic Transform Algorithms”, Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP’02, Orlando, Flórida, E.U.A., 2002 [45].

<sup>2</sup>Bruns (1848-1919) obteve seu doutoramento em 1871 sob a supervisão de Weierstrass and Kummer.

<sup>3</sup>Um fato curioso: Wintner nasceu em 8 de abril de 1903 em Budapeste. No mesmo ano que Bruns publicou o *Grundlinien*. Wintner morreu em 15 de janeiro de 1958 em Baltimore.

G. Sadasiv, independentemente, re-inventaram o procedimento aritmético de Wintner, a teoria foi novamente despertada. Desta vez, num ambiente tecnológico inteiramente novo.

Durante os avanços teóricos objetivando a implementação da transformada aritmética, dois outros pesquisadores tiveram papéis importante: Dr. Oved Shisha, Departamento de Matemática da *University of Rhodes Island*, e Dr. Charles Rader do *Lincoln Laboratories*. Ambos tinham conhecimento prévio sobre a monografia de Wintner e colaboraram com Tufts em várias discussões. Em 1988, *The Arithmetic Fourier Transform* por Tufts e Sadasiv estava sendo publicado na *IEEE Acoustic, Speech, and Signal Processing Magazine* [32].

Uma contribuição significativa veio no começo da década de 1990 quando o Prof. Emérito Dr. Irving S. Reed entra em cena. Embora o Dr. Reed seja melhor conhecido pelos seus trabalho em Codificação — tendo participação decisiva na introdução dos códigos Reed-Muller (1954) e Reed-Solomon (1964) — sua contribuição para a teoria das transformadas aritméticas foi crucial. Em 1990 Reed, Tufts e colaboradores realizam duas contribuições fundamentais [27,31]. No primeiro deste dois trabalhos foi apresentada um versão melhorada da abordagem utilizada por Tufts-Sadasiv, ampliando assim a classe de funções com que a transformada aritmética é capaz de lidar. Neste trabalho [27], o algoritmo da transformada aritmética de Fourier (AFT)<sup>4</sup> é modificado para que a série de Fourier de sinais com simetria ímpar também pudesse ser avaliada.

A segunda contribuição vital, realizada pelo Dr. Reed e colaboradores, veio em 1992 com a publicação de *A VLSI Architecture for Simplified Arithmetic Fourier Transform Algorithm* na *IEEE Transactions on ASSP* [31]. Em realidade vale a pena mencionar que este artigo foi apresentado originalmente na *International Conference on Application Specific Array Processors* realizada em Princeton, E.U.A. em 1990. Como seria de se esperar, a publicação de 1992 atingiu um público vastamente maior, uma vez que foi publicada em revista. Este trabalho representou uma grande melhoria em relação a proposição anterior de algoritmo para a AFT [27]. A versão de 1992 não apenas podia lidar com sinais de qualquer simetria, como foi concebida para ter um melhor desempenho do ponto de vista da eficiência computacional. De fato, Reed *et al.* demonstram que este “novo” algoritmo possuía uma formulação que o tornava idêntico ao método originalmente proposto por Bruns em 1903 (!).

Quando a AFT foi introduzida, houve muitos questionamentos acerca de sua praticidade e realizabilidade [47]. As maiores críticas se dirigiam à excessivamente alta taxa de amostragem requerida pelo algoritmo, ao discretizar um sinal contínuo. Estudos posteriores, conduzidos por Tufts [48], mostraram que tal dificuldade poderia ser superada.

---

<sup>4</sup>Apesar do nome “transformada”, as transformadas aritméticas são simplesmente algoritmos rápidos para suas respectivas transformadas, e não, novas transformadas. Assim, a AFT é um algoritmo para a DFT.

A conversão da AFT unidimensional para o caso bidimensional tornou-se uma questão de tempo. Muitas variantes foram propostas, seguindo as linhas gerais do caso unidimensional [49–54]. Desenvolvimentos adicionais foram conduzidos visando a implementação da AFT com abordagens diferenciadas da “canônica” (Reed) [27, 31]. Uma implementação alternativa, que chama a atenção, propõe uma “*Möbius-function-free AFT*” [55], que, como o nome sugere, elimina a necessidade da função de Möbius do algoritmo. Procedimentos iterativos [56] e adaptativos [57] também foram considerados. Entretanto, a apresentação mais popular da AFT é a encontrada em [27, 58] por Reed.

Embora o objetivo principal e motivação original do método de transformação aritmética seja o cálculo da transformada de Fourier, generalizações adicionais foram realizadas e o procedimento aritmético foi empregado para calcular outras transformadas. Um exemplo disto é a Transformada de Möbius Generalizada [59, 60] proposta e investigada pelo Dr. Luc Knockaert<sup>5</sup>. Ademais, as quatro versões da transformada cosseno foram transladadas para o formalismo do algoritmo aritmético [61].

Nesta tese, é proposto um novo avanço com a definição da Transformada Aritmética de Hartley (AHT) [45]. Este trabalho constitui um esforço na direção de aplicar o procedimento aritmético em outras transformadas trigonométricas, além da transformada de Fourier. A AHT calcula a transformada discreta de Hartley<sup>6</sup>: a transformada real, simétrica, similar a DFT, definida em 1983 por Bracewell<sup>7</sup> em *The Discrete Hartley Transform*, um artigo publicado pela *Journal of Optical Society of America*.

Em 1988, quando a AFT foi re-inventada, o ambiente tecnológico e o estado da arte eram dramaticamente distintos daqueles que Bruns e Wintner encontraram. Facilidades computacionais e eletrônicas para processamento de sinais tornaram possível levar as transformadas aritméticas da categoria de construtos teóricos para implementação. Desde sua introdução em Engenharia, a AFT foi identificada como uma técnica a ser considerada por meio de processamento paralelo e VLSI. Várias implementações foram propostas em [31, 52, 58, 62–72]. As aplicações iniciais da AFT se deram nas áreas de reconhecimento de padrões [73]; medição e instrumentação [74, 75]; processamento digital de sinais, como ferramenta auxiliar para o cálculo da transformada  $z$  [76, 77], processamento de

<sup>5</sup>Departamento de Tecnologia da Informação da Universidade de Ghent, Bélgica.

<sup>6</sup>Ralph Vinton Lyon Hartley (1888-1970) introduziu sua transformada integral de núcleo real em um artigo publicado 1942 no *Proceedings of I.R.E.* A transformada de Hartley relaciona um par de sinais  $f(t) \longleftrightarrow F(v)$  pelas seguintes expressões

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(vt) + \text{sen}(vt))dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(v)(\cos(vt) + \text{sen}(vt))dv.$$

<sup>7</sup>Ronald Newbold Bracewell (1921– ) nasceu em Sidney, Austrália. Engenheiro Eletricista, o professor emérito Bracewell é o maior responsável pela divulgação da transformada de Hartley. Tem contribuições importantes em Microondas, Óptica e no desenvolvimento tecnológico dos radares. Proferiu várias palestras sobre a busca de inteligência extraterrestre.

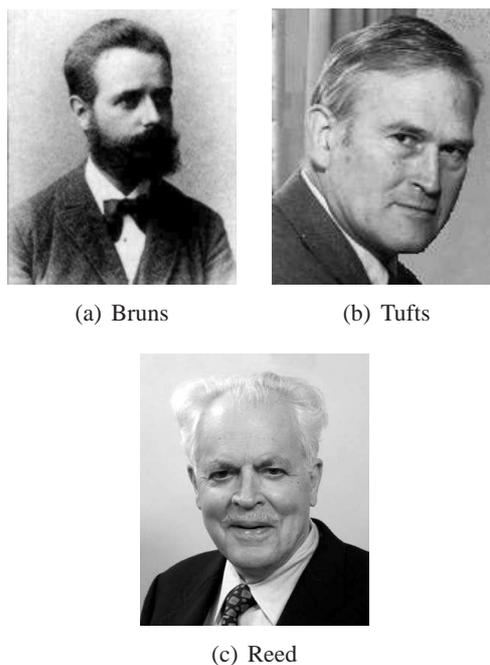


Figura 3.1: Alguns pesquisadores importantes na história dos algoritmos da transformada aritmética.

imagens [78]. Recentemente, a AFT foi considerada como ferramenta para a decodificação de sinais DTMF [79].

No Apêndice C, há uma bibliografia comentada dos trabalhos mais importantes sobre as transformadas aritméticas.

Este capítulo é dividido em duas partes. Na Seção 3.2, é feito um resumo da teoria da transformada aritmética de Fourier. Nessa parte, é apresentada uma revisão da literatura e descrição dos algoritmos existentes mais importantes. Na segunda parte, Seção 3.3, é introduzida a transformada aritmética de Hartley, como contribuição original. As propriedades da AHT são exploradas e suas implicações são examinadas em detalhes. Mostra-se, neste trabalho, a importância e o papel da interpolação como elemento chave para o funcionamento das transformadas aritméticas.

## 3.2 A Transformada Aritmética de Fourier

Nesta seção, serão apresentados os três maiores avanços na técnica da transformada aritmética de Fourier. São brevemente descritos os métodos para a AFT segundo os algoritmos de Tufts, Sadasiv, Reed *et alli*. O foco da discussão será posto nos aspectos teóricos da AFT.

Antes de descrever os algoritmos propriamente ditos, convém um breve preliminar matemático, fornecendo algumas ferramentas que serão em seguida frequentemente chamadas. Em termos notacionais, neste trabalho  $k_1|k_2$  indica que  $k_1$  divide  $k_2$ ;  $[\cdot]$  é a função que retorna a parte inteira de um número e  $[\cdot]$  é a função inteiro mais próximo (arredondamento).

**Lema 3.1** *Sejam  $k, k'$  e  $m$  inteiros.*

$$\sum_{m=0}^{k-1} \cos\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right) = \begin{cases} k & \text{se } k|k', \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.1)$$

e

$$\sum_{m=0}^{k-1} \text{sen}\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right) = 0. \quad (3.2)$$

*Demonstração:* Tomando a expressão  $\sum_{m=0}^{k-1} \left(e^{2\pi j \frac{k'}{k}}\right)^m$ , se  $k|k'$ , então

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left(e^{2\pi j \frac{k'}{k}}\right)^m = \sum_{m=0}^{k-1} 1 = k.$$

Caso contrário, tem-se que

$$\sum_{m=0}^{k-1} \left(e^{2\pi j \frac{k'}{k}}\right)^m = \frac{1 - e^{j2\pi k'}}{1 - e^{j2\pi \frac{k'}{k}}} = 0.$$

Deste modo,

$$\sum_{m=0}^{k-1} e^{2\pi j m \frac{k'}{k}} = \begin{cases} k, & \text{se } k|k', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tomando-se as partes real e imaginária, finaliza-se a demonstração.  $\square$

**Definição 3.1 (Função de Möbius)** *Para um inteiro positivo  $n$ ,*

$$\mu(n) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{se } n = \prod_{i=1}^r p_i, \text{ } p_i \text{ são primos distintos,} \\ 0, & \text{se } p^2|n \text{ para algum primo } p. \end{cases} \quad (3.3)$$

Um lema interessante que utiliza a função de Möbius é enunciado a seguir [14].

**Lema 3.2**

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

**Teorema 3.1 (Fórmula de Inversão de Möbius para Séries Finitas)** *Sejam  $n$  um inteiro positivo e  $f_n$  uma seqüência não-nula para  $1 \leq n \leq N$  e nula para  $n > N$ . Se*

$$g_n = \sum_{k=1}^{\lfloor N/n \rfloor} f_{kn}, \quad (3.5)$$

então

$$f_n = \sum_{m=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(m)g_{mn}. \quad (3.6)$$

■

Este teorema de grande importância para os desenvolvimentos posteriores é conhecido como a versão finita para a Fórmula de Inversão de Möbius [14]. Uma prova deste teorema pode ser obtida em [27]. Para ilustrar este teorema, é fornecido a seguir um pequeno exemplo.

**Exemplo 1** *Considere a seqüência  $\mathbf{f} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ . Uma nova seqüência  $\mathbf{g}$  pode ser obtida pela Equação 3.5:*

$$g_1 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = 36 \quad (3.7)$$

$$g_2 = f_2 + f_4 + f_6 + f_8 = 20 \quad (3.8)$$

$$g_3 = f_3 + f_6 = 9 \quad (3.9)$$

$$g_4 = f_4 + f_8 = 12 \quad (3.10)$$

$$g_5 = f_5 = 5 \quad (3.11)$$

$$g_6 = f_6 = 6 \quad (3.12)$$

$$g_7 = f_7 = 7 \quad (3.13)$$

$$g_8 = f_8 = 8. \quad (3.14)$$

Assim, a seqüência  $\mathbf{g} = [36, 20, 9, 12, 5, 6, 7, 8]$  pode ser invertida com uma aplicação da Equação 3.6, como se segue:

$$\begin{aligned} f_1 &= \mu(1)g_1 + \mu(2)g_2 + \mu(3)g_3 + \mu(4)g_4 + \mu(5)g_5 + \mu(6)g_6 + \mu(7)g_7 + \mu(8)g_8 \\ &= 1 \times 36 + (-1) \times 20 + (-1) \times 9 + 0 \times 12 + (-1) \times 5 + 1 \times 6 + (-1) \times 7 + 0 \times 8 \\ &= 36 - 20 - 9 + 0 - 5 + 6 - 7 + 0 = 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \mu(1)g_2 + \mu(2)g_4 + \mu(3)g_6 + \mu(4)g_8 \\
&= 1 \times 20 + (-1) \times 12 + (-1) \times 6 + 0 \times 8 \\
&= 20 - 12 - 6 + 0 = 2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$f_3 = \mu(1)g_3 + \mu(2)g_6 = 1 \times 9 + (-1) \times 6 = 3 \tag{3.17}$$

$$f_4 = \mu(1)g_4 + \mu(2)g_8 = 1 \times 12 + (-1) \times 8 = 4 \tag{3.18}$$

$$f_5 = \mu(1)g_5 = 1 \times 5 = 5 \tag{3.19}$$

$$f_6 = \mu(1)g_6 = 1 \times 6 = 6 \tag{3.20}$$

$$f_7 = \mu(1)g_7 = 1 \times 7 = 7 \tag{3.21}$$

$$f_8 = \mu(1)g_8 = 1 \times 8 = 8. \tag{3.22}$$

Nas seguintes subseções, serão detalhados os seguintes algoritmos:

- Algoritmo de Tufts-Sadasiv;
- Algoritmo de Reed-Tufts;
- Algoritmo de Reed-Shih.

Essa nomenclatura para tais algoritmos é sugerida nesse trabalho, numa tentativa de organizar e compilar os resultados existentes sobre a AFT.

### 3.2.1 Algoritmo de Tufts-Sadasiv

Considere uma função real par periódica  $v(t)$  expressa por sua série de Fourier, como mostrado:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t). \tag{3.23}$$

As componentes  $v_k(t)$  representam os harmônicos de  $v(t)$ , expressos por:

$$v_k(t) = a_k \cdot \cos(2\pi kt), \tag{3.24}$$

em que  $a_k$  é a amplitude do  $k$ -ésimo harmônico.

Restringe-se, sem perda de generalidade, que  $v(t)$  tem período unitário e média nula ( $a_0 = 0$ ). Ademais, considere que os  $N$  primeiros harmônicos são os únicos significativos. De tal sorte que pode-se tomar  $v_k(t) = 0$ , para  $k > N$  (sinal banda limitada). Assim, o somatório descrito na Equação 3.23 é confinado a apenas  $N$  termos.

**Definição 3.2 (Médias de Tufts-Sadasiv)** A média  $n$ -ésima é definida por

$$S_n(t) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} v\left(t - \frac{m}{n}\right), \quad (3.25)$$

para  $n = 1, 2, \dots, N$ . A função  $S_n(t)$  assume valores nulos para  $n > N$ . ■

Invocando as Equações 3.23 e 3.24 na Equação 3.25, encontra-se que:

$$\begin{aligned} S_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} v\left(t - \frac{m}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(2\pi kt - 2\pi k \frac{m}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{m=0}^{n-1} \left( \cos(2\pi kt) \cos\left(2\pi k \frac{m}{n}\right) + \operatorname{sen}(2\pi kt) \operatorname{sen}\left(2\pi k \frac{m}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt) \cdot \begin{cases} n, & \text{se } n|k, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \sum_{n|k} v_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{mn}(t), \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Procedendo-se desta maneira, tem-se uma expressão da média  $n$ -ésima em termos dos harmônicos de  $v(t)$ , e não de suas amostras (Definição 3.2). Como é assumido que  $v_n(t) = 0, n > N$ , apenas os primeiros  $\lfloor N/n \rfloor$  termos da Equação 3.26 podem assumir valores não-nulos.

Neste ponto, objetiva-se inverter a Equação 3.26. Ou seja, exprimir os harmônicos em termos das médias  $n$ -ésimas, que são, por sua vez, obtidas diretamente das amostras do sinal  $v(t)$ . Esta inversão pode ser realizada através da fórmula de inversão de Möbius.

**Teorema 3.2** Os harmônicos  $v(t)$  são obtidos pela seguinte expressão:

$$v_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) S_{mk}(t), \quad \forall k = 1, \dots, N. \quad (3.27)$$

*Demonstração:* Para provar este resultado, alguma manipulação algébrica se torna necessária. Inicia-se substituindo a Equação 3.26 na Equação 3.27. Assim, encontra-se que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) S_{mk}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmn}(t). \quad (3.28)$$

Após algum algebrismo, vem a parte sutil da prova. Tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) \sum_{n=1}^{\infty} v_{kmn}(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(m) v_{kmn}(t) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) \left( \sum_{m|j/k}^{\infty} \mu(m) \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

De acordo com o Lema 3.2, o somatório interno só pode se anular se  $j/k = 1$ . Em outras palavras, o termo  $v_k(t)$  é o único sobrevivente ao somatório externo. Deste modo, a prova está completa.  $\square$

Após esta formulação teórica, vale a pena ressaltar alguns aspectos deste procedimento [32]:

- Este algoritmo é a versão inicial (no contexto de Engenharia) da AFT e possui uma forte restrição: é capaz de lidar apenas com sinais de simetria par;
- Todos os cálculos realizados utilizam apenas adições, a menos de algumas poucas multiplicações devidas a escalonamentos). Ou seja, a complexidade computacional é dominada pela operação de adição;
- A arquitetura do algoritmo é adequada a técnicas de processamento paralelo. Isto pode ser reconhecido claramente, uma vez que as médias  $n$ -ésimas são calculadas de maneira independente uma das outras;
- O procedimento de Tufts-Sadasiv é inteiramente baseado na representação do sinal em termos de sua série de Fourier, e não de sua transformada discreta de Fourier.

### 3.2.2 Algoritmo de Reed-Tufts

Apresentado em 1990 por Reed *et al.* [27], este algoritmo é uma generalização do método anteriormente proposto por Tufts-Sadasiv. A maior limitação do algoritmo de Tufts-Sadasiv foi removido neste novo algoritmo, de modo que a AFT passou a ser capaz de lidar também com sinais de simetria ímpar. A princípio, este fato permitiu o cálculo dos coeficientes da série de Fourier de funções periódicas arbitrárias.

A descrição do algoritmo de Reed-Tufts se segue. Tomando uma função  $v(t)$  real com período  $T$ , cuja série de Fourier seja finita com  $N$  termos, tem-se que

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \quad (3.30)$$

em que  $a_0$  é o valor médio de  $v(t)$ . Os coeficientes pares e ímpares da série de Fourier são dados por  $a_n$  e  $b_n$ , respectivamente.

Sem perda de generalidade, considerando-se o sinal  $\bar{v}(t)$  como o sinal  $v(t)$  removido de seu valor médio  $a_0$  (valor DC nulo), tem-se, conseqüentemente, que

$$\begin{aligned}\bar{v}(t) &= v(t) - a_0 \\ &= \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Fazendo com que a função  $\bar{v}(t)$  seja submetida a um atraso (deslocamento) temporal de valor  $\alpha T$ , decorre que

$$\begin{aligned}\bar{v}(t + \alpha T) &= \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(2\pi n\left(\frac{t}{T} + \alpha\right)\right) + \sum_{n=1}^N b_n \operatorname{sen}\left(2\pi n\left(\frac{t}{T} + \alpha\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^N c_n(\alpha) \cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N d_n(\alpha) \operatorname{sen}\left(2\pi n\frac{t}{T}\right),\end{aligned}\quad (3.32)$$

em que  $-1 < \alpha < 1$  e

$$c_n(\alpha) = a_n \cos(2\pi n\alpha) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n\alpha), \quad (3.33)$$

$$d_n(\alpha) = -a_n \operatorname{sen}(2\pi n\alpha) + b_n \cos(2\pi n\alpha). \quad (3.34)$$

Após tais preliminares matemáticos, as médias  $n$ -ésimas (Tufts-Sadasiv) são generalizadas em uma nova formulação, como propõe a próxima definição.

**Definição 3.3 (Médias de Reed-Tufts)** *As médias  $n$ -ésimas são expressas por*

$$S_n(\alpha) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{v}\left(\frac{m}{n}T + \alpha T\right), \quad (3.35)$$

em que  $-1 < \alpha < 1$ .

No que se segue, é mostrado uma maneira de se calcular os coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  a partir de  $c_n(\alpha)$ . Para isto, será obtida uma expressão de  $c_n(\alpha)$  em termos das médias  $n$ -ésimas.

**Teorema 3.3** *Os coeficientes  $c_n(\alpha)$  são computados através da fórmula de inversão de Möbius para séries finitas e são expressos por*

$$c_n(\alpha) = \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) S_{ln}(\alpha). \quad (3.36)$$

*Demonstração:* Substituindo o resultado da Equação 3.32 na Equação 3.35, obtem-se:

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^N c_k(\alpha) \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi km}{n}\right) + \sum_{k=1}^N d_k(\alpha) \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi km}{n}\right). \quad (3.37)$$

Uma aplicação direta do Lema 3.1 conduz à seguinte expressão

$$S_n(\alpha) = \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} c_{ln}(\alpha). \quad (3.38)$$

Invocando-se a fórmula de inversão de Möbius para séries finitas (Teorema 3.1), prova-se finalmente o teorema.  $\square$

Neste ponto, torna-se possível enunciar o seguinte resultado.

**Teorema 3.4 (Reed-Tufts)** *Os coeficientes da série de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  são computados por*

$$a_n = c_n(0), \quad (3.39)$$

$$b_n = (-1)^m c_n\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.40)$$

em que  $k$  e  $m$  são determinados pela fatoração  $n = 2^k(2m+1)$ .

*Demonstração:* Para  $\alpha = 0$ , usando a Equação 3.33, mostra-se diretamente que  $a_n = c_n(0)$ .

Para  $\alpha = \frac{1}{2^{k+2}}$  e  $n = 2^k(2m+1)$ , tem-se dois subcasos:  $m$  par ou ímpar.

- Para  $m = 2q$ , tem-se que  $n = 2^k(4q+1)$ . Dessa maneira,

$$2\pi n\alpha = 2\pi \frac{2^k(4q+1)}{2^{k+2}} = 2\pi q + \frac{\pi}{2}. \quad (3.41)$$

Conseqüentemente, substituindo-se esta quantidade na Equação 3.33, tem-se

$$\begin{aligned} c_n\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) &= a_n \cos\left(2\pi q + \frac{\pi}{2}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(2\pi q + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= b_n. \end{aligned} \quad (3.42)$$

- Para  $m = 2q+1$ , segue-se que  $n = 2^k(4q+3)$ . Assim, vem que

$$2\pi n\alpha = 2\pi \frac{2^k(4q+3)}{2^{k+2}} = 2\pi q + \frac{3\pi}{2}. \quad (3.43)$$

Novamente, chamando a Equação 3.33, obtem-se uma nova expressão:

$$\begin{aligned} c_n \left( \frac{1}{2^{k+2}} \right) &= a_n \cos \left( 2\pi q + \frac{3\pi}{2} \right) + \\ &\quad b_n \operatorname{sen} \left( 2\pi q + \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= -b_n. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Unindo estes dois subcasos, pode-se facilmente verificar que

$$b_n = (-1)^m c_n \left( \frac{1}{2^{k+2}} \right). \tag{3.45}$$

□

Em [27], há uma análise detalhada acerca das complexidades aritméticas deste algoritmo. Tais resultados são sumarizados pelas complexidades multiplicativa e aditiva, respectivamente expressas por:

$$M_R(N) = \frac{3}{2}N, \tag{3.46}$$

e

$$A_R(N) = \frac{3}{8}N^2, \tag{3.47}$$

em que  $N$  é o número de harmônicos a ser computado.

### 3.2.3 Algoritmo de Reed-Shih (AFT Simplificada)

Em [58], Reed *et al.* revisitam novamente o algoritmo da AFT propondo novas modificações e simplificações. Surpreendentemente, neste novo método, o modo de se calcular as médias  $n$ -ésimas é redefinido, ficando em total concordância com a teoria originalmente proposta por H. Bruns [46] em 1903.

**Definição 3.4 (Médias Alternantes de Bruns)** A  $2n$ -ésima média alternante de Bruns,  $B_{2n}(\alpha)$ , é definida por

$$B_{2n}(\alpha) \triangleq \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m \cdot v \left( \frac{m}{2n}T + \alpha T \right). \tag{3.48}$$

Fazendo uso das expressões para  $c_n(\alpha)$ , aplicando o Teorema 3.3 e a Definição 3.3, obtem-se prontamente o seguinte teorema.

**Teorema 3.5** *Os coeficientes  $c_n(\alpha)$ , obtidos pela Fórmula de Inversão de Möbius para séries finitas, são expressos por*

$$c_n(\alpha) = \sum_{l=1,3,\dots}^{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor} \mu(l) \cdot B_{2nl}(\alpha). \quad (3.49)$$

*Demonstração:* Vide [31]. □

Neste ponto do desenvolvimento teórico, falta pouco para poder calcular os coeficientes da série de Fourier. Afinal, (i) já foi mostrada uma relação entre as amostra do sinal e as médias alternantes de Bruns e (ii) foi deduzida uma expressão conectando as médias alternantes de Bruns com os coeficientes  $c_n(\alpha)$ . Resta agora mostrar uma formulação que relacione os coeficientes  $c_n(\alpha)$  aos coeficientes da série de Fourier ( $a_n$  e  $b_n$ )

Observando-se a Equação 3.33, duas condições distintas são notadas:

- $a_n = c_n(0)$ .
- $b_n = c_n\left(\frac{1}{4n}\right)$ .

Este é precisamente o elo que faltava. Amalgamando os desenvolvimentos realizados até então, tem-se uma extensão do Teorema 3.5. Tal resultado é mostrado no seguinte teorema.

**Teorema 3.6 (Reed-Shih)** *Os coeficientes da série de Fourier  $a_n$  e  $b_n$  são computados por*

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (3.50)$$

$$a_n = \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(0), \quad (3.51)$$

$$b_n = \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\lfloor \frac{N}{n} \rfloor} \mu(l) (-1)^{\frac{l-1}{2}} B_{2nl}\left(\frac{1}{4nl}\right), \quad (3.52)$$

para  $n = 1, \dots, N$ .

A prova deste teorema segue as mesmas linhas gerais da prova do Teorema 3.4.

Para sinais com  $N$  amostras, as complexidades multiplicativa e aditiva deste algoritmo são expressas, respectivamente, por

$$M_R(N) = N, \quad (3.53)$$

e

$$A_R(N) = \frac{1}{2} N^2. \quad (3.54)$$

Comparando-se o algoritmo da AFT proposto por Reed, Shih *et alli* com a versão Reed-Tufts, é possível identificar avanços significativos. Vale a pena destacar alguns:

- O cálculo dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  apresenta aproximadamente a mesma dificuldade computacional. Deste modo, o algoritmo é mais “balanceado” do que o algoritmo Reed-Tufts.
- Esta versão mantém-se atrativa às implementações que explorem processamento em paralelo.
- A complexidade computacional foi diminuída em relação à complexidade do algoritmo Reed-Tufts.

### 3.2.4 Um Exemplo

Nesta subseção, são feitos alguns comentários acerca do algoritmo Reed-Shih, baseados em um pequeno exemplo.

Considerando-se um sinal  $v(t)$  com período  $T = 1$  s, suponha que se deseja calcular os coeficientes da série de Fourier até o quinto harmônico. Deste modo, pelo algoritmo AFT Reed-Shih, tem-se que os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  da série de Fourier de  $v(t)$  são expressos por

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(0) \\ B_4(0) \\ B_6(0) \\ B_8(0) \\ B_{10}(0) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

e

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2(\frac{1}{4}) \\ B_4(\frac{1}{8}) \\ B_6(\frac{1}{12}) \\ B_8(\frac{1}{16}) \\ B_{10}(\frac{1}{20}) \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Comparando estas formulações com aquelas fornecidas pelo algoritmo Reed-Tufts, verifica-se facilmente o quão “equilibrado” é o cálculo dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ . Ambos os coeficientes são obtidos através de formulações e matrizes bastante similares.

Sem maiores problemas, pode-se construir uma tabela relacionando as Médias Alternantes de Bruns  $B_n(\alpha)$  e os instantes de tempo das amostras do sinal  $v(t)$  necessárias. A Tabela 3.1 mostra que são necessárias pelo menos 40 amostras não-uniformemente espaçadas de  $v(t)$  para que se possa calcular as médias alternantes de Bruns e, então, os coeficientes da série de Fourier.

Tabela 3.1: Amostras necessárias para o cálculo das médias alternantes de Bruns.

Médias Alternantes de Bruns	Instante das amostras (s)
$B_2(0)$	$0, \frac{1}{2}$
$B_4(0)$	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$
$B_6(0)$	$0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$
$B_8(0)$	$0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$
$B_{10}(0)$	$0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}$
$B_2(\frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$
$B_4(\frac{1}{8})$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$
$B_6(\frac{1}{12})$	$\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{4}, \frac{11}{12}$
$B_8(\frac{1}{16})$	$\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}$
$B_{10}(\frac{1}{20})$	$\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{4}, \frac{7}{20}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}, \frac{13}{20}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{19}{20}$

Algumas conclusões podem ser feitas:

- O algoritmo não é prontamente adequado para amostras uniformemente espaçadas;
- Um amostrador uniforme que pudesse obter todas as amostras necessárias teria uma taxa de amostragem muito alta. No exemplo ilustrado, um amostrador uniforme operando em 120Hz deve ser utilizado para se computar os coeficientes da série de Fourier de um sinal banda-limitada de frequência de 1 Hz (!).

Certamente estas observações são negativas e perturbadoras. Levam a por em dúvida a praticidade do método AFT. Entretanto, é importante salientar que este procedimento nos leva ao cálculo *exato* dos coeficientes da série de Fourier. Uma solução empírica para o problema da alta taxa de amostragem é o uso de aproximações. Um procedimento de interpolação baseado em amostras uniformemente obtidas pode ser utilizado para estimar as amostras requeridas pela AFT.

Por exemplo, considerando que o sinal  $v(t)$  em questão foi amostrado por um relógio amostrador com período  $T_0 = \frac{1}{10}$  s. Tem-se disponíveis as seguinte amostras:

$$v(0), v\left(\frac{1}{10}\right), v\left(\frac{2}{10}\right), v\left(\frac{3}{10}\right), v\left(\frac{4}{10}\right), \\ v\left(\frac{5}{10}\right), v\left(\frac{6}{10}\right), v\left(\frac{7}{10}\right), v\left(\frac{8}{10}\right), v\left(\frac{9}{10}\right). \quad (3.57)$$

Conforme a Tabela 3.1, examinando-se, em particular, o cálculo de  $B_4(0)$ , vê-se a necessidade de obter — entre outras — a amostra  $v\left(\frac{1}{4}\right)$ . Pela Expressão 3.57 acima, tem-se que esta amostra não é

disponível. Para suplantarmos essa dificuldade, pode-se empiricamente considerar um procedimento de arredondamento. Assim, usa-se a amostra  $v\left(\frac{3}{10}\right)$  quando o algoritmo solicitar a amostra  $v\left(\frac{1}{4}\right)$ , pois  $\left[\frac{1}{4} \times 10\right] / 10 = 3/10$ . Esta operação de arredondamento também é conhecida como interpolação de ordem zero.

A precisão do algoritmo AFT está associada à taxa de amostragem utilizada para discretizar o sinal em análise. Quanto maior a precisão desejada, maior deve ser a taxa de amostragem. Deste modo, a operação de arredondamento (interpolação) introduz menores erros.

Interpolações de ordens mais elevadas (por exemplo, interpolação de primeira ordem) fornecem estimativas mais precisas dos coeficientes da série de Fourier. Por outro lado, tais interpolações resultam em um aumento da complexidade do algoritmo. Há um compromisso entre a precisão e a ordem da interpolação.

Para sinais amostrados à taxa de Nyquist ou próximo, a interpolação de ordem zero já oferece resultados bastante atrativos [27]. Uma análise detalhada do erro dos esquemas de interpolação pode ser encontrada em [27,61,76,80]. Comentários ampliando este assunto também são expostos em [58].

### 3.3 Uma Nova Transformada Aritmética

Uma busca detalhada na literatura existente não revelou nenhuma menção a uma possível “Transformada Aritmética de Hartley” para computar os coeficientes da série de Hartley ou a transformada discreta de Hartley. Tal fato motivou a investigação pela definição de tal procedimento.

Nesta seção, os resultados acerca da transformada aritmética de Hartley são delineados. Como será mostrado, a introdução da AHT foi crucial para o esclarecimento de alguns aspectos das transformadas aritméticas, em particular o papel do processo de interpolação. Neste trabalho, é demonstrado matematicamente que a interpolação é mais do que um artifício para aproximar amostras não-existentes. Em realidade, a interpolação determina a transformada aritmética.

Será utilizada uma nova abordagem para o desenvolvimento teórico da transformada aritmética. Em vez de considerar um sinal  $v(t)$  que foi discretizado segundo uma taxa de amostragem, a definição da AHT será baseada em um sinal puramente discreto. Deste modo, o ponto de partida para a AHT é a transformada discreta e não a expansão em série, como foi feito no desenvolvimento da AFT. Esta abordagem é filosoficamente atrativa, pois em última análise uma transformada discreta simplesmente associa um vetor a outro, daí a motivação de eliminar considerações sobre amostragem de sinal.

### 3.3.1 Transformada Aritmética de Hartley

A definição da transformada aritmética de Hartley seguirá os mesmos passos utilizados para construir os primeiros algoritmos da AFT. Assim, o Lema 3.1 será reformulado em termos da função de Hartley e será realizada então a definição das médias, à luz da transformada discreta de Hartley.

**Lema 3.3 (Propriedade Fundamental)** *A função  $\text{cas}(\cdot)$  satisfaz*

$$\sum_{m=0}^{k-1} \text{cas}\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right) = \begin{cases} k, & \text{se } k|k', \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.58)$$

Demonstração: *A prova segue diretamente do Lema 3.1.* □

De modo a desenvolver um algoritmo aritmético para a transformada discreta de Hartley, é necessária a definição de médias  $S_k$  calculadas dos elementos do sinal discreto no domínio do tempo.

**Definição 3.5** *Seja  $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})^T$  um sinal  $N$ -dimensional discreto no domínio do tempo. As médias  $k$ -ésimas são expressas por*

$$S_k \triangleq \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} v_{m \frac{N}{k}}, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (3.59)$$

É interessante notar que esta definição requer elementos do sinal discreto em índices fracionários. Algo bastante perturbador, afinal têm-se apenas componentes de índice inteiro. A necessidade de componentes de índice não-inteiro parece fazer com que maiores considerações sejam impraticáveis. Entretanto, esta questão será endereçada novamente mais adiante, por enquanto será admitido que os coeficientes de índice fracionários possam ser obtidos de alguma maneira.

Seguindo o desenvolvimento, tem-se que uma aplicação da transformada discreta de Hartley inversa em  $v_{m \frac{N}{k}}$  na Equação 3.59 leva ao seguinte resultado:

$$S_k = \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{N-1} V_{k'} \sum_{m=0}^{k-1} \text{cas}\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right), \quad (3.60)$$

em que  $V_k$  são as componentes do vetor transformada discreta de Hartley de  $\mathbf{v}$ . Utilizando o Lema 3.3, tem-se diretamente que:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{k} \sum_{k'=0}^{N-1} V_{k'} \sum_{m=0}^{k-1} \text{cas}\left(2\pi m \frac{k'}{k}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} V_{sk}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Por simplicidade e sem perda de generalidade, será considerado um sinal  $\mathbf{v}$  com valor médio nulo, i.e.,  $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i = 0$ . Esta consideração não produz qualquer influência nos valores de  $V_k$ ,  $k \neq 0$ . Assim, a transformada aritmética de Hartley pode ser obtida pelo uso da fórmula de inversão de Möbius para séries finitas [27]. De acordo com o Teorema 3.1, o seguinte resultado pode ser encontrado.

**Teorema 3.7 (Baseado em Reed *et alli*)** *Se*

$$S_k = \sum_{s=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} V_{sk}, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (3.62)$$

então

$$V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S_{kl}, \quad (3.63)$$

em que  $\mu(\cdot)$  é a função de Möbius. ■

Com este teorema, é possível calcular as componentes espectrais da transformada discreta de Hartley através das médias  $k$ -ésimas.

Para fins ilustrativos, será avaliada a DHT para um sinal discreto com oito elementos. Usando a Equação 3.63 do Teorema 3.7, obtém-se a seguinte construção.

$$V_1 = S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 - S_7, \quad (3.64)$$

$$V_2 = S_2 - S_4 - S_6, \quad (3.65)$$

$$V_3 = S_3 - S_6, \quad (3.66)$$

$$V_4 = S_4, \quad (3.67)$$

$$V_5 = S_5, \quad (3.68)$$

$$V_6 = S_6, \quad (3.69)$$

$$V_7 = S_7. \quad (3.70)$$

A componente espectral  $V_8 = V_0$  pode ser diretamente calculada a partir do sinal  $\mathbf{v}$ , pois ela representa simplesmente o valor médio do sinal  $V_8 = \frac{1}{8} \sum_{m=0}^7 v_m$ . Na Figura 3.2, é mostrado um diagrama de como o cálculo das componentes espectrais pode ser feito.

Com o Teorema 3.7, todas as estruturas matemáticas para se calcular o espectro de Hartley foram estabelecidas. Por completicidade, a transformada aritmética inversa de Hartley também pode ser definida. De modo inteiramente análogo, tem-se o seguinte resultado.

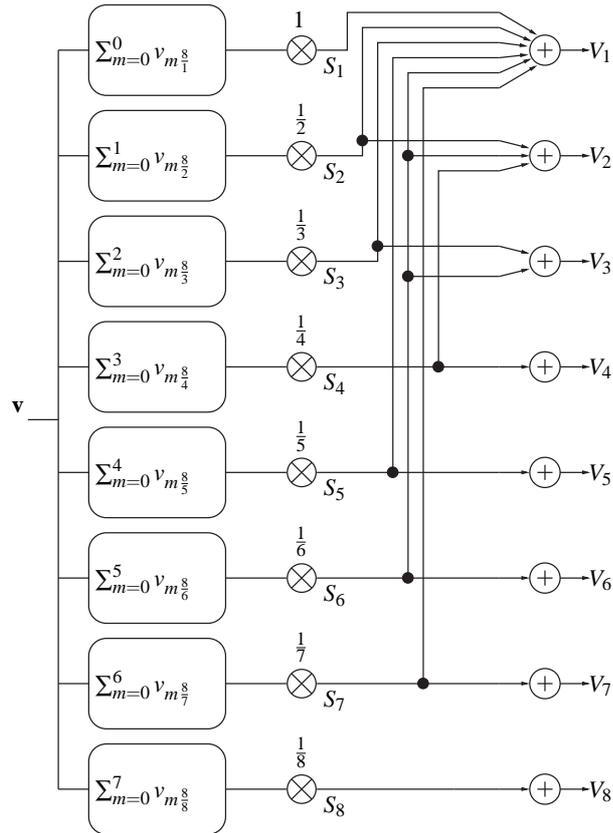


Figura 3.2: Diagrama para o cálculo da AHT para  $N = 8$ . As caixas fornecem as médias  $k$ -ésimas, seguidas de uma série de simples escalonamentos. Ao fim, um arranjo para se levar em conta a função de Möbius.

**Corolário 3.1** As componentes da transformada discreta de Hartley inversa

podem ser calculadas por

$$v_i = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/i \rfloor} \mu(l) \sigma_{il}, \quad (3.71)$$

em que  $\sigma_i \triangleq \frac{1}{i} \sum_{m=0}^{i-1} V_{m \frac{N}{i}}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . ■

Ao se examinar os resultados encontrados, um fato intrigante chama a atenção: *mutatis mutandis*, a transformada aritmética de Fourier tem equações praticamente idênticas àquelas que foram obtidas para a transformada aritmética de Hartley! Basta que se compare as Equações 3.26 e 3.62. A Equação 3.26 representa uma versão infinita e a Equação 3.62 uma versão finita do mesmo conceito. Segue-se então uma pergunta natural: se as equações são as *mesmas*, que espectro está realmente sendo calculado?

Tal questionamento será endereçado na próxima seção à medida que os mecanismos subjacentes da transformada aritmética são esclarecidos. Assim, ao leitor é solicitado que, por enquanto, coloque esta “dificuldade” de lado. Resumindo, até este ponto, tem-se acumulado dois problemas:

- Como lidar com índices fracionários e encontrar componentes vetoriais com um índice fracionário;
- Como duas transformadas aritméticas distintas podem ter a mesma formulação.

Interessantemente, ambas as questões tem a mesma resposta.

De modo geral, um algoritmo para a transformada aritmética pode ser condensado em quatro passos mais importantes:

1. Geração de índices, i.e., obtenção dos índices necessários para os componentes do sinal em análise (amostras):  $m\frac{N}{k}$ ;
2. Obtenção das amostras de índice fracionário;
3. Cálculo de médias:  $S_k \triangleq \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} v_{m\frac{N}{k}}$ ;
4. Uso da fórmula de inversão de Möbius e obtenção do espectro:  $V_k = \sum_{l=1}^{\lfloor (N-1)/k \rfloor} \mu(l) S_{kl}$ .

O foco deste trabalho é concentrado no passo dois. Na seqüência, é derivado um modelo matemático que detalha a importância e o papel da obtenção das amostras de índice fracionário.

### 3.3.2 Interpolação

A teoria das transformadas aritméticas usualmente lida com aproximações utilizando interpolações lineares ou de ordem zero [27,31,77]. Tais aproximações são utilizadas de modo empírico, como um meio simples de se encontrar amostras de índice fracionário.

Nesta seção, é introduzido um método abrangente para calcular componentes vetoriais com índices fracionários,  $v_r$ ,  $r \notin \mathbb{N}$ , baseado em um processo de interpolação usando as componentes vetoriais conhecidas (amostra de índice inteiro). É mostrado também que a interpolação de ordem zero, tradicionalmente utilizada, é em verdade um caso particular do procedimento geral aqui proposto.

#### Interpolação Ideal

Considerando um vetor  $N$ -dimensional  $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_{N-1})^T$ , observa-se que valores da forma  $v_r$ ,  $r \notin \mathbb{N}$  são não-existent. Entretanto, aceitando que seja possível a existência de tais componentes  $v_r$ , seus valores podem ser determinados pelo uso da transformada discreta de Hartley. Basta que se

aplique a DHT inversa, exprimindo  $v_r$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 v_r &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V_k \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi kr}{N} \right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi ki}{N} \right) \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi kr}{N} \right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} v_i \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi ki}{N} \right) \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi kr}{N} \right),
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

em que  $V_k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  são as componentes da DHT de  $\mathbf{v}$ .

Definindo a *função peso* de Hartley por

$$w_i(r) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi ki}{N} \right) \operatorname{cas} \left( \frac{2\pi kr}{N} \right), \quad i = 0, \dots, N-1, \tag{3.73}$$

tem-se que o valor do sinal para um índice fracionário pode ser dado por uma interpolação de ordem  $N$  expressa por

$$v_r \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} w_i(r) \cdot v_i. \tag{3.74}$$

Uma análise da função peso de Hartley revela que se  $r$  for um número inteiro, pelas propriedades de ortogonalidade da função  $\operatorname{cas}(\cdot)$ , tem-se que

$$w_i(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = r, \\ 0, & \forall i \neq r. \end{cases} \tag{3.75}$$

Deste modo, como esperado, não há necessidade de qualquer processo de interpolação.

Caso fosse considerado um outro núcleo de transformação, o procedimento seria inteiramente análogo. Assim, cada transformação está associada a uma função peso particular. Conseqüentemente, cada transformação exige uma forma diferente de se interpolar. A transformada aritmética permite concentrar no processo de interpolação a essência da transformada.

Considerando outros núcleos de transformação, tais como cosseno e seno, pode-se encontrar expressões para suas funções peso. Assim, após alguma manipulação trigonométrica, os pesos de interpolação podem ser expressos em formas fechadas. Denotando a função de amostragem  $\operatorname{Sa}(\cdot)$ ,  $\operatorname{Sa}(x) \triangleq \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ , tem-se a seguinte proposição.

**Proposição 3.1** *As transformadas de Fourier cosseno, de Fourier seno e de Hartley de comprimento  $N$  têm suas funções peso (funções de interpolação) dadas, respectivamente, por*

*Núcleo de Fourier cosseno*

$$w_i(r) = \frac{1}{2N} + \frac{N-1/2}{N} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N}2\pi(i-r)\right)}{\text{Sa}(\pi(i-r)/N)} + \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N}2\pi(i+r)\right)}{\text{Sa}(\pi(i+r)/N)} \right\}, \quad (3.76)$$

Núcleo de Fourier seno

$$w_i(r) = \frac{N-1/2}{N} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N}2\pi(i-r)\right)}{\text{Sa}(\pi(i-r)/N)} - \frac{1}{2} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N}2\pi(i+r)\right)}{\text{Sa}(\pi(i+r)/N)} \right\}, \quad (3.77)$$

Núcleo de Hartley

$$w_i(r) = \frac{1}{2N} + \frac{N-1/2}{N} \frac{\text{Sa}\left(\frac{N-1/2}{N}2\pi(i-r)\right)}{\text{Sa}(\pi(i-r)/N)} + \frac{1}{2N} \cot\left(\frac{\pi(i+r)}{N}\right) - \frac{1}{2N} \frac{\cos\left(\frac{N-1/2}{N}2\pi(i+r)\right)}{\text{sen}(\pi(i+r)/N)}. \quad (3.78)$$

Demonstração: *Estes resultados decorrem do uso de identidades trigonométricas [1] nas seguintes expressões, respectivamente:*

$$w_i(r) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi ki}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi kr}{N}\right), \quad (3.79)$$

$$w_i(r) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{sen}\left(\frac{2\pi ki}{N}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi kr}{N}\right), \quad (3.80)$$

$$w_i(r) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{cas}\left(\frac{2\pi ki}{N}\right) \text{cas}\left(\frac{2\pi kr}{N}\right). \quad (3.81)$$

□

Para ilustrar o comportamento das funções peso, na Figura 3.3, são mostradas duas funções peso utilizadas para calcular as amostras  $v_{10,1}$  e  $v_{10,5}$ , para a transformada aritmética de Hartley de comprimento 32. Para o cálculo de  $v_{10,1}$ , observa-se praticamente um pulso unitário em torno da amostra  $v_{10}$ . Isto é esperado, pois 10,1 é relativamente próximo de 10. No caso extremo, o cálculo de  $v_{10,5}$ , a função peso de Hartley assume uma forma totalmente distinta. Para melhor descrever o comportamento das funções peso, foi gerada a Figura 3.4. Esta figura mostra os valores dos pesos de interpolação para vários valores de  $r$  para os núcleos de Fourier cosseno e de Hartley, numa transformada de comprimento 16. Tais famílias de curvas representam os valores de  $w_i(r)$  computados para  $r = 0, 0,1 \dots 15$  e  $i = 0 \dots 15$ . Através de observação computacional, encontra-se que os máximos locais valem 0,5 e os máximos globais em  $i = r = 0$  ou  $i = r = N/2 = 8$  (pico central) são unitários.

Com a Proposição 3.1, tem-se formas fechadas que completam a descrição matemática do algoritmo da transformada aritmética. As expressões até agora obtidas fornecem o valor *exato* das componentes espectrais de um sinal sob análise. As funções peso têm complexidade computacio-

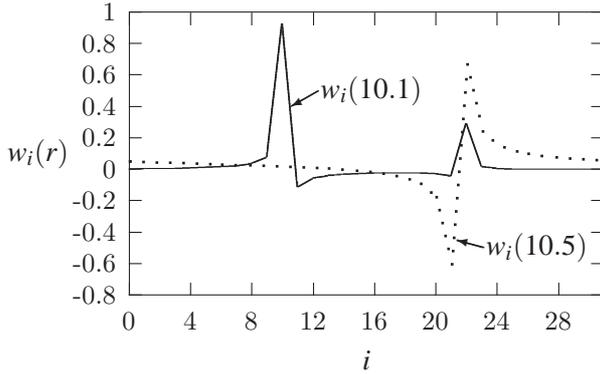


Figura 3.3: Funções peso de Hartley utilizadas para interpolar  $v_{10,1}$  e  $v_{10,5}$  (transformada de comprimento  $N = 32$ ).

nal extremamente elevada e similar à complexidade do cálculo da transformada pela sua definição,  $V_k = \sum_{i=0}^{N-1} v_i \cos\left(\frac{2\pi}{N} ki\right)$ . Há, portanto, a necessidade de se implementar um meio para reduzir a complexidade computacional do método.

### Interpolação Não-Ideal

Como foi visto, a transformada aritmética impõe uma amostragem não-uniforme segundo a expressão

$$m \frac{N}{k}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad m = 0, \dots, k-1. \quad (3.82)$$

Em [47], pode-se encontrar uma demonstração de que o número de pontos  $D_N$  exigidos pelo método é muito elevado e pode ser expresso por

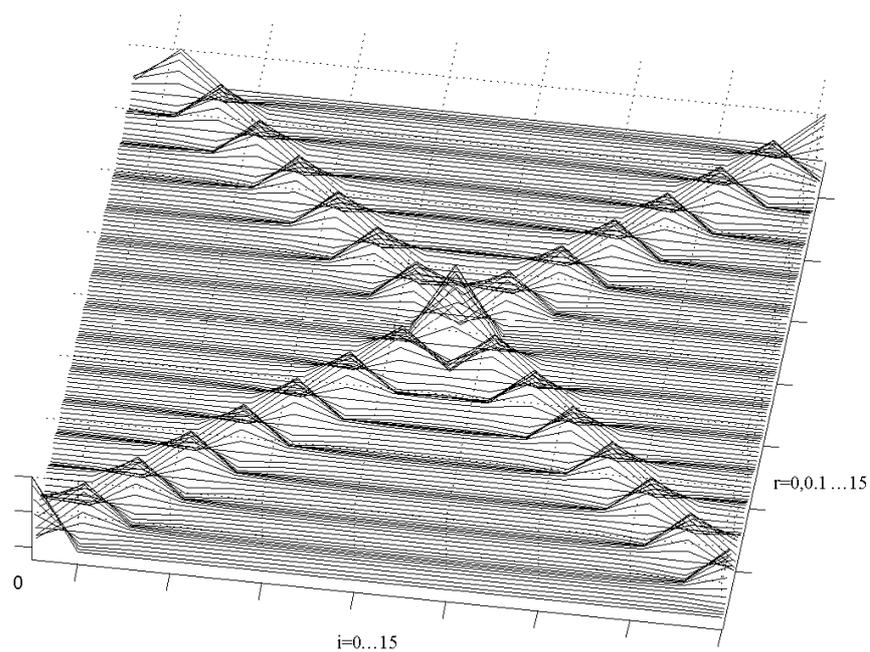
$$D_N = \sum_{n=1}^N \phi(n) \approx 3 \left(\frac{N}{\pi}\right)^2 + O(N \log N), \quad (3.83)$$

em que  $N$  é o comprimento da transformada e  $\phi(\cdot)$  é a função  $\phi$  de Euler. Adicione-se a isto, o fato de que as próprias funções peso propostas neste trabalho representam esforços computacionais altos.

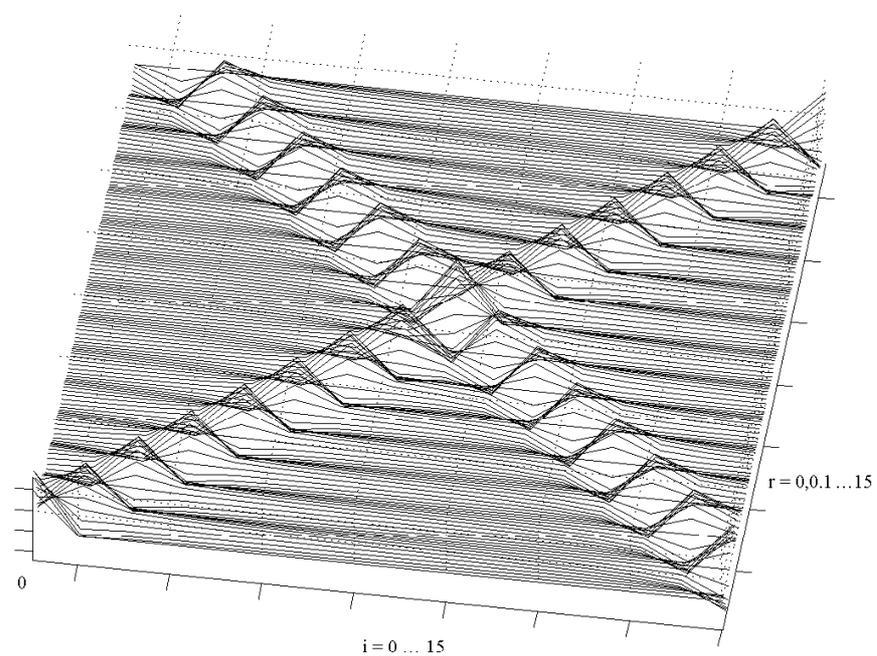
Para mitigar estes efeitos negativos, nesta seção, serão explorados formas aproximadas para as funções peso. A partir da formulação puramente discreta para a transformada aritmética, é possível encontrar formas fechadas relativamente simples para as funções de interpolação.

Para tal, será assumida a hipótese de que o comprimento de bloco é elevado, i.e.,  $N \rightarrow \infty$ . Esta consideração possibilita a simplificação das funções peso, obtendo-se funções de interpolação assintóticas. Tal resultado é trazido na seguinte proposição.

**Proposição 3.2** *Aproximações contínua das funções peso para os núcleos de Fourier cosseno, de Fourier seno e de Hartley são dadas, respectivamente, por:*



(a) Núcleo de Fourier Cosseno



(b) Núcleo de Hartley

Figura 3.4: (a) Função peso para o núcleo de Fourier cosseno. Observe que cada curva vale essencialmente zero, exceto em  $i \approx r$  e  $i \approx N - r$ . (b) Função peso para o núcleo de Hartley.

Núcleo de Fourier cosseno

$$\hat{w}_i(r) \approx \frac{\text{Sa}(2\pi(i-r))}{2} + \frac{\text{Sa}(2\pi(i+r))}{2}, \quad (3.84)$$

Núcleo de Fourier seno

$$\hat{w}_i(r) \approx \frac{\text{Sa}(2\pi(i-r))}{2} - \frac{\text{Sa}(2\pi(i+r))}{2}, \quad (3.85)$$

Núcleo de Hartley

$$\hat{w}_i(r) \approx \text{Sa}(2\pi(i-r)) + \frac{1 - \cos 2\pi r}{2\pi(i+r)}. \quad (3.86)$$

*Demonstração:* Este resultado é encontrado através do cálculo de

$$\lim_{N \rightarrow \infty} w_i(r) \quad (3.87)$$

para as fórmulas fechadas apresentadas na Proposição 3.1.  $\square$

Interessantemente, as expressões assintóticas das funções peso podem ser escritas em termos da função de amostragem  $\text{Sa}(\cdot)$ . Dado que o operador “transformada de Hilbert” seja disponível, a função peso de Hartley assintótica é dada por

$$\hat{w}_i(r) \approx \text{Sa}(2\pi(i-r)) - \mathcal{H}il \left\{ \text{Sa}(2\pi(i+r)) \right\}, \quad (3.88)$$

ou alternativamente,

$$\hat{w}_i(r) \approx \text{Sa}(2\pi(i-r)) - \text{Ca}(2\pi(i+r)) - \mathcal{H}il \left\{ \delta(2(r+i)) \right\}, \quad (3.89)$$

em que  $\mathcal{H}il$  denota a transformada de Hilbert,  $\text{Ca}(x) \triangleq \frac{\cos x}{x}$  e  $\delta(x)$  é o impulso delta de Dirac.

**Revisitando a Interpolação de Ordem Zero.** A interpolação de ordem zero é realizada por um simples arredondamento da parte fracionária para o inteiro mais próximo. Este procedimento é largamente utilizado nos algoritmos de Reed e de modo geral nas transformadas aritméticas. Aqui será dado um novo enfoque a este procedimento.

Classicamente, a interpolação de ordem zero é utilizada, porque é simples, rápida e de baixo-custo, oferecendo um meio empírico de se contornar os índices fracionários. Neste trabalho, mostra-se que a interpolação de ordem zero representa muito mais que isto.

Através de interpolação de ordem zero, uma componente não disponível pode ser estimada (interpolada) por  $\hat{v}_j$  através da seguinte formulação:

$$\hat{v}_j = v_{[j]}, \quad (3.90)$$

em que  $[\cdot]$  retorna o inteiro mais próximo de seu argumento. Examinando o comportamento assintótico da função peso de Fourier cosseno, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \hat{w}_i(r) &\approx 0 \quad \forall i \neq [r], N - [r], \\ \hat{w}_{[r]}(r) &\approx \frac{\text{Sa}(2\pi([r] - r))}{2} \approx \frac{1}{2}, \\ \hat{w}_{N-[r]}(r) &\approx \frac{\text{Sa}(2\pi([r] - r))}{2} \approx \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

em que  $[r] \approx r$ . Com estes resultados, a Equação 3.74 fornece uma expressão simplificada para a interpolação:

$$\hat{v}_r \approx w_{[r]}(r)v_{[r]} + w_{N-[r]}(r)v_{N-[r]} \quad (3.92)$$

$$\approx \frac{1}{2}v_{[r]} + \frac{1}{2}v_{N-[r]}. \quad (3.93)$$

Assim, para sinais pares,  $v_k = v_{N-k}$ , tem-se que a componente obtida pelo processo de interpolação é aproximada por  $\hat{v}_r \approx v_{[r]}$ . Esta observação é crucial. À luz deste desenvolvimento, tem-se uma nova explicação para a incapacidade das transformadas aritméticas de lidarem diretamente com sinais ímpares. Por exemplo, o método Tufts-Sadasiv só pode analisar sinais pares. A justificativa apresentada neste trabalho é a seguinte:

1. Para contornar o elevado número de amostras, a interpolação de ordem zero foi utilizada de maneira empírica;
2. Como foi mostrado aqui, as interpolações são associadas às transformações. Em particular, a interpolação de ordem zero é a aproximação da função peso de Fourier cosseno, como mostram as Equações 3.91;
3. Assim, arredondamento implica em calcular a transformada de Fourier cosseno. Portanto, a análise resultante oferece apenas os coeficientes pares da série de Fourier, ou a parte par do espectro de Fourier (Fourier cosseno).

Este ponto de vista sobre as transformadas aritméticas não encontra similares na literatura consultada. Esta explicação para a dificuldade de analisar sinais ímpares pavimenta o caminho seguido em

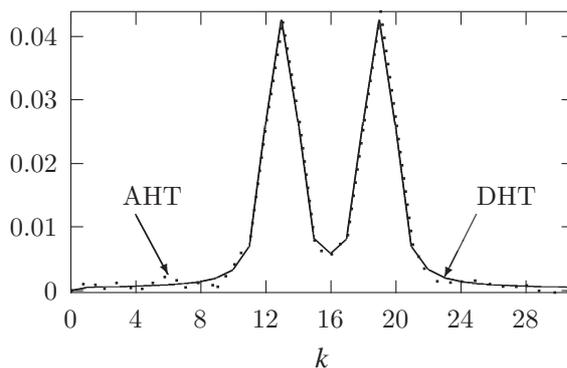


Figura 3.5: Comparação entre os espectros discretos de Hartley calculados pela DHT (linha cheia) e pela AHT (linha pontilhada). A função utilizada foi  $f(t) = \cos(90\pi t) \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$ ,  $t = 0 \dots 1$ ,  $N = 32$ .

trabalhos anteriores [27, 31, 32] e fornece uma interpretação possivelmente mais simples.

**Ordem da Interpolação.** Uma maneira simples de gradualmente aprimorar o processo de interpolação é reter apenas os  $m$  valores mais significativos de  $w_i(r)$ , anulando os restantes. Para a interpolação de ordem zero, tem-se  $m = 1$  para a função peso de Fourier cosseno. Agrupando-se os índices dos  $m < N$  valores mais significativos da função peso em um conjunto  $M_m$ , uma interpolação não-ideal fica expressa por:

$$\hat{v}_r = \frac{1}{\eta} \sum_{i \in M_m} w_i(r) \cdot v_i, \quad (3.94)$$

em que  $\eta \triangleq \sum_{j \in M_m} w_j(r)$  é apenas um fator de normalização.

A Figura 3.5 exibe o espectro discreto de Hartley de comprimento 32 de uma função particular (a) avaliado pela DHT e (b) pela AHT. Neste caso, foi utilizada interpolação assintótica com  $m = 2$

### 3.4 Conclusões

Este capítulo traz uma breve descrição dos métodos existentes para as transformadas aritméticas. Cada um dos métodos mais importantes para a transformada aritmética unidimensional foi comentado e comparado.

Como contribuição original, tem-se a definição da transformada aritmética de Hartley. Esta definição revelou um dos pontos-chaves da transformada aritmética: o processo de interpolação. Foi demonstrado que as equações fundamentais da Teoria Aritmética são essencialmente as mesmas independente da transformada em questão. Foi justificado que a interpolação, em verdade, é que determina o tipo de transformação. Foi explicado, de modo original, o porquê do método Tufts-Sadasiv ser apenas capaz de lidar com sinais pares. O arredondamento utilizado empiricamente induz a transformada Fourier cosseno.

Como a interpolação define a transformação, tem-se que a implementação de transformadas discretas, à luz das transformadas aritméticas, abre caminho para “algoritmos universais”. Neste tipo de proposição, para diferentes transformadas, tem-se circuitos idênticos, exceto pelo módulo de interpolação.

## Capítulo 4

# Autofunções de Transformadas Integrais de Núcleo de Fourier<sup>1</sup>

Neste capítulo será feita uma investigação sobre as funções invariantes a algumas transformadas integrais. Como será evidenciado, esse exercício é o alicerce para uma futura criação de uma nova classe de algoritmos de transformação: expansão em autofunções.

Posteriormente, os resultados deste estudo referentes à transformada de Fourier serão conectados com o Princípio da Incerteza, motivando a proposição do conceito de *isoresolução* a ser visto no Capítulo 5.

### 4.1 Pontos Fixos de uma Transformada

Interpretando uma transformada integral  $\mathcal{T}$  como um operador linear em um espaço de funções, pode-se inquirir sobre quais são as funções  $f$  que satisfazem:

$$\mathcal{T}\{f\} = \lambda f, \tag{4.1}$$

em que  $\lambda$  é um escalar denominado autovalor. Tais funções, se existirem, são denominadas de autofunções da transformada  $\mathcal{T}$ .

Há algumas funções bem conhecidas que satisfazem esta condição para transformadas específicas. Por exemplo, é sabido que a função gaussiana (pulso gaussiano) é a transformada de Fourier de si mesma.

---

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma ampliação de uma parte do artigo: Soares, L. R., de Oliveira, H. M., de Sobral Cintra, R. J., Campello de Souza, R. M., “*Fourier Eigenfunctions, Gabor Uncertainty Principle, and Isoresolution Wavelets*”, XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003 [81].

**Definição 4.1** Uma transformada integral  $\mathcal{T}$  tem período  $n \in \mathbb{N}$ , se para uma função  $f$ , vem que

$$\underbrace{\mathcal{T} \mathcal{T} \mathcal{T} \dots \mathcal{T} f}_{n \text{ transformações repetidas}} \triangleq \mathcal{T}^{(n)} f = f. \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Pontos Fixos da Transformada de Fourier

Neste capítulo, a seguinte definição para a transformada de Fourier será empregada:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(s) = F(s) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-j2\pi st) dt, \quad (4.3)$$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(s) \exp(j2\pi st) ds. \quad (4.4)$$

De modo compacto,  $f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F} f = F$ . Esta definição da transformada é bastante conveniente, pois dá à transformada grande simetria e elimina o inconveniente de multiplicadores por  $2\pi$ .

A transformada de Fourier é um operador cíclico com período quatro. Ou seja, uma quarta aplicação da transformada de Fourier a uma função  $f$  tem como resultado a própria função  $f$ . Em símbolos:

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F} f \xrightarrow{\mathcal{F}} f^- \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}^- f \xrightarrow{\mathcal{F}} f, \quad (4.5)$$

em que o sobrescrito  $-$  denota uma reversão, isto é,  $f^- = f(-\cdot)$ .

Esta propriedade da transformada de Fourier é crucial para a obtenção de funções invariantes à transformada. Antes disto, porém, convém encontrar os autovalores da transformada de Fourier.

**Lema 4.1 (Autovalores de Fourier)** Os autovalores da transformada de Fourier são  $\pm 1, \pm j$ .

*Demonstração:* Os autovalores  $\lambda$  de um operador linear são valores tais que satisfazem a Equação 4.1.

Ou seja,

$$\mathcal{F} f = \lambda f. \quad (4.6)$$

Assumindo que a transformada de Fourier sempre exista, uma aplicação da transformada de Fourier fornece:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F} f\} = \lambda \mathcal{F} f \quad (4.7)$$

$$\mathcal{F}^{(2)} f = \lambda^2 f. \quad (4.8)$$

Aplicando novamente a transformada de Fourier, desta vez, duplamente, tem-se:

$$\mathcal{F}^{(2)} \mathcal{F}^{(2)} f = \lambda^2 \mathcal{F}^{(2)} f \quad (4.9)$$

$$\mathcal{F}^{(4)} f = \lambda^4 f. \quad (4.10)$$

Como a transformada tem período quatro, tem-se que  $\mathcal{F}^{(4)} f = f$  e, portanto:

$$f = \lambda^4 f \quad \therefore \quad \lambda = \sqrt[4]{1}. \quad (4.11)$$

□

**Proposição 4.1 (“Fonte” de Autofunções)** *Seja  $f$  uma função tal que a transformada de Fourier  $\mathcal{F}f$  exista. A função  $h = f + \mathcal{F}f + f^- + \mathcal{F}^-f$  é uma autofunção da transformada de Fourier.*

*Demonstração:* Levando em conta a Expressão 4.5 e calculando diretamente a transformada de Fourier de  $h$ , tem-se que

$$\mathcal{F}h = \mathcal{F}\{f + \mathcal{F}f + f^- + \mathcal{F}^-f\} \quad (4.12)$$

$$= \mathcal{F}f + \mathcal{F}^{(2)}f + \mathcal{F}f^- + \mathcal{F}\mathcal{F}^-f \quad (4.13)$$

$$= \mathcal{F}f + f^- + \mathcal{F}^-f + f \quad (4.14)$$

$$= h. \quad (4.15)$$

É interessante observar que

$$h = f + \mathcal{F}f + \mathcal{F}^{(2)}f + \mathcal{F}^{(3)}f. \quad (4.16)$$

□

Este resultado mostra claramente a vasta quantidade de autofunções existentes. A Proposição 4.1 pode ser formatada em uma forma mais simples, expressando a função  $h$  em termos das partes par de  $f$  e de  $\mathcal{F}f$ :

$$h = 2\mathcal{E}\{f\} + 2\mathcal{E}\{\mathcal{F}f\}, \quad (4.17)$$

em que  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  calcula a parte par de seu argumento.

**Lema 4.2 (Simetria)** *As autofunções da transformada de Fourier associadas ao autovalor unitário são funções pares.*

*Demonstração:* Se  $f$  for uma autofunção da transformada de Fourier, tal que

$$\mathcal{F}f = f, \quad (4.18)$$

então aplicando a transformada de Fourier, segue-se que

$$\mathcal{F}^{(2)}f = \mathcal{F}f. \quad (4.19)$$

Usando o resultado da Expressão 4.5, tem-se finalmente que:

$$f^- = f. \quad (4.20)$$

□

Uma outra forma possível de se gerar autofunções para a transformada de Fourier é explorando as propriedades de convolução no tempo e na frequência. Ou seja, sejam  $f$  e  $g$  duas funções cujas transformadas de Fourier existam. A propriedade da convolução no tempo enuncia que

$$f * g \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g, \quad (4.21)$$

em que  $f * g \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$ . Sendo uma propriedade dual, a convolução em frequência tem a seguinte característica:

$$f \cdot g \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}f * \mathcal{F}g, \quad (4.22)$$

**Lema 4.3** *Sejam  $f$  e  $g$  funções simultaneamente pares ou ímpares, cujas transformadas de Fourier existam. A função  $h = fg + \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$  é uma autofunção da transformada de Fourier.*

*Demonstração:* Utilizando diretamente as propriedades da convolução, tem-se que a transformada de Fourier de  $h$  é dada por:

$$\mathcal{F}h = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g + \mathcal{F}^{(2)}f \cdot \mathcal{F}^{(2)}g \quad (4.23)$$

$$= \mathcal{F}f * \mathcal{F}g + f^- \cdot g^- \quad (4.24)$$

$$= \mathcal{F}f * \mathcal{F}g + f \cdot g \quad (4.25)$$

$$= h. \quad (4.26)$$

A penúltima passagem é possível, pois ambas as funções são pares ou ímpares. □

Relaxando um pouco as hipóteses deste lema, com apenas uma função par ou ímpar, pode se construir uma autofunção para a transformada de Fourier.

**Corolário 4.1** *Seja  $f$  uma função par ou ímpar equipada com sua transformada de Fourier. A função  $h = f^2 + \mathcal{F} f * \mathcal{F} f$  é uma autofunção da transformada de Fourier.*

*Demonstração:* Faça  $f = g$  no Lema 4.3. □

**Corolário 4.2** *Seja  $f$  uma função par equipada com sua transformada de Fourier. A função  $h = f + \mathcal{F} f$  é uma autofunção da transformada de Fourier.*

*Demonstração:* A prova é imediata. □

**Proposição 4.2 (Generalização do Lema 4.3)** *Sejam  $f_1, f_2, \dots$  funções pares e  $g_1, g_2, \dots, g_{2m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , funções ímpares equipadas com transformada de Fourier. A função*

$$h = \prod_i f_i \cdot \prod_{i=1}^{2m} g_i + \underbrace{\mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2 * \dots}_{\substack{\text{Convolução de} \\ \text{transformadas de Fourier} \\ \text{de funções pares}}} * \underbrace{\mathcal{F} g_1 * \mathcal{F} g_2 * \dots * \mathcal{F} g_{2m}}_{\substack{\text{Convolução de } 2m \\ \text{transformadas de Fourier} \\ \text{de funções ímpares}}} \quad (4.27)$$

*é uma autofunção da transformada de Fourier.*

*Demonstração:* Novamente, uma aplicação direta das propriedades de convolução. Tem-se que

$$\mathcal{F} h = \mathcal{F} \left\{ \prod_i f_i \cdot \prod_{i=1}^{2m} g_i \right\} + \mathcal{F} \{ \mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2 * \dots * \mathcal{F} g_1 * \mathcal{F} g_2 * \dots * \mathcal{F} g_{2m} \} \quad (4.28)$$

$$= \mathcal{F} \left\{ \prod_i f_i \right\} * \mathcal{F} \left\{ \prod_{i=1}^{2m} g_i \right\} + f_1^- f_2^- \dots g_1^- g_2^- \dots g_{2m}^- \quad (4.29)$$

$$= \mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2 * \dots * \mathcal{F} g_1 * \mathcal{F} g_2 * \dots * \mathcal{F} g_{2m} + f_1 f_2 \dots (-g_1)(-g_2) \dots (-g_{2m}) \quad (4.30)$$

$$= \mathcal{F} f_1 * \mathcal{F} f_2 * \dots * \mathcal{F} g_1 * \mathcal{F} g_2 * \dots * \mathcal{F} g_{2m} + (-1)^{2m} f_1 f_2 \dots g_1 g_2 \dots g_{2m} \quad (4.31)$$

$$= h. \quad (4.32)$$

□

Fazendo  $f_1 = f_2 = \dots = g_1 = g_2 = \dots = f$ , em que  $f$  é uma função par ou ímpar, tem-se diretamente que

$$h = f^{2m} + \underbrace{\mathcal{F} f * \dots * \mathcal{F} f}_{2m \text{ convoluções}}. \quad (4.33)$$

Restringindo ainda mais e tomando  $f$  par com transformada de Fourier, vem que

$$h = f^n + \underbrace{\mathcal{F} f * \dots * \mathcal{F} f}_{n \text{ convoluções}}, \quad (4.34)$$

em que  $n$  é um inteiro positivo.

### Digressão sobre Operações Repetidas

A formulação mostrada na Equação 4.34 faz surgir a expressão da convolução repetida. Convolução repetida é um tópico razoavelmente não explorado em análise de sinais no contexto de Engenharia, sendo mencionado com pouca frequência. Uma busca nas publicações do IEEE [82], por exemplo, retorna apenas um artigo [83].

Um resultado impressionante a respeito das convoluções repetidas é devido ao estudo realizado por Gnedenko-Kolmogorov sobre distribuições limites [84]. É possível mostrar [83–85] que convoluções repetidas convergem no limite para a função gaussiana. Isto é,

$$\underbrace{f * f * f * f * \dots}_{n \rightarrow \infty \text{ convoluções}} \rightarrow e^{-at^2}, \quad (4.35)$$

em que  $a$  é um real positivo. As condições para que isto ocorra envolvem as seguintes restrições sobre  $f$ : (i)  $f(t) > 0$  (ii)  $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt < \infty$ , (iii)  $\int_{\mathbb{R}} t f(t) dt < \infty$  e (iv)  $\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t) dt < \infty$  [83–85]. Sobre as mesmas condições de Gnedenko-Kolmogorov, pode-se ampliar este resultado através da transformada de Fourier da Expressão 4.35. Procedendo assim, tem-se que

$$\mathcal{F} \{f * f * f * f * \dots\} \rightarrow \mathcal{F} \{e^{-at^2}\}. \quad (4.36)$$

Aplicando a propriedade da convolução e calculando a transformada do pulso gaussiano, vem que:

$$\prod_n \mathcal{F} f \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 s^2 / a}. \quad (4.37)$$

Ou seja, sob certas condições [84], o produto repetido de uma função converge para a gaussiana. Esta observação é decorrência direta do Teorema de Continuidade de Lévy [86, 87]. Isto eleva ainda mais a importância da curva gaussiana. Pois a gaussiana passa a ser não apenas uma autofunção da transformada de Fourier, mas ser a função limite de uma grande classe de autofunções. Eventualmente, para valores suficientemente grandes de  $n$ , as funções dessa classe (Equação 4.34) têm notável semelhança com a própria gaussiana.

A Tabela 4.1 traz algumas autofunções não-triviais da transformada de Fourier. Na Tabela 4.2, tem-se algumas autofunções encontradas na literatura [3].

#### 4.1.2 Pontos Fixos da Transformada de Hartley

A transformada integral de Hartley é a transformada com maior similaridade com a transformada de Fourier. Procurando a formulação com maior simetria, a seguinte definição da transformada de

Tabela 4.1: Algumas Funções Não-triviais Invariantes à Transformada de Fourier

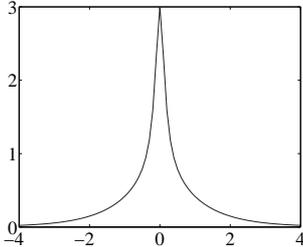
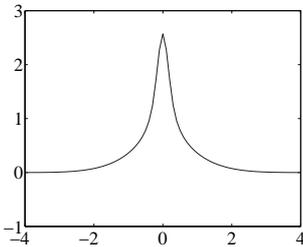
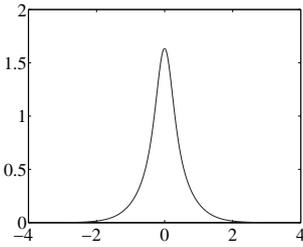
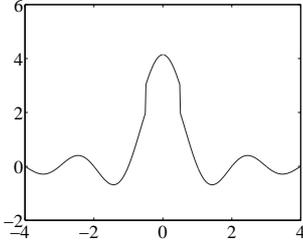
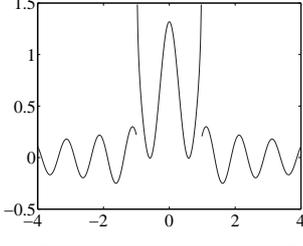
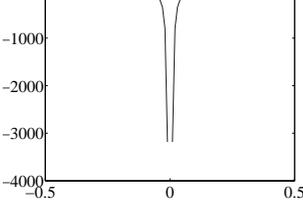
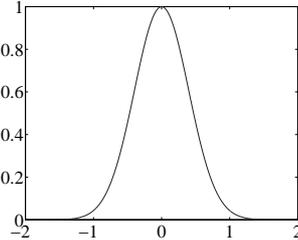
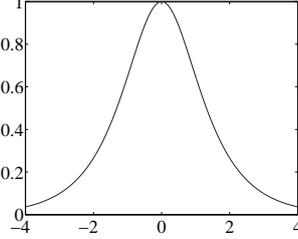
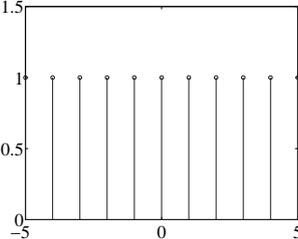
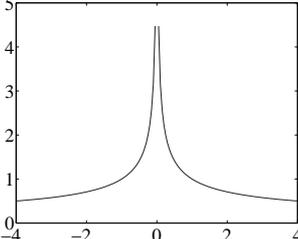
Função	Gráfico
$\exp(- t ) + \frac{2}{1+(2\pi t)^2}$	
$\exp(- t ) \frac{\text{sen } t}{t} + \arctan \frac{1}{2\pi^2 t^2}$	
$\text{sech}^2(\pi t) + 2t \text{ cosech}(\pi t)$	
$\frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} + \Pi(t)$	
$J_0(2\pi t) + \frac{\Pi(t/2)}{\pi\sqrt{1-t^2}}$	
$ t t^n - \frac{2(n+1)!}{j^n(2\pi t)^{n+2}}, n \text{ par}$	

Tabela 4.2: Funções Invariantes à Transformada de Fourier

Função	Gráfico
$\exp(-\pi t^2)$	
$\operatorname{sech}(t)$	
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$	
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	

Hartley será considerada:

$$\mathcal{H}\{f(t)\}(s) = H(s) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(t) \operatorname{cas}(2\pi st) dt, \quad (4.38)$$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} H(s) \operatorname{cas}(2\pi st) ds. \quad (4.39)$$

Pelo fato da transformada de Hartley ser uma involução [7], pode-se dizer que é uma transformada de período 2. Ou seja:

$$f \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{H} f \xrightarrow{\mathcal{H}} f. \quad (4.40)$$

Como os mesmos construtos utilizados para a obtenção de autofunções da transformada de Fourier, tem-se os seguintes lemas.

**Lema 4.4 (Autovalores de Hartley)** *Os autovalores da transformada de Hartley são  $\pm 1$ .*

*Demonstração:* Os autovalores da transformada de Hartley são valores  $\lambda$ , tais que:

$$\mathcal{H} f = \lambda f. \quad (4.41)$$

Considerando a existência da transformada de Hartley, tem-se que

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H} f\} = \lambda \mathcal{H} f \quad (4.42)$$

$$= \lambda^2 f. \quad (4.43)$$

Mas como  $\mathcal{H}\{\mathcal{H} f\} = f$ , vem que

$$f = \lambda^2 f. \quad (4.44)$$

Portanto,  $\lambda = \pm 1$ . □

**Lema 4.5** *Seja  $f$  uma função com transformada de Hartley  $\mathcal{H} f$ . A função  $h = f + \mathcal{H} f$  é uma autofunção da transformada de Hartley.*

*Demonstração:* Diretamente, tem-se:

$$\mathcal{H} h = \mathcal{H}(f + \mathcal{H} f) \quad (4.45)$$

$$= \mathcal{H} f + \mathcal{H}^{(2)} f \quad (4.46)$$

$$= \mathcal{H} f + f. \quad (4.47)$$

$$= h. \quad (4.48)$$

□

Diferentemente da transformada de Fourier, as autofunções de Hartley podem ser assimétricas (compare com o Lema 4.2).

A propriedade da convolução da transformada de Hartley oferece outro meio de se gerar pontos fixos. Sejam  $f$  e  $g$  funções com transformadas de Hartley. Tem-se que [7]:

$$f * g \xrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{2} (\mathcal{H} f \mathcal{H} g - \mathcal{H}^- f \mathcal{H}^- g + \mathcal{H} f \mathcal{H}^- g + \mathcal{H}^- f \mathcal{H} g), \quad (4.49)$$

$$f \cdot g \xrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{2} (\mathcal{H} f * \mathcal{H} g - \mathcal{H}^- f * \mathcal{H}^- g + \mathcal{H} f * \mathcal{H}^- g + \mathcal{H}^- f * \mathcal{H} g). \quad (4.50)$$

$$(4.51)$$

Esta formulação da convolução pode ser bastante simplificada se uma das funções  $f$  ou  $g$  for par. Neste caso, vem que [7]:

$$f * g \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{H} f \mathcal{H} g, \quad (4.52)$$

$$f \cdot g \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{H} f * \mathcal{H} g, \quad (4.53)$$

$$(4.54)$$

as quais são expressões inteiramente análogas às propriedades da convolução para a transformada de Fourier. Assim, de maneira similar ao tratamento dado a transformada de Fourier, pode-se elaborar os seguintes resultados.

**Lema 4.6** *Sejam  $f$  uma função par e  $g_1, g_2, \dots$  funções equipadas com transformada de Hartley. A função*

$$h = f g_1 g_2 \dots + \mathcal{H} f * \mathcal{H} g_1 * \mathcal{H} g_2 \dots \quad (4.55)$$

*é uma autofunção da transformada de Hartley.*

*Demonstração:* Aplicando a transformada de Hartley em  $h$ , tem-se que:

$$\mathcal{H} h = \mathcal{H} (f g_1 g_2 \dots + \mathcal{H} f * \mathcal{H} g_1 * \mathcal{H} g_2 \dots) \quad (4.56)$$

$$= \mathcal{H} f * \mathcal{H} g_1 * \mathcal{H} g_2 \dots + \mathcal{H}^2 f \mathcal{H}^2 g_1 \mathcal{H}^2 g_2 \dots \quad (4.57)$$

$$= \mathcal{H} f * \mathcal{H} g_1 * \mathcal{H} g_2 \dots + f g_1 g_2 \dots \quad (4.58)$$

$$= h. \quad (4.59)$$

□

**Lema 4.7** *Sejam  $f$  uma função par e  $g$  uma função qualquer, ambas munidas de transformada de Hartley. A função  $h = fg + \mathcal{H} f * \mathcal{H} g$  é uma autofunção da transformada de Hartley.*

*Demonstração:* Imediato do Lema 4.6. □

As Tabelas 4.3 exibem algumas autofunções da transformada de Hartley encontradas a partir da utilização dos lemas propostos. Na Tabela 4.4, há alguns pares encontrados na literatura [7].

### 4.1.3 Pontos Fixos da Transformada de Fourier Cosseno e de Fourier Seno

Esta breve seção, contempla duas transformadas que têm comportamento muito similar: a transformada de Fourier Cosseno e a transformada de Fourier Seno. Seus pares de transformação são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{F}_{\cos}\{f(t)\}(s) = F_c(s) \triangleq 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi st) dt, \quad (4.60)$$

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} F_c(s) \cos(2\pi st) ds, \quad (4.61)$$

$$\mathcal{F}_{\text{sen}}\{f(t)\}(s) = F_s(s) \triangleq 2 \int_0^{\infty} f(t) \text{sen}(2\pi st) dt, \quad (4.62)$$

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} F_s(s) \text{sen}(2\pi st) ds. \quad (4.63)$$

São transformadas inteiramente simétricas e, portanto, admitem os valores  $\pm 1$  como autovalores de suas transformações. Este resultado pode ser obtido de maneira inteiramente análoga ao que se encontra no Lema 4.4.

Resultados similares para o uso da convolução também podem ser encontrados. Em particular, para funções  $f$  e  $g$  pares, a transformada de Fourier cosseno admite a seguinte propriedade de convolução [88]:

$$f \cdot g \xrightarrow{\mathcal{F}_{\cos}} \mathcal{F}_{\cos} f * \mathcal{F}_{\cos} g, \quad (4.64)$$

o que permite encontrar resultados similares àqueles obtidos para a transformada de Hartley.

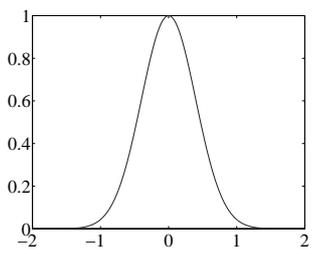
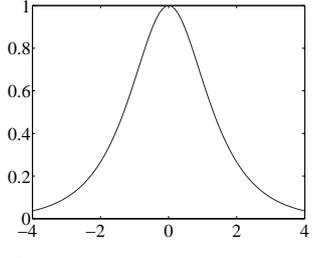
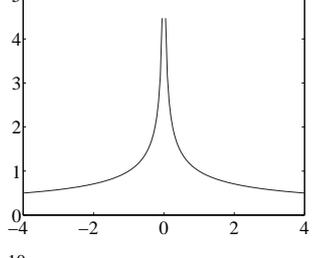
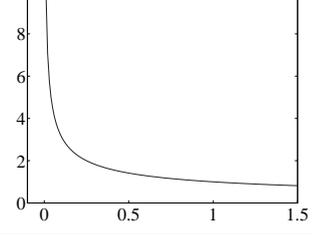
**Lema 4.8** *Seja  $f$  e  $g$  funções pares. A função  $h = fg + \mathcal{F}_{\cos} f * \mathcal{F}_{\cos} g$  é uma autofunção da transformada de Fourier cosseno.*

Um resultado análogo pode ser obtido para a transformada de Fourier seno.

Tabela 4.3: Algumas Funções Não-triviais Invariantes à Transformada de Hartley

Função	Gráfico
$t \exp(-t)u(t) + \frac{1+4\pi t-4\pi^2 t^2}{(1+4\pi^2 t^2)^2}$	
$\exp(-2 t ) \text{sign}(t) + \frac{2\pi t}{1+\pi^2 t^2}$	
$\text{sen}(\pi t)\Pi(t/2) + \text{Sa}(2\pi t - \pi) - \text{Sa}(2\pi t + \pi)$	
$(1 -  t )\Pi(t/2) + \frac{1-\text{Sa}(2\pi t)}{2\pi t}$	
$\Pi(t - 1/2) + \text{cas}(\pi t) \text{Sa}(\pi t)$	
$1/2\Pi(t/2) * \text{sign}(t) + \frac{\text{Sa}(2\pi t)}{\pi t}$	

Tabela 4.4: Funções Invariantes à Transformada de Hartley

Função	Gráfico
$\exp(-\pi t^2)$	
$\operatorname{sech}(t)$	
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	
$\frac{1}{\sqrt{ t }}u(t)$	

#### 4.1.4 Pontos Fixos da Transformada de Hankel

A transformada de Hankel<sup>2</sup> é adequada para a investigação de problemas que envolvam simetria circular. Neste caso, uma única variável radial  $r$  é suficiente para representar os sinais em questão, sem a necessidade de duas variáveis independentes  $x$  e  $y$  [3]. Neste caso, a transformada de Hankel transporta a análise de um problema bidimensional para uma dimensão e utiliza a função de Bessel como núcleo de transformação [88]. O par transformada de Hankel de  $\nu$ -ésima ordem é expresso por:

$$\mathfrak{H}\text{an}\{f(r)\}(s) = F_\nu(s) \triangleq \int_0^\infty r f(r) J_\nu(sr) dr, \quad (4.65)$$

$$f(r) = \int_0^\infty s F_\nu(s) J_\nu(sr) ds. \quad (4.66)$$

Trata-se de uma transformada completamente simétrica com período 2:  $\mathfrak{H}\text{an}^{(2)} f = f$ . Deste modo, para a transformada de Hankel, tem-se, diretamente, lemas análogos aos anteriores.

**Lema 4.9** *Seja  $f$  uma função equipada com transformada de Hankel. A função  $h = f + \mathfrak{H}\text{an} f$  é uma autofunção da transformada de Hankel.*

Ao analisar sinais bidimensionais, a operação de convolução fica um pouco mais sofisticada. Considere-se duas funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  bidimensionais de simetria cilíndrica em coordenadas cartesianas. Em coordenadas polares, tem-se  $\mathbf{f}(r) = f(x, y)$  e  $\mathbf{g}(r) = g(x, y)$ . Deste modo, sua convolução é dada por [88]

$$f *_2 g = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{f}(\sqrt{u^2 + v^2}) \mathbf{g}(\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}) du dv. \quad (4.67)$$

Conseqüentemente, vem que [3, p.250]:

$$\mathbf{f} *_2 \mathbf{g} = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\rho) \mathbf{g}(R) \rho d\rho d\theta, \quad (4.68)$$

em que  $R = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta$ . Apesar de ter uma convolução um pouco mais complexa, a propriedade da convolução torna-se presente quando se utiliza a transformada de Hankel [3, 88]. Assim,

$$f *_2 g \xrightarrow{\mathfrak{H}\text{an}} \mathfrak{H}\text{an} f \cdot \mathfrak{H}\text{an} g. \quad (4.69)$$

<sup>2</sup>Hermann Hankel (1839–1873) fez contribuições significativas na Teoria da Integração, introduziu as funções de Hankel (Bessel de 3ª espécie). Faleceu em Schramberg, Alemanha.

**Lema 4.10** *Sejam funções bidimensionais com simetria circular, expressas de modo unidimensional por  $f$  e  $g$ . Se tais funções admitirem a transformada de Hankel, a função  $h = f *_2 g + \xi \text{an } f \cdot \xi \text{an } g$  é uma autofunção da transformada de Hankel.*

A Tabela 4.5 contem algumas invariantes da transformada de Hankel.

## 4.2 Expansão em Autofunções

Uma possível aplicação das autofunções de uma transformada  $\mathcal{T}$  consiste em encontrar uma base para um espaço de funções, tal que os elementos dessa base sejam autofunções. Caso seja possível, o problema de calcular a transformada de uma função dada se converte no problema de representar a função em questão em uma base de autofunções.

Seja  $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$  um conjunto de autofunções de uma transformada  $\mathcal{T}$  formando uma base para  $L^2(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . Dessa forma, se tal conjunto existir, uma dada função pode ser escrita por:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n, \quad (4.70)$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica o produto interno de funções.

Dessa forma, a transformada  $\mathcal{T}$  de  $f$  é expressa por:

$$\mathcal{T}f = \mathcal{T} \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \quad (4.71)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \mathcal{T}e_n \quad (4.72)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \lambda_n e_n. \quad (4.73)$$

Assim, o cálculo da transformada de  $f$  torna-se o cálculo de  $\langle f, e_n \rangle$ . Resta saber se esta base existe. No caso específico da transformada de Fourier, a resposta é afirmativa [89].

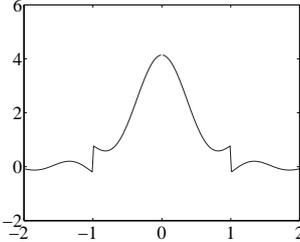
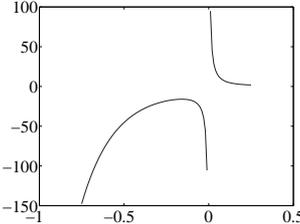
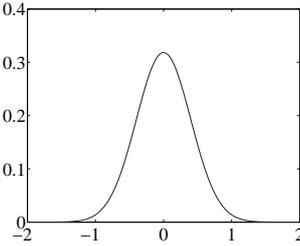
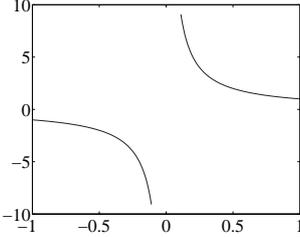
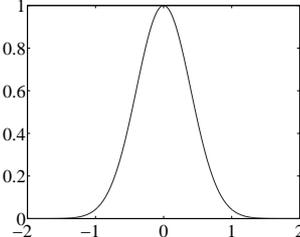
### Funções de Hermite

Considerando a transformada de Fourier e suas propriedades, tem-se os seguintes pares transformados:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi s)^2 \mathcal{F}f \quad (4.74)$$

$$(-j2\pi t)^2 f^2 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d^2 \mathcal{F}f}{ds^2}. \quad (4.75)$$

Tabela 4.5: Funções Invariantes à Transformada de Hankel

Função	Gráfico
$\Pi(r/2) + J_1(2\pi r)/r$	
$\frac{1}{\sqrt{r^2+1}} + \exp(-2\pi r)/r$	
$r^2 \exp(-\pi r^2)$ $(\frac{1}{\pi} - r^2) \exp(-\pi r^2)$	<p data-bbox="778 1160 802 1189">+</p> 
$1/r$	
$\exp(-\pi r^2)$	

Somando ambos os membros destes pares, tem-se o seguinte novo par:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - (2\pi)^2 t^2 f \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -(2\pi)^2 s^2 \mathcal{F} f + \frac{d^2 \mathcal{F} f}{ds^2} \quad (4.76)$$

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} - (2\pi)^2 t^2 \right) f \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left( \frac{d^2}{ds^2} - (2\pi)^2 s^2 \right) \mathcal{F} f \quad (4.77)$$

$$(4.78)$$

Deste modo, se  $f$  for a solução da seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - (2\pi)^2 t^2 f = \alpha f, \quad (4.79)$$

a transformada de Fourier de  $f$  também é solução da mesma equação [85]. Para o caso especial, em que  $\alpha = -(2n+1)$ ,  $n$  inteiro, tem-se que as soluções da Equação 4.79 são as funções de Hermite<sup>3</sup> [85, 89]. As funções de Hermite  $\phi_n(t)$  são definidas por:

$$\phi_n(t) = \text{He}_n(t) e^{-t^2/2}, \quad (4.80)$$

em que  $\text{He}_n(\cdot)$  é o polinômio de Hermite de ordem  $n$  [1, 90]. Trata-se de um caso bastante especial, pois todas as funções de Hermite são autofunções da transformada de Fourier [91]. Neste caso, tomando as funções de Hermite normalizadas [1],

$$\varphi_n(t) = \frac{\phi_n(t)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \quad (4.81)$$

a expansão de uma dada função  $f$  em termos de  $\varphi_n$  é dada por

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n. \quad (4.82)$$

E dessa forma, a transformada de Fourier de  $f$  é

$$\mathcal{F} f = \mathcal{F} \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (4.83)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \mathcal{F} \varphi_n \quad (4.84)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle (-j)^n \varphi_n. \quad (4.85)$$

<sup>3</sup>Charles Hermite (1822–1901) nasceu em Lorraine e faleceu em Paris. Tem contribuições relevantes em Teoria dos Números, Funções Elípticas e Polinômios Ortogonais. Foi professor de Poincaré.

A transformada de Fourier de  $f$  é exatamente a sua expansão em termos de  $\varphi_n$ , a menos de multiplicações triviais por  $(-j)^n$  (autovalores da transformada de Fourier).

### 4.3 Perspectivas

Este capítulo mostrou a infinidade de autofunções para algumas transformadas integrais do tipo núcleo de Fourier. Foram propostas diversas formas de se gerar autofunções, explorando-se as propriedades das transformadas. Com estes métodos, foram esboçadas tabelas com algumas autofunções particulares para as transformadas de Fourier, Hartley e Hankel.

Uma possível aplicação das autofunções é a avaliação de transformadas. Após a expansão de uma dada função em termos de uma base composta de autofunções a operação de transformação torna-se trivial. A literatura traz um único exemplo desta abordagem utilizando as funções de Hermite como base de autofunções [92]. Entretanto, a variedade de autofunções sugere a existência de outras bases. Por outro lado, a definição de outra base não parece ser algo trivial.

Este trabalho constitui-se no primeiro passo na direção de um procedimento de geração de bases de autofunções para transformadas particulares.

## **Parte II**

# **Análise Multiresolução**

## Capítulo 5

# Análise de Sinais por Wavelets<sup>1</sup>

*“Each wavelet on the ocean toasts aids in the ebb-tide or the flow...”.*

CHARLES MACKAY, POETA ESCOCÊS (1814–1889)

A segunda parte desta tese versa sobre análise de sinais por meio de wavelets. Serão endereçados nos capítulos desta parte, fundamentalmente uma metodologia para proposição de novas wavelets. Na última parte desta tese, este tema será novamente re-visitado sobre uma outra perspectiva.

Procurando deixar este trabalho mais auto-contido, antes da exposição dos capítulos com contribuições originais, neste capítulo será feita uma perspectiva sobre a teoria. Por se tratar de conhecimento já estabelecido, tais conceitos serão brevemente comentados. Uma outra motivação para este capítulo é pavimentar o caminho para os problemas que serão tratados nos capítulos subseqüentes desta parte.

### 5.1 Incerteza no Plano Tempo-Frequência

A transformada de Fourier (Equação 4.3) é largamente reconhecida como uma das ferramentas mais importantes em análise de sinais [3, 7, 87, 93–95]. Sua capacidade de identificar o conteúdo frequencial de sinais em análise permite uma ampla variedade de implicações. Para citar, as áreas de aplicação da transformada de Fourier incluem desde Teoria das Probabilidades a Projeto de Antenas.

A transformada de Fourier pode ser interpretada como uma decomposição de uma função em uma soma de funções periódicas, perpétuas — senoidais em diferentes frequências. De outra forma, a transformada de Fourier representa uma dada função numa base senoidal. Os sinais físicos são

---

<sup>1</sup>Este capítulo contém uma seção do artigo: Soares, L. R., de Oliveira, H. M., de Sobral Cintra, R. J., Campello de Souza, R. M., “*Fourier Eigenfunctions, Gabor Uncertainty Principle, and Isoresolution Wavelets*”, XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003 [81].

analisados através da transformada em um intervalo de tempo  $T$  e é considerado que, fora dessa janela de observação, seu comportamento se repete. Assim, a transformada de Fourier é especialmente adequada para a representação e análise de sinais que são periódicos ou tais que seus conteúdos harmônicos são aproximadamente constantes ao longo do tempo.

Há uma grande diversidade de sinais de interesse — como sinais biomédicos e voz, por exemplo — que são não-estacionários e têm seu conteúdo espectral sendo continuamente alterado com o tempo. Assim, assumir a hipótese de que um sinal tem suas propriedades tempo-freqüenciais constantes ao longo do tempo, pode ser uma exigência muito forte. Por causa disso, a transformada de Fourier tem uma certa deficiência ao lidar com este tipo de sinal. Por ter uma base perpétua ( $-\infty < t < \infty$ ), a transformada de Fourier faz com que a localização temporal seja completamente perdida. Em outras palavras, a transformada de Fourier revela o conteúdo freqüencial, mas nada informa sobre *quando* tais freqüências estão presentes.

A transformada discreta de Fourier (DFT) — versão da transformada de Fourier adequada à avaliação numérica — apresenta as mesmas dificuldades. A DFT de comprimento  $N$  fornece um vetor cujas componentes estão relacionadas à freqüências do sinal analisado. Em verdade, para um sinal  $v(t)$  discretizado a uma taxa de amostragem  $f_s$ , deduz-se que a resolução da DFT  $\Delta f$  (diferença de freqüência associada a duas amostras consecutivas) é dada por [96]:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}. \quad (5.1)$$

Similarmente à transformada integral de Fourier, a DFT não traz qualquer tipo de informação temporal

A técnica de transformada de Fourier de tempo curto é uma maneira de se contornar este problema e introduzir localização temporal à transformada de Fourier [97]. Consiste basicamente da inserção de uma função de janelamento  $w(t)$  que divide o sinal em análise em vários segmentos menores. É, então, determinado o conteúdo espectral de cada uma dessas partições.

A função de janelamento objetiva limitar a análise de Fourier em um intervalo relativamente curto de tempo, onde se pode, com um certo grau de confiança, assumir condições de estacionariedade do sinal. A escolha da largura da janela está conectada às freqüências contidas no sinal. Quanto mais rápido for o sinal, menor deve ser a janela para se assumir estacionariedade [95]. Assim, tem-se a seguinte transformação:

$$V(f, \tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t)w(t - \tau) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad (5.2)$$

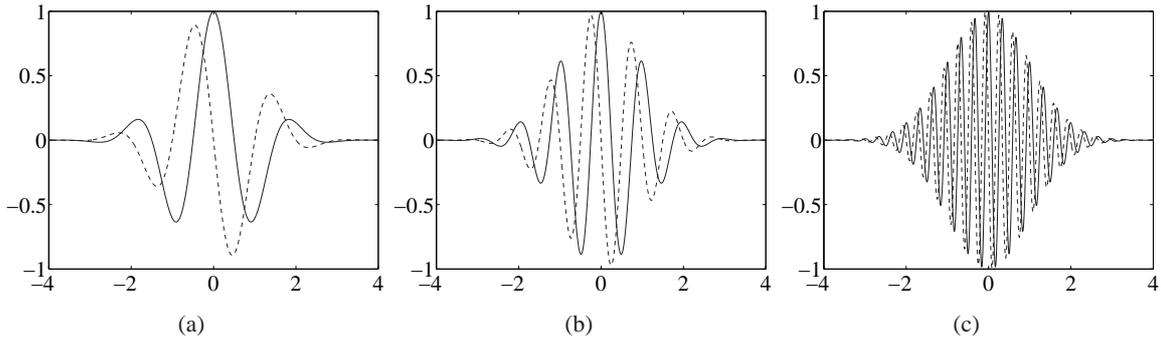


Figura 5.1: Base de Gabor contínua para várias frequências e janela gaussiana. A linha cheia (tracejada) corresponde à parte real (imaginária) da base de Gabor.

em que a função de janelamento  $w(t)$  é transladada de uma quantidade  $\tau$ , segmentando  $v(t)$  para o cálculo da transformada de Fourier. Ao fim da operação, tem-se uma superfície sobre o plano tempo-frequência, cuja energia  $|V(f, t)|^2$  é denominada de espectrograma. Esta transformação é invertida através de

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(f, \tau) w(s - \tau) \exp(j2\pi ft) d\tau df. \quad (5.3)$$

Uma interpretação alternativa é a seguinte. As bases perpétuas de Fourier — senos e cossenos — são trocadas por senos e cossenos janelados,  $w(t - \tau) \exp(j2\pi ft)$ , que fornecem localização temporal (Figura 5.1). O conjunto dessas funções janeladas (senos e cossenos) é chamado de base de Gabor.

Em termos discretos, esta janela pode ser definida por

$$\begin{cases} w[n] \neq 0, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ w[n] = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Obviamente, há uma infinidade de funções de janelamento que satisfazem esta condição. Entre elas as mais conhecidas são as janelas gaussiana, de Hamming, de Hanning, de Bartlett e de Kaiser [96].

Nesse contexto, a transformada discreta de Fourier de tempo curto direta é definida por

$$V_{n,k} \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} v_i w_{i-n} \exp\left(\frac{-j2\pi ki}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (5.5)$$

Uma superfície reticulada é obtida em pontos  $(n, k)$  sobre o plano tempo-frequência discretizado. O índice  $n$  se associa à informação temporal e  $k$ , à frequencial. Este procedimento, que pode ser calculado com  $N$  aplicações da FFT, é realizado com  $O(N^2 \log_2 N)$  operações [93]. A transformação inversa é dada por

$$v_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} V_{i,k} w_{n-i} \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right). \quad (5.6)$$

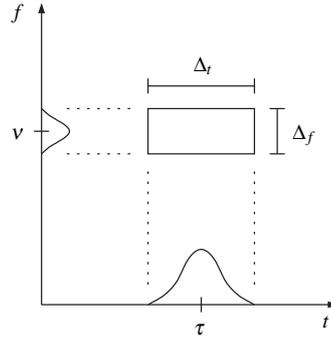


Figura 5.2: Reticulado de Heisenberg para um janelamento particular.

No caso contínuo, para um instante de tempo  $\tau$  e frequência  $\nu$  fixos, pode-se avaliar o grau de espalhamento (incerteza) tempo-frequência que as bases de Gabor induzem. Adotando o desvio padrão como medida de dispersão e duração de um sinal [3], para se determinar a resolução temporal de um janelamento  $w(t - \tau) \exp(j2\pi\nu t)$ , tem-se que:

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 |w(t - \tau) \exp(j2\pi\nu t)|^2 dt \quad (5.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt. \quad (5.8)$$

É importante salientar que a resolução temporal é absolutamente constante, dependendo apenas de  $w(t)$ . Analogamente, pode-se realizar o mesmo procedimento a fim de encontrar a incerteza na frequência. Assumindo que  $w(t - \tau) \exp(j2\pi\nu t)$  tem transformada de Fourier dada pela expressão,  $W(f - \nu) \exp(-j2\pi(f - \nu)\tau)$ , a incerteza em torno de  $\nu$  será

$$\Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - \nu)^2 |W(f - \nu) \exp(-j2\pi(f - \nu)\tau)|^2 df \quad (5.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |W(f)|^2 df. \quad (5.10)$$

Novamente, uma quantidade constante. A Figura 5.2 ajuda a ilustrar o procedimento. Como as incertezas no tempo e na frequência são constantes, para um escolha de janela, o plano tempo-frequência assume o aspecto esboçado na Figura 5.3. Cada reticulado de dimensão  $\Delta t \times \Delta f$  é chamado de reticulado de Heisenberg [93].

No caso discreto, tem-se uma construção similar:

$$\Delta_t^2 = \sum_{i=0}^{N-1} i^2 |w_i|^2, \quad (5.11)$$

$$\Delta_f^2 = \sum_{k=0}^{N-1} k^2 |W_k|^2, \quad (5.12)$$

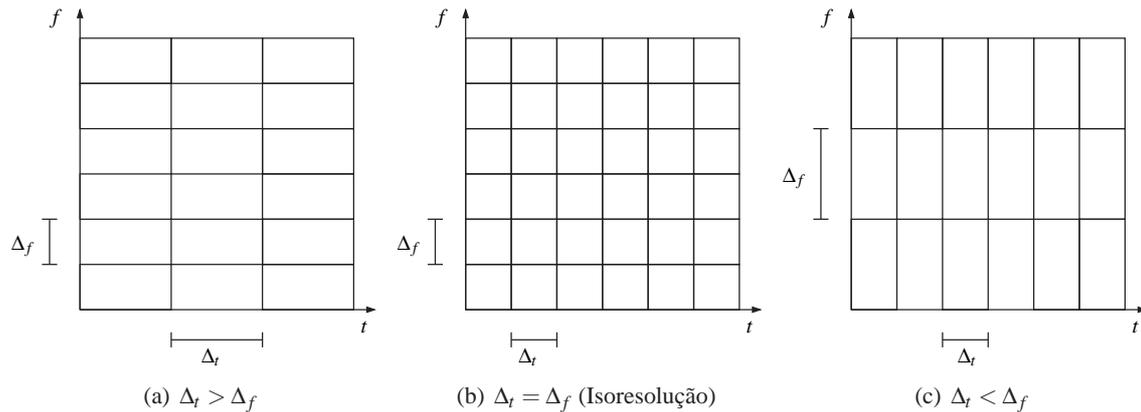


Figura 5.3: Discretização do plano tempo-freqüência pela transformada de Fourier de tempo curto para diversas janelas.

em que  $w \xleftrightarrow{\text{DFT}} W$ .

Um resultado clássico nesse campo é a impossibilidade de se fazer as incertezas temporais e freqüenciais *simultânea e arbitrariamente* pequenas. Este é o princípio da incerteza de Heisenberg-Gabor [3, 85, 91, 93], largamente citado.

#### Teorema 5.1 (Desigualdade de Heisenberg-Gabor)

$$\Delta_t \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (5.13)$$

É um resultado bem conhecido o fato do limite inferior da Desigualdade ser atingido para  $w(t) = \exp(-kt^2)$ , em que  $k > 0$  é uma constante. Ou seja, o pulso gaussiano garante o menor *produto de incerteza* ( $\Delta_t \Delta_f$ ). Uma janela gaussiana em particular faz com que  $\Delta_t = \Delta_f$ :

$$w(t) = \exp(-\pi t^2) \quad (\text{pulso gaussiano}). \quad (5.14)$$

Nesse caso, pode-se introduzir uma nova terminologia: *isoresolução*. Uma análise tempo-freqüencial terá a propriedade de isoresolução se as incertezas temporal e freqüencial forem idênticas. A Tabela 5.1 traz o comportamento das incertezas temporal e freqüencial.

Os conceitos de incerteza no tempo e na freqüência podem ser conectados com as autofunções da transformada de Fourier, discutidas no Capítulo 4 [81].

**Lema 5.1 (Autofunções fornecem Isoresolução)** *As autofunções da transformada de Fourier têm idênticas incertezas no tempo e na freqüência.*

*Demonstração:* Seja  $w(t)$  uma função de janelamento tal que  $w \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F} w = W = \lambda w$ . A incerteza

Tabela 5.1: Incerteza depende da função de janelamento

$w(t)$	Largura	Resolução Temporal	Resolução Freqüencial
1	$\infty$	$\infty$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$w(t)$	$L$	$\Delta t$	$\Delta f$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\delta(t)$	$\rightarrow 0$	0	$\infty$

freqüencial é dada pela expressão abaixo.

$$\Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |W(x)|^2 dx \quad (5.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\lambda w(x)|^2 dx \quad (5.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |(j)^n w(x)|^2 dx \quad \text{para } n \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (5.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |w(x)|^2 dx \quad (5.18)$$

$$= \Delta_t^2. \quad (5.19)$$

□

Outro resultado sobre as resoluções em tempo e freqüência é encontrado a seguir.

**Lema 5.2** *Seja  $w(t)$  uma função de janelamento com transformada de Fourier  $W(f)$ , com derivadas  $w'(t)$  e  $W'(f)$ , respectivamente. Se  $w, w', W, W' \in L^2(\mathbb{R})$ , então  $\Delta_t$  e  $\Delta_f$  são quantidades finitas.*

*Demonstração:* Considere a incerteza temporal  $\Delta_t$ . Tem-se que

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 dt \quad (5.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (jt w(t))(jt w(t))^* dt \quad (5.21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-W'(t))(-W'^*(t)) dt \quad (\text{pelo Teorema da Energia de Rayleigh}) \quad (5.22)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |W'(t)|^2 dt < +\infty. \quad (5.23)$$

Analogamente, mostra-se que  $\Delta_f < +\infty$ . □

O fato das incertezas em tempo e freqüência serem constantes faz com que a transformada de Fourier de tempo curto tenha alguns inconvenientes. Por exemplo, para  $\Delta f$  fixo, a incerteza relativa ( $\Delta f/f$ ) pode ser bem menor nas altas freqüências do que nas baixas freqüências. Ou seja, baixas freqüências podem ser inadequadamente representadas. Poder-se-ia dizer que uma “solução” para esse dilema seriam seguidas aplicações da transformada de Fourier de tempo curto com várias janelas

que ofereçam diferentes resoluções para baixas e altas frequências. Obstáculos para esta “solução” incluem: (i) elevadíssimo custo computacional, tornando análise em tempo real completamente proibitiva e (ii) elevada redundância. Há, entretanto, uma solução muito mais elegante e econômica, como será vista na próxima seção.

## 5.2 Wavelets

As wavelets são funções oscilatórias com decaimento que, sob determinadas condições [93, 95], fornecem uma análise tempo-frequencial tal que

$$\frac{\Delta f}{f} = \text{constante.} \quad (5.24)$$

Uma wavelet é uma função  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  com valor DC nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (5.25)$$

e energia normalizada  $\|\psi\| = 1$ . A Figura 5.4 exibe um exemplo típico de wavelet. Esta função serve de modelo para um conjunto de funções

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}. \quad (5.26)$$

Esta nova família de funções é constituída de versões escalonadas (dilatação ou compressão) de um fator  $a$  e deslocadas de um fator  $b$  da função original  $\psi(t)$ , que é chamada de wavelet-mãe. Este conjunto se apresenta como uma base alternativa às bases de Gabor  $w(t-\tau) \exp(-j2\pi ft)$ , oferecendo uma melhor distribuição das resoluções tempo-frequência. A Figura 5.5 mostra uma configuração

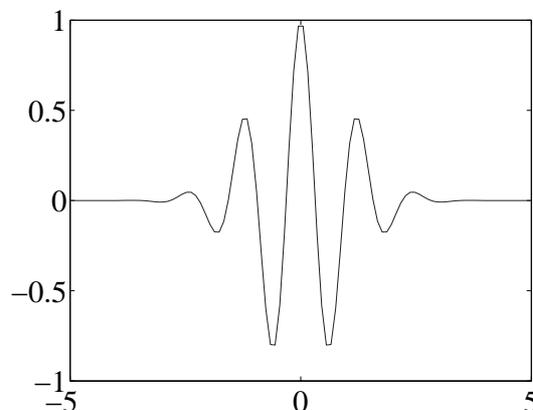


Figura 5.4: Wavelet típica: wavelet de Morlet.

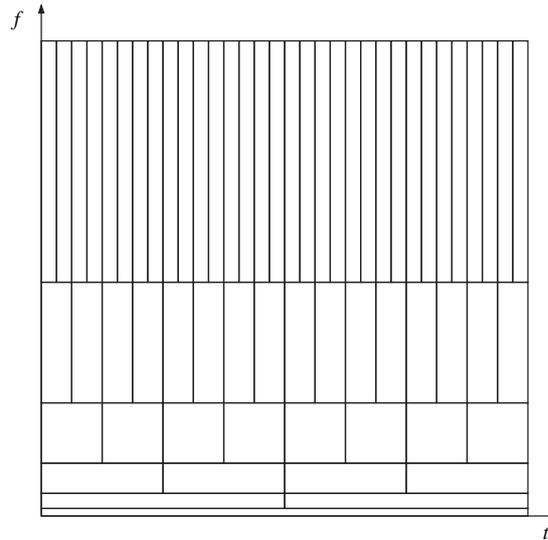


Figura 5.5: Possível representação do plano tempo-frequência induzido pela análise via wavelets.

típica dos reticulados de Heisenberg possibilitada pela análise por wavelets.

A transformada contínua de wavelet de um sinal  $v(t)$  é definida por

$$W(a, b) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt. \quad (5.27)$$

Assim, a quantidade  $W(a, b)$  pode ser interpretada como a correlação entre a função em análise  $v(t)$  e uma versão da wavelet-mãe escalonada de  $a$  e deslocada de  $b$ . A superfície associada à energia contida da transformada de wavelet,  $|W(a, b)|^2$ , é denominada escalograma.

Posto que a função  $\psi \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Psi$  satisfaz a Condição de Admissibilidade [93],

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df < +\infty, \quad (5.28)$$

é possível mostrar que o sinal analisado pode ser invertido pela seguinte formulação [93]

$$v(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \frac{1}{a^2} db da. \quad (5.29)$$

Para a Condição de Admissibilidade ser satisfeita, basta que  $\Psi(0) = 0$  e que  $\Psi(f)$  seja continuamente diferenciável [93].

Complementar à noção de função wavelet, há a função de escala  $\phi(t)$ . Em situações nas quais são conhecidos os coeficientes de wavelet,  $W(a, b)$ , apenas para algumas escalas  $a < \alpha$ ,  $\alpha$  constante, a parte do sinal em análise responsável pelo comportamento e informação nas escalas  $a > \alpha$  pode ser aglutinado numa única função — a função de escala. Definindo-se os coeficientes de escala

(aproximação de baixa-freqüência) por

$$S(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (5.30)$$

tem-se que a fórmula de reconstrução fica modificada para:

$$v(t) = \underbrace{\frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} W(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^2} db da}_{\text{termo associado às pequenas escalas (detalhes)}} + \quad (5.31)$$

$$\underbrace{\frac{1}{C_{\psi} \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, b) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \phi\left(\frac{t-b}{\alpha}\right) \frac{1}{a^2} db}_{\text{termo associado à aproximação}}. \quad (5.32)$$

### 5.2.1 Série de Wavelet

Do ponto de vista prático, a definição da transformada contínua de wavelet encontra as mesmas dificuldades que outras transformações contínuas. Assim, uma versão discretizada da transformada contínua foi objetivada [93, 98]. Traduzir uma wavelet contínua para o caso discreto pode ser feito através de uma discretização das variáveis de escala e deslocamento:

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^j}} \psi\left(\frac{t - k\beta\alpha^j}{\alpha^j}\right), \quad (5.33)$$

em que  $j \in \mathbb{N}$  representa a discretização em escala e  $k \in \mathbb{N}$  a discretização com relação aos deslocamentos (translações). As quantidades fixas  $\alpha$  e  $\beta$  representam os fatores de escalonamento e deslocamento, respectivamente. Note-se que as mudanças em escala se dão de forma geométrica e os deslocamentos ocorrem aritmeticamente. Se  $\alpha = 2$ , diz-se que se tem uma transformada/série de wavelet diádica.

Esta formulação permite adaptar a transformada contínua para o seguinte par:

$$W_{k,j} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (5.34)$$

$$v(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_{k,j} \psi_{j,k}(t). \quad (5.35)$$

Estas expressões encontram análogos na teoria das séries de Fourier [3]. Nem sempre o mesmo conjunto de wavelets que faz a decomposição se presta para a reconstrução da série. Nesse caso, há uma família de funções em  $\psi(t)$  para a análise e outra para a síntese  $\tilde{\psi}(t)$ . Diz-se nesse caso, que há

uma análise com wavelets biortogonais, pois

$$\langle \psi_{j,k}(t) \tilde{\psi}_{m,m}(t) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } j = m \text{ e } k = n, \\ 0, & \text{se } j \neq m \text{ ou } k \neq n. \end{cases} \quad (5.36)$$

### 5.2.2 Transformada Discreta de Wavelet

Usualmente tem-se um sinal discreto  $\mathbf{v} = [v_0, v_1, \dots, v_{N-1}]^T$ , de comprimento  $N = 2^J$ , geralmente obtido por amostragem de um sinal contínuo  $v(t)$ . Ou seja, supor resoluções arbitrárias como faz a série de wavelets não faz sentido: a melhor resolução disponível é a do sinal discreto disponível.

Assim, avançando mais um passo e discretizando o tempo também, tem-se que sua transformada discreta de wavelet (DWT) pode ser expressa em termos dos coeficientes de detalhe (coeficientes de wavelet) e aproximação (coeficientes de escala), respectivamente dados por:

$$d_{k,j} \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} v_i \psi_{j,k}(i/N), \quad (5.37)$$

$$a_{k,j} \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} v_i \phi_{j,k}(i/N). \quad (5.38)$$

A reconstrução do sinal  $\mathbf{v}$  pode ser obtida através de uma combinação de wavelets e de uma versão da função de escala responsável pela aproximação de baixa-frequência do sinal:

$$v_i = \sum_{k=0}^{2^{J-J_0}-1} a_{J_0,k} \phi_{J_0,k}(i/N) + \sum_{j=1}^{J_0} \sum_{k=0}^{2^{J-j}-1} d_{k,j} \psi_{j,k}(i/N), \quad (5.39)$$

em que  $a_{j,k}$  e  $d_{j,k}$  são coeficientes de aproximação e detalhe, respectivamente; e  $\phi_{j,k}(\cdot)$  é a função de escala. A função  $\psi_{j,k}(\cdot)$  é a wavelet e  $J_0 \leq J$  é número de escalas até a qual a decomposição em wavelets foi realizada.

### 5.2.3 Multiresolução

As funções de wavelet e de escala têm várias propriedades notáveis. Em [93], pode se encontrar, uma excelente referência. No contexto de wavelets diádicas, um resultado de destaque é a seguinte equação recursiva:

$$\phi(t) = \sum_k h_k \sqrt{2} \phi(2t - k). \quad (5.40)$$

Esta é chamada de *equação de refinamento* e enuncia que uma função de escala  $\phi$  pode ser obtida a partir de versões deslocadas de  $\phi$  em uma escala imediatamente menor. Ela tem solução única em  $h_k$  e os valores que compõem o vetor  $\mathbf{h}$  são conhecidos como coeficientes do filtro de escala (filtro suavizador).

Outra equação recursiva fundamental enuncia que

$$\psi(t) = \sum_k g_k \sqrt{2} \phi(2t - k). \quad (5.41)$$

Neste caso dual, o vetor  $\mathbf{g}$  é o filtro de wavelet (filtro de detalhe). Os filtros de escala e de wavelet obedecem certas condições de normalização, a saber:

$$\sum_n h_n = \sqrt{2}, \quad (5.42)$$

$$\sum_n g_n = 0. \quad (5.43)$$

Representando filtros duais,  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{g}$  podem ser relacionados entre si através da condição de filtros espelhados em quadratura (Condição QMF). Smith e Barnwell [99] fornecem uma excelente exposição sobre esse tópico. A condição QMF estabelece que

$$g_n = (-1)^n h_{1-k}. \quad (5.44)$$

As implicações das equações recursivas são de importância pivotal. Uma consequência direta é o seguinte par de equações [93, 98]

$$a_{j,k} = \sum_i h_{i-2k} a_{j-1,i}, \quad (5.45)$$

$$d_{j,k} = \sum_i g_{i-2k} a_{j-1,i}. \quad (5.46)$$

Estas equações são chave. Elas enunciam que os coeficientes de detalhe ou aproximação em uma escala de resolução mais grosseira  $j$  podem ser obtidos diretamente dos coeficientes de aproximação na escala mais detalhada imediatamente inferior  $j - 1$ .

Assim, uma estrutura, como vista na Figura 5.6a, pode ser utilizada para realizar análise via wavelets. Tal estrutura é essencialmente um banco de filtros, configurado de modo recursivo. Considere como sinal de entrada um sinal discreto  $\mathbf{v}$ . A cada passagem pelo conjunto de filtros e dizimadores, tem-se um novo sinal que representa os detalhes e uma aproximação de  $\mathbf{v}$  [93]. Da mesma maneira, o conjunto de aproximações e detalhes pode ser utilizado para reconstruir o sinal original através de uma estrutura dual, ilustrada na Figura 5.6b. Teoricamente, esta estrutura pode ser iterada indefinidamente [100]. Isto claramente não é possível, pois, normalmente, os sinais em análise são finitos e, eventualmente, após várias iterações, as dizimações repetidas reduziriam o sinal a uma única amostra. Este algoritmo rápido para se calcular a transformada discreta de wavelet foi proposto por Mallat e,

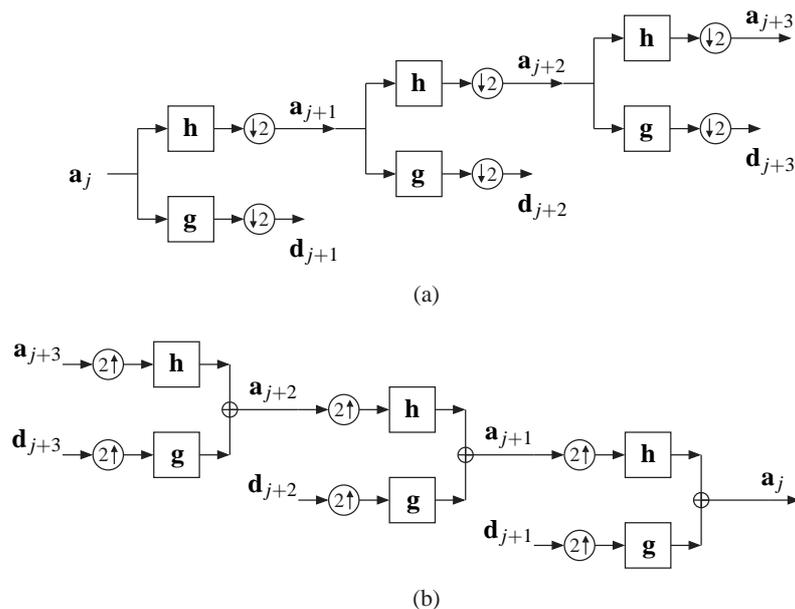


Figura 5.6: Cascata de filtros: Algoritmo rápido para a transformada de wavelet. Os coeficientes são computados recursivamente, através de uma iteração dos filtros de escala e de wavelet. (a) Estrutura de decomposição e (b) estrutura de reconstrução.

neste trabalho, será referenciado por “algoritmo cascata”. Este algoritmo é notavelmente eficiente e realiza a transformada de wavelet em  $O(N)$  operações.

### 5.3 Definindo Novas Wavelets

Nesta tese, são apresentados dois métodos de se construir novas wavelets. A primeira proposta é puramente investigativa, em que serão propostas wavelets com potenciais aplicações. Contextos específicos em que a aplicação de tais wavelets torna-se vantajosa ainda são objeto de estudo.

Como foi mostrado anteriormente, o projeto de filtros passa-baixas e passa-altas está intimamente relacionado com a análise de wavelets por meio das equações recursivas de refinamento e do algoritmo cascata. A abordagem para construção de wavelets, que será discutida em detalhes nos próximos dois capítulos, utiliza como ponto de partida a definição de bancos de filtros. A geração de wavelets vem por implicação. A metodologia proposta para o projeto destas novas wavelets é resumida a seguir.

1. Será analisado um problema particular baseado em equações diferenciais clássicas, cujas soluções têm grande relevância em diversos contextos;
2. Será mostrado uma forma sistemática de associar as soluções destas equações a filtros de escala e filtros de wavelets;

3. Estes novos filtros serão empregados no algoritmo cascata, buscando a construção de novas wavelets;
4. Caso o procedimento resulte em wavelets, suas propriedades serão analisadas.

A utilização deste procedimento permitiu a construção/introdução de duas novas wavelets: a wavelet de Mathieu e a wavelet de Chebyshev, tratadas nesta tese.

A segunda abordagem para propor wavelets, utiliza o caminho inverso. No Capítulo 9, será proposto um método de construir wavelets “casadas”, wavelets que sejam otimizadas para analisar uma classe de sinais em particular. A partir de um problema conhecido e de uma classe de sinais a serem analisados, será construída uma wavelet específica para a aplicação. Para tal, serão essencialmente utilizados argumentos de minimização de erro, para eleger uma wavelet ótima dentre um universo de busca. Algumas vantagens desse procedimento serão comentadas posteriormente (Capítulo 9).

## Capítulo 6

# Wavelets de Mathieu<sup>1</sup>

### 6.1 Introdução

O matemático francês Emile Léonard Mathieu<sup>2</sup> introduziu em 1868 uma nova família de equações diferenciais no seu trabalho “*Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique*” [103]. Conhecidas por Equações de Mathieu, estas expressões estão associadas ao comportamento de um onda em um cilindro elíptico.

Este trabalho é particularmente voltado para a forma canônica da equação de Mathieu. Para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{C}$ , a equação de Mathieu é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes periódicos dada por

$$\frac{d^2y}{d\omega^2} + (a - 2q \cos(2\omega))y = 0. \quad (6.1)$$

Foi mostrado posteriormente que esta equação é aplicada em áreas relacionadas com Mecânica Quântica: os parâmetros  $a$  e  $q$  são relacionados com o nível de energia e uma intensidade, respectivamente. Para  $q = 0$ , a equação de Mathieu se reduz ao conhecido oscilador harmônico, em que  $a$  é o quadrado da frequência de oscilação [104, 105].

As soluções da Equação 6.1 são os harmônicos elíptico-cilíndricos, conhecidos como funções de Mathieu. Tais funções vêm sendo constantemente aplicadas em uma variedade de fenômenos físicos, tais como problemas de difração, distorção em amplitude, pêndulo invertido e o problema de vibrações em meios de densidade não-uniforme [106]. As funções de Mathieu também encontram aplicação no contexto de guia-de-ondas que envolvem simetria elíptico-cilíndrica, incluindo (i) problemas de transferência de potência em guias-de-onda elípticos [107, 108], (ii) estudo de padrões de

---

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma compilação do artigo: Lira, M. M. S., de Oliveira, H. M., de Sobral Cintra, R. J., “*Elliptic-Cylindrical Wavelets: The Mathieu Wavelet*”, IEEE Signal Processing Letters, v. 11, n. 1, pp. 52–55, 2004 [101].

<sup>2</sup>Francês, nascido em 1835, deve-se a Mathieu os grupos de Mathieu, que em conjunto com as funções de Mathieu, são talvez suas contribuições mais significativas. Um aluno brilhante, estudou matemática em nível de graduação na *École Polytechnique* de Paris, em incríveis 18 meses! Faleceu em Nancy, França [102].

irradiação de antenas elípticas [109] e (iii) antenas anulares elípticas em *microstrip* de excentricidade arbitrária [110].

Wavelets são utilizadas com frequência como ferramentas para a resolução de equações diferenciais [111–113]. De certo modo, neste trabalho será feito o inverso: utilizar equações diferenciais para construir (“resolver”) wavelets. Assim, este trabalho busca trazer para o contexto de processamento de sinais as funções de Mathieu. O objetivo deste trabalho é a proposição de novas wavelets baseadas nas equações diferenciais de Mathieu. Tais wavelets têm sua construção e uso motivados por problemas que exploram a simetria elíptico-cilíndrica.

## 6.2 Comentários Gerais sobre as Equações de Mathieu

De modo geral, as soluções da Equação 6.1 são não periódicas. Entretanto para um dado  $q$ , soluções periódicas existem para infinitos, mas contáveis, valores particulares de  $a$ . Tais valores característicos são denotados por  $a_r(q)$ , em que  $r$  é um inteiro ou racional. Isto é, para um dado  $q \neq 0$ , há vários  $a = a_r(q)$ , indexados em  $r$  que fazem com que a solução da equação de Mathieu seja periódica.

Para vários problemas de relevância física, é desejado que as soluções da equação de Mathieu sejam periódicas de período  $\pi$  ou  $2\pi$  [1, p.722]. Assim, há quatro soluções notáveis: soluções periódicas de período  $\pi$  ou  $2\pi$  com simetria par ou ímpar. Convém separar os valores de  $a$  que geram soluções periódicas em dois grupos: (i) o que fornece soluções pares e (ii) o que fornece soluções ímpares. Para o primeiro grupo, será denotado  $a = a_r(q)$  (mantendo a notação); para o segundo,  $a = b_r(q)$ .

As soluções periódicas pares ou ímpares são denominadas de funções de Mathieu de primeira espécie. Tais soluções também são denominadas de cossenos e senos elípticos — denotadas por  $ce(\cdot)$  e  $se(\cdot)$  — tendo suas séries de Fourier expressas por:

$$ce_r(\omega, q) = \sum_m A_{r,m} \cos m\omega, \quad \text{para } a = a_r(q), \text{ solução periódica par,} \quad (6.2)$$

$$se_r(\omega, q) = \sum_m A_{r,m} \sin m\omega, \quad \text{para } a = b_r(q), \text{ solução periódica ímpar,} \quad (6.3)$$

em que os somatórios são tomados apenas em valores pares ou ímpares do índice  $m$ , caso o período da solução seja  $\pi$  ou  $2\pi$ , respectivamente. Os coeficientes  $A_{r,m}$  são dependentes do valor de  $a$  escolhido. Fixado o valor de  $r$ , a notação de  $A_{r,m}$  é simplificada para  $A_m$ .

Se  $q \rightarrow 0$  e  $r \neq 0$ , os cossenos e senos elípticos se degeneram em cossenos e seno usuais [1]:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \text{ce}_r(\omega, q) = \cos(r\omega), \quad (6.4)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \text{se}_r(\omega, q) = \text{sen}(r\omega). \quad (6.5)$$

E, de modo similar a estas funções trigonométricas, as funções de Mathieu satisfazem a propriedade de biortogonalidade:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{ce}_r(\omega, q) \text{ce}_s(\omega, q) d\omega &= 0, \quad r \neq s, \\ \int_0^{2\pi} \text{se}_r(\omega, q) \text{se}_s(\omega, q) d\omega &= 0, \quad r \neq s, \\ \int_0^{2\pi} \text{ce}_r(\omega, q) \text{se}_s(\omega, q) d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Um dos resultados mais interessantes relacionado às funções de Mathieu é o Teorema de Floquet [114]. Em linhas gerais e em uma forma menos geral, este teorema afirma que as soluções periódicas da equação de Mathieu podem ser expressas na forma

$$\begin{aligned} y(\omega) &= F_\nu(\omega) = e^{j\nu\omega} P(\omega) \quad \text{ou} \\ y(\omega) &= F_\nu(-\omega) = e^{-j\nu\omega} P(-\omega), \end{aligned} \quad (6.7)$$

em que  $\nu$  é uma constante que depende de  $a$  e  $q$ ; e  $P(\omega)$  é uma função de período  $\pi$ .

A constante  $\nu$  é denominada de expoente característico [1, p.727]. Se  $\nu$  for inteiro, então as funções  $F_\nu(\omega)$  e  $F_\nu(-\omega)$  são soluções linearmente dependentes. Neste caso, estas funções gozam da seguinte propriedade

$$y(\omega + k\pi) = e^{j\nu k\pi} y(\omega), \quad (6.8)$$

$$y(\omega + k\pi) = e^{-j\nu k\pi} y(\omega), \quad (6.9)$$

para as soluções  $F_\nu(\omega)$  e  $F_\nu(-\omega)$ , respectivamente. Neste caso, são chamadas de soluções de Floquet [1].

A solução geral para a equação de Mathieu é expressa por

$$y(\omega) = c_1 e^{j\nu\omega} P(\omega) + c_2 e^{-j\nu\omega} P(-\omega), \quad (6.10)$$

para  $q \in \mathbb{R}$  e  $\nu$  é não inteiro. As quantidades  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias [115]. Todas as soluções limitadas são descritas em uma série infinita de harmônicos com amplitude decrescente com

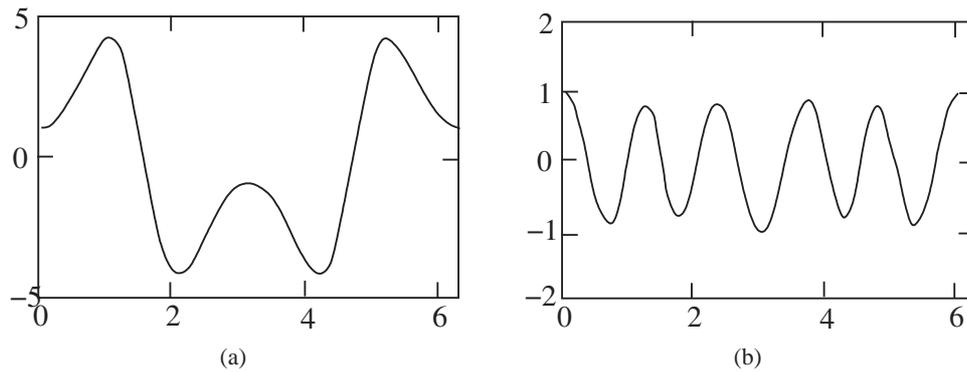


Figura 6.1: Algumas curvas de funções de Mathieu par de primeira espécie e período  $2\pi$ . Estes cossenos elípticos foram calculados para os seguintes parâmetros: (a)  $\nu = 1$  e  $q = 5$ , (b)  $\nu = 5$  e  $q = 5$ .

a frequência [1, 115].

Neste presente estudo, a investigação será restrita às soluções pares de período  $2\pi$ . Para esta condição, em particular, os coeficientes da série de Fourier das funções de Mathieu (Equação 6.2 e 6.3) satisfazem algumas relações de recorrência [1]:

$$\begin{aligned} (a - 1 - q)A_1 - qA_3 &= 0, \\ (a - m^2)A_m - q(A_{m-2} + A_{m+2}) &= 0, \quad m \geq 3, m \text{ ímpar.} \end{aligned} \quad (6.11)$$

A Figura 6.1 exibe duas formas de onda ilustrando o comportamento dos cossenos elípticos, cuja forma depende fortemente dos parâmetros  $\nu$  e  $q$ .

### 6.3 Wavelets de Mathieu

Após esta breve revisão sobre a Teoria das Funções de Mathieu, será explorado o uso de tais funções para a construção de wavelets. Para tal, será adotada a metodologia comentada no Capítulo 5. No que se segue, wavelets serão denotadas por  $\psi(t)$  e funções de escala por  $\phi(t)$ . Seus espectros de Fourier serão  $\Psi(\omega)$  e  $\Phi(\omega)$ , respectivamente.

#### 6.3.1 Relações entre Wavelet e Função de Escala

Observando que a transformada de Fourier de tempo discreto de um filtro suavizador (filtro de aproximação)  $\{h_k\}$  é dada por

$$H(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-j\omega k}, \quad (6.12)$$

vem que as equações principais de Análise Multiresolução, no domínio frequencial, podem ser condensadas como se segue [116]:

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= H\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right), \\ \Psi(\omega) &= G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right),\end{aligned}\tag{6.13}$$

em que  $G(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-j\omega k}$  é a função de transferência do filtro de detalhe.

Condições de ortogonalidade se aplicam, levando a [116]:

$$H(0) = 1 \text{ and } H(\pi) = 0,\tag{6.14}$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1,\tag{6.15}$$

$$H(\omega) = -e^{-j\omega} G^*(\omega + \pi).\tag{6.16}$$

### 6.3.2 Filtros de Mathieu

Nessa seção será definido um conjunto de filtros que serão considerados para a geração de novas wavelets.

A teoria de wavelets sugere a seguinte relação clássica entre os espectros de uma wavelet e da função de escala associada:

$$\Psi(\omega) = e^{-j\omega/2} H^*\left(\frac{\omega}{2} - \pi\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right).\tag{6.17}$$

Esta relação apresenta grande similaridade com as soluções de Floquet para a equação de Mathieu, pois  $H(\omega)$  é uma função periódica. Motivado por este fato, foram empregados maiores esforços na direção de encontrar uma conexão entre as duas teorias.

Uma abordagem inicial resultou em formatar a relação entre os espectros da wavelet e da função de escala como se segue:

$$\frac{\Psi(\omega)}{\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)} = e^{-j\omega/2} H^*\left(\frac{\omega}{2} - \pi\right).\tag{6.18}$$

Comparando com a Equação 6.7, identifica-se que os segundos membros dessas equações tem o mesmo formato. Em termos da notação da Equação 6.7, esta nova Equação 6.18 oferece um valor de  $\nu$  não-inteiro e uma função  $P(\cdot)$  não pode ter período  $\pi$ . Entretanto, um ajuste adequado de escala em  $\omega$ , re-escreve esta equação da seguinte maneira:

$$\frac{\Psi(4\omega)}{\Phi(2\omega)} = e^{-j2\omega} H^*(2\omega - \pi).\tag{6.19}$$

Definindo uma nova função

$$Y(\omega) \triangleq \Psi(4\omega)/\Phi(2\omega), \quad (6.20)$$

percebe-se uma interpretação no contexto de wavelets. Basta que se observe que

$$\Psi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (6.21)$$

Ou seja,  $\Psi(2\omega) = G(\omega)\Phi(\omega)$ . Conseqüentemente, a função relacionada com a equação de Mathieu é exatamente

$$Y(\omega) = G(2\omega). \quad (6.22)$$

Realizando uma mudança de variável da seguinte maneira  $2z \triangleq 2\omega - \pi$ , tem-se que

$$-Y\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = e^{-j2z}H^*(2z). \quad (6.23)$$

O expoente característico  $\nu$  pode ser ajustado para um valor particular através de uma simples manipulação algébrica:

$$-e^{-j(\nu-2)z}Y\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = e^{-j\nu z}H^*(2z). \quad (6.24)$$

Definindo que

$$P(-z) \triangleq H^*(2z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{2k} e^{jz2k}, \quad (6.25)$$

em que  $c_{2k} \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}}h_k^*$ , observa-se que o membro direito dessa equação acima representa uma solução de Floquet para uma equação de Mathieu em particular. A função  $P(\cdot)$  tem período  $\pi$ , satisfazendo a condição inicial  $P(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k h_k = 1$ . Restringindo o domínio dos coeficientes do filtro  $h_k$  para o conjunto dos números reais, determina-se um conjunto de parâmetros  $(a_G, q_G)$ , tais que a função auxiliar

$$y_\nu(z) \triangleq -e^{-j(\nu-2)z}Y_\nu\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.26)$$

seja solução da seguinte equação de Mathieu:

$$\frac{d^2 y_\nu}{dz^2} + (a_G - 2q_G \cos(2z))y_\nu = 0, \quad (6.27)$$

sujeita às seguintes restrições:

$$y_\nu(0) = -Y(\pi/2) = -G(\pi) = -1, \quad (6.28)$$

$$\cos(\pi\nu) - y_\nu(\pi) = 0. \quad (6.29)$$

Isto é,  $y_\nu(\pi) = (-1)^\nu$ .

Para que seja possível obter uma solução adequada para a Equação 6.27, condições de contorno serão impostas aos valores a serem determinados de  $a$  e  $q$ . Se  $\nu$  for um inteiro, a quantidade  $a$  pertence ao conjunto de valores característicos  $a_r(q)$ , já mencionado (neste caso,  $\nu = r$ ). A solução par de período  $2\pi$  para a Equação 6.27 é expressa por [1]

$$y_\nu(z) = -\frac{ce_\nu(z, q)}{ce_\nu(0, q)}. \quad (6.30)$$

A função  $Y_\nu(\omega)$  associada a  $y_\nu(z)$  e relacionada a um filtro de detalhe para a geração de wavelets pode ser descrito por

$$Y_\nu(\omega) = G_\nu(2\omega) = e^{j(\nu-2)(\omega-\frac{\pi}{2})} \frac{ce_\nu(\omega - \frac{\pi}{2}, q)}{ce_\nu(0, q)}. \quad (6.31)$$

Finalmente, obtém-se a função de transferência do filtro de detalhe:

$$G_\nu(\omega) = e^{j(\nu-2)(\frac{\omega-\pi}{2})} \frac{ce_\nu(\frac{\omega-\pi}{2}, q)}{ce_\nu(0, q)}. \quad (6.32)$$

É importante garantir que o expoente característico  $\nu$  seja escolhido de modo que as condições iniciais,  $G_\nu(0) = 0$  and  $G_\nu(\pi) = 1$ , sejam satisfeitas. Estas restrições são necessárias para que os filtros fornecidos sejam compatíveis com a Teoria de Wavelet. Assim,  $\nu$  deve ser um inteiro ímpar. Utilizando identidades e propriedades das funções seno e cosseno elípticos, nota-se também que a magnitude da função de transferência mencionada acima corresponde exatamente ao módulo do seno elíptico [115]:

$$|G_\nu(\omega)| = \left| \frac{se_\nu(\omega/2, -q)}{ce_\nu(0, q)} \right|. \quad (6.33)$$

Dessa maneira, a solução para o filtro suavizador  $H(\cdot)$  pode ser encontrada através das condições de filtro espelhado em quadratura (QMF) [117], fornecendo:

$$H_\nu(\omega) = -e^{-j\nu\frac{\omega}{2}} \frac{ce_\nu(\frac{\omega}{2}, q)}{ce_\nu(0, q)}. \quad (6.34)$$

Neste caso, encontra-se diretamente que  $H_\nu(\pi) = 0$  e que

$$|H_\nu(\omega)| = \left| ce_\nu\left(\frac{\omega}{2}, q\right) / ce_\nu(0, q) \right|. \quad (6.35)$$

Para um valor fixo de  $q$ , a função de Mathieu par com expoente característico  $\nu$  é dada por

$$ce_\nu(\omega, q) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l+1} \cos(2l+1)\omega, \quad (6.36)$$

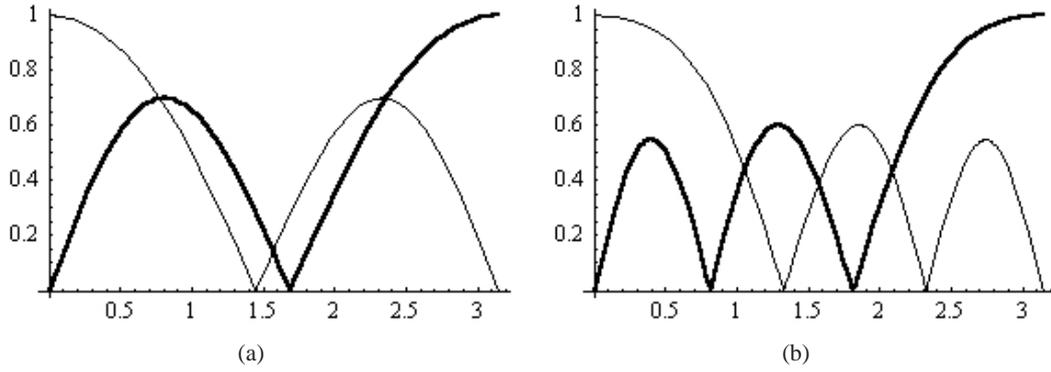


Figura 6.2: Magnitude da função de transferência dos filtros de Mathieu para construção de wavelets: filtro de aproximação  $|H_v(\omega)|$  (linha fina) e filtro de detalhe  $|G_v(\omega)|$  (linha cheia). Estes filtros foram encontrados para os seguintes parâmetros: (a)  $v = 3$ ,  $q = 3$ ,  $a = 9,916$ ; (b)  $v = 5$ ,  $q = 15$ ,  $a = 31,958$ .

em que  $ce_v(0, q) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l+1}$ .

Os coeficientes do filtro  $G$  e  $H$  para construção de wavelets (wavelets de Mathieu) podem ser expressos em termos dos valores dos coeficientes  $\{A_{2l+1}\}_{l \in \mathbb{Z}}$  das funções de Mathieu:

$$\begin{aligned} \frac{h_l^v}{\sqrt{2}} &= -\frac{A_{|2l-v|/2}}{ce_v(0, q)}, \\ \frac{g_l^v}{\sqrt{2}} &= (-1)^l \frac{A_{|2l+v-2|/2}}{ce_v(0, q)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Sem muito esforço, observa-se que

$$h_{-l}^v = h_{l+v}^v, \quad \forall l > 0. \quad (6.38)$$

Os coeficientes dos filtros ficam completamente definidos com a inclusão de condições de normalização impostas pela Teoria de Wavelet:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^v = -1, \quad (6.39)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k h_k^v = 0. \quad (6.40)$$

## 6.4 Resultados

Exemplos ilustrativos para algumas funções de transferências dos filtros de aproximação e detalhe são mostrados na Figura 6.2, para  $v = 3$  e  $5$ , e ajustes adequados do valor de  $q$ . A quantidade  $q$  é encontrada numericamente com auxílio do método de Runge-Kutta de quinta ordem implementado através do pacote computacional *Mathematica*® (Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, E.U.A.). O valor  $a$  é escolhido de modo que forneça funções periódicas.

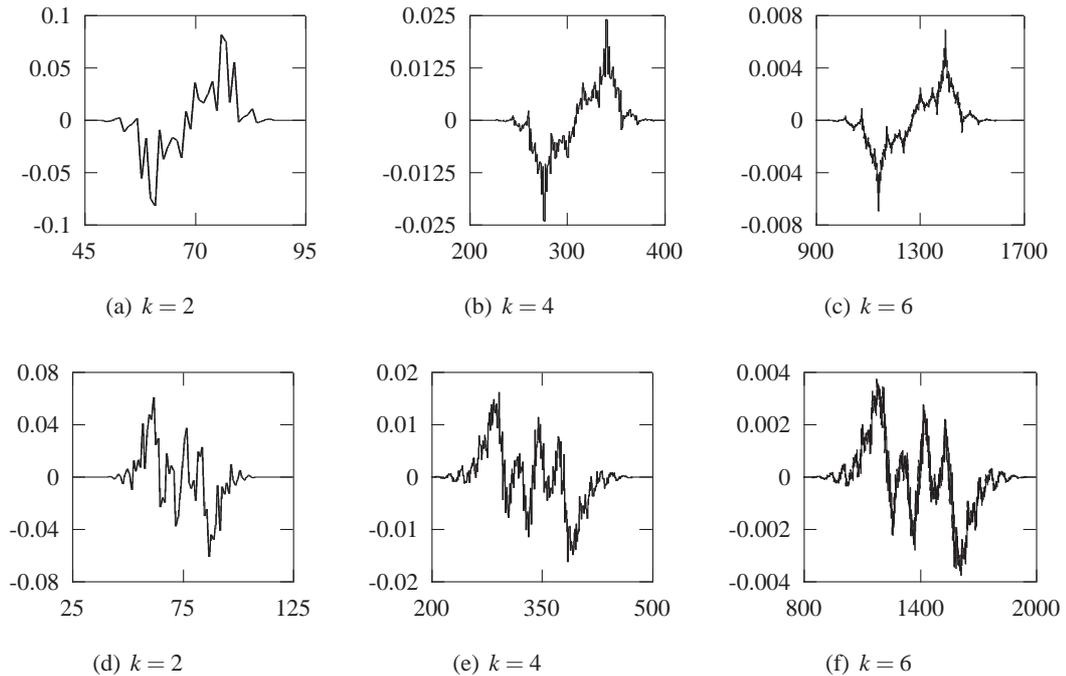


Figura 6.3: Wavelets de Mathieu geradas através de filtros em aproximação tipo FIR submetidos ao algoritmo cascata após 2, 4 e 6 iterações  $k$ . (a)–(c) Wavelet de Mathieu para  $v = 3$  e  $q = 3$ . (d)–(e) Wavelet de Mathieu para  $v = 5$  e  $q = 15$ .

Tais soluções apresentam  $v$  zeros no intervalo  $|\omega| < \pi$ . O comportamento típico de filtros passa-baixas ( $H$ ) e filtros passa-altas ( $G$ ) é claramente observado (Figura 6.2). As wavelets de Mathieu podem ser construídas a partir do filtro passa-baixas proposto, utilizando o algoritmo cascata [93].

Para efetivamente gerar as wavelets, foi realizada uma aproximação dos filtros de Mathieu. Observe que originalmente, tais filtros têm resposta infinita ao impulso (IIR). Para um estudo inicial, adotou-se descartar os coeficientes do filtro de Mathieu com magnitude menor que  $10^{-10}$ , resultando em um filtro de resposta finita ao impulso (FIR). Nos exemplos mostrados aqui, foram retidos 19 coeficientes em cada filtro. Na Figura 6.3, para alguns valores de  $a$  e  $q$ , formas de onda particulares resultantes do processo iterativo do algoritmo cascata são exibidas. Gradualmente, após cada iteração, a forma de onda resultante se aproxima da wavelet de Mathieu proposta. Estes resultados foram simulados em MATLAB™ (The Mathworks, Inc., Natick, MA, E.U.A.).

## 6.5 Observações Finais

Neste capítulo foi proposta uma nova família de wavelets. Foi mostrado que as funções de transferência dos filtros para análise via wavelet são relacionadas com as soluções de equações de Mathieu. E também que as magnitudes das funções de transferência dos filtros de aproximação e detalhe correspondem às funções de Mathieu com expoente característico ímpar.

Adicionalmente, foi mostrado que, no intervalo  $|\omega| < \pi$ , o número de zeros da magnitude da função de transferência de tais filtros — tanto passa-baixas, como passa-altas — pode ser ajustado com uma escolha adequada do expoente característico.

Este trabalho se apresenta como a possível primeira conexão entre equações de Mathieu e wavelets. A metodologia empregada neste estudo pode se aplicar na construção de outras wavelets, a partir da solução de outras equações diferenciais, como, por exemplo, polinômios de Legendre [118], polinômios de Gegenbauer [2], entre outros.

As aplicações possíveis para tais wavelets localizam-se em áreas que explorem as soluções de Mathieu, simetria elíptica, como é o caso de fibra ópticas. Outros problemas que lidam com este tipo de simetria incluem a análise de dinâmica de moléculas em armadilhas eletromagnéticas (*trap*) [119, 120].

## Capítulo 7

# Wavelets de Chebyshev<sup>1</sup>

### 7.1 Introdução

A teoria de Sturm-Liouville abrange uma vasta coleção de problemas de Engenharia e Física [90]. Um tópico particularmente interessante é o relacionado com as equações diferenciais de Chebyshev<sup>2</sup>. É possível mostrar que a solução de tais equações é um conjunto de polinômios denominados polinômios de Chebyshev [1].

Geralmente, os polinômios de Chebyshev são divididos em duas classes: os polinômios de primeira espécie e os de segunda espécie. Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie de ordem  $m$ ,  $T_m(x)$ , satisfazem a equação

$$(1-x)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad (7.1)$$

ao passo que os polinômios de Chebyshev de segunda espécie de grau  $m$ ,  $U_m(x)$ , satisfazem

$$(1-x)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0. \quad (7.2)$$

Os polinômios de Chebyshev formam um conjunto completo de funções ortogonais definidas no intervalo  $[-1, 1]$  com respeito às funções peso  $(1-x^2)^{-1/2}$  e  $(1-x^2)^{1/2}$ , para os polinômios de

---

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma compilação dos artigos: (i) de Sobral Cintra, R. J., de Oliveira, H. M., Soares, L. R., “*On Filter Banks and Wavelets Based on Chebyshev Polynomials*”, 7th WSEAS International Multiconference (CSCC 2003), Ilha Corfu, Grécia, 2003 [121] e (ii) de Sobral Cintra, R. J., de Oliveira, H. M., Soares, L. R., “*Chebyshev Wavelets*”, XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003 [122].

<sup>2</sup>Pafnuty Lvovich Chebyshev (Пафнутий Львович Чебышев) nasceu na Rússia em 1821. Um dos responsáveis pelo estabelecimento da escola russa em Teoria das Aproximações, Chebyshev foi o primeiro a identificar e unificar o conceito de polinômios ortogonais. Tem contribuições fundamentais na aplicação de Probabilidade em Estatística, generalizou o Teorema do Limite Central. Faleceu em São Petersburgo em 1894.

primeira e segunda espécie, respectivamente. Alguns valores especiais são

$$T_n(1) = 1, \quad T_{2n+1} = 0, \quad (7.3)$$

$$U_n(1) = n + 1, \quad U_{2n+1}(0) = 0. \quad (7.4)$$

Há uma grande lista de propriedades relacionando tais polinômios [1, 90, 123]. Entre elas, há a propriedade de simetria [90]

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \quad (7.5)$$

$$U_n(-x) = (-1)^n U_n(x). \quad (7.6)$$

Classicamente, os polinômios de Chebyshev atraem grande atenção em aplicações que envolvam análise numérica, interpolação e truncamento de séries [1, 90]. Entretanto, nos últimos anos, conexões entre polinômios ortogonais e análise de sinais via wavelets, em particular decomposições no espaço  $L^2(-1, 1)$  foram propostas em [123, 124].

Recentemente, em [101, 118], um novo tópico de pesquisa foi investigado: a associação de soluções de equações diferenciais clássicas — como as funções de Mathieu (cossenos e senos elípticos) e os polinômios de Legendre [118] — e o projeto de wavelets. Neste trabalho, é explorada a possibilidade de construir novas wavelets a partir de polinômios de Chebyshev. É investigado o uso de tais polinômios para a definição de banco de filtros para a geração de wavelets. Para tal, serão utilizados resultados de Teoria de Banco de Filtros.

O método proposto para este estudo é delineado nos seguintes passos:

1. Definição (construção) de filtros a partir dos polinômios de Chebyshev;
2. Exame das propriedades e características dos bancos de filtros baseados nos filtros encontrados [98];
3. Utilização do banco de filtros para gerar wavelets usando o procedimento iterativo em cascata [93, 98].

Será convencionada neste estudo, a seguinte notação. Filtros passa-baixas e passa-altas serão denotados pelas seqüências  $h[n]$  e  $g[n]$ , respectivamente. Será adotado que  $\sum_n h[n] = 1$  e  $\sum_n g[n] = 0$ . Também se considerará uma matriz de convolução por  $\mathbf{H}$  e o operador de dizimação por dois será ( $\downarrow 2$ ).

## 7.2 Wavelets de Chebyshev

Nesta seção, será investigada a definição de bancos de filtros baseados em polinômios de Chebyshev e também a possível aplicação destes polinômios na construção de wavelets.

### 7.2.1 Filtros de Chebyshev de Primeira Espécie

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie  $T_m(\cdot)$  podem ser definidos através de uma simples relação recursiva [90]

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x), \quad (7.7)$$

assumindo-se que  $T_0(x) \triangleq 1$  e  $T_1(x) \triangleq x$ .

Para se obter filtros passa-baixas destes polinômios, toma-se inicialmente uma mudança de variável  $x = \cos \omega$ . Deste modo, são formuladas novas funções [1, p.787],

$$T_m(\cos \omega) = \cos(m\omega), \quad (7.8)$$

cujas magnitudes no intervalo  $\omega \in [0, \pi]$  satisfazem as condições de um filtro passa-baixas para a magnitude da resposta em frequência. Poucas modificações são necessárias para que estes polinômios possam ser considerados como candidatos a serem utilizados numa estrutura de banco de filtros para a geração de wavelets.

Filtros  $H(e^{j\omega})$  a serem utilizados para análise de sinais [116] devem verificar algumas condições específicas, tais como:

$$|H(e^{j0})| = 1, \quad (7.9)$$

$$|H(e^{j\pi})| = 0. \quad (7.10)$$

Para fazer com que os polinômios de Chebyshev sejam úteis para este tipo de aplicação, um pequeno ajuste deve ser feito aos polinômios  $T_m(\cdot)$ . Limitando a investigação aos polinômios de ordem ímpar  $m$ , pode-se definir a resposta em magnitude de um filtro suavizador (passa-baixas) como

$$|H_m^{(1)}(e^{j\omega})| \triangleq |T_m(\cos(\omega/2))|, \quad \text{para } m \text{ ímpar.} \quad (7.11)$$

Estas funções são atrativas, pois já são naturalmente normalizadas. A Figura 7.1 mostra algumas curvas de tais funções.

Em um trabalho anterior [101] (Capítulo 6), wavelets baseadas nas equações diferenciais de Mathieu foram definidas de maneira similar. A estrutura matemática das wavelets de Mathieu na-

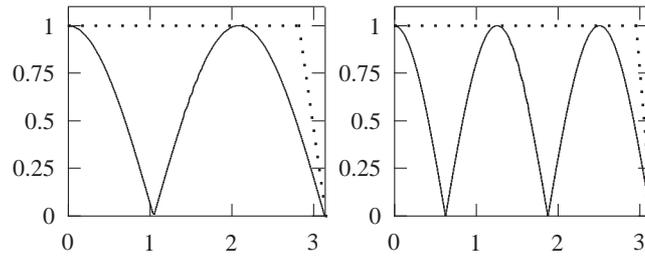


Figura 7.1: Gráficos de  $|T_m(\cos(\omega/2))|$ , para  $m = 3, 5$ ,  $\omega \in [0, \pi]$ .

turalmente induz a associação de uma fase linear  $e^{-jm\omega}$  para os filtros suavizadores de Mathieu. A mesma abordagem será seguida nesta proposta. Neste desenvolvimento, será imposta uma componente de fase linear ao filtro suavizador de Chebyshev, descrito a seguir:

$$H_m^{(1)}(e^{j\omega}) \triangleq e^{-jm\omega/2} T_m(\cos(\omega/2)), \quad m \text{ ímpar.} \quad (7.12)$$

Utilizando a Equação 7.8, pode-se realizar a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned} H_m^{(1)}(e^{j\omega}) &= e^{-jm\omega/2} T_m(\cos(\omega/2)) \\ &= e^{-jm\omega/2} \cos(m\omega/2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + e^{-jm\omega}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Como  $h_m^{(1)} \xleftrightarrow{\text{DTFT}} H_m^{(1)}$ , o filtro de  $m + 1$  coeficientes  $h_m^{(1)}$  pode ser expresso através da aplicação da transformada de Fourier de tempo discreto inversa em  $H_m^{(1)}$  [96]. Isto é:

$$h_m^{(1)}[n] = \begin{cases} 1/2, & n = 0, m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7.14)$$

Este filtro  $h_m^{(1)}[n]$  será utilizado para a definição de banco de filtros de reconstrução e decomposição.

As relações entre os filtros passa-baixas e passa-altas utilizados em um banco de filtros de análise e síntese de sinais são fornecidas em [98, 100, 125] através do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} h_r^{(1)}[n] &= \sqrt{2}h_m^{(1)}[n], \\ g_r^{(1)}[n] &= \sqrt{2}(-1)^n h_r^{(1)}[m-n], \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} h_d^{(1)}[n] &= \sqrt{2}h_r^{(1)}[m-n], \\ g_d^{(1)}[n] &= \sqrt{2}g_r^{(1)}[m-n], \end{aligned} \quad (7.16)$$

para  $n = 0, \dots, m$ . Estas equações são conhecidas como a condição de filtros espelhados em quadratura (Condição QMF). Aqui, os índices  $r$  e  $d$  são utilizados para denotar os filtros de reconstrução e decomposição, respectivamente.

### Propriedades do Banco de Filtros de Chebyshev de Primeira Espécie

Denote-se o uso de funções em letras maiúsculas como a transformada- $z$  das funções homólogas em minúsculo. Assim,  $H_r^{(1)}$  é a transformada- $z$  do filtro passa-baixas de reconstrução  $h_r^{(1)} \triangleq \sqrt{2}h_m^{(1)}$ . De modo similar, os filtros de reconstrução e decomposição terão suas transformadas- $z$  denotadas por  $h_r^{(1)} \xleftrightarrow{z} H_r^{(1)}$ ,  $g_r^{(1)} \xleftrightarrow{z} G_r^{(1)}$ ,  $h_d^{(1)} \xleftrightarrow{z} H_d^{(1)}$  e  $g_d^{(1)} \xleftrightarrow{z} G_d^{(1)}$ .

Será mostrado, a seguir, que os bancos de filtros baseados nos filtros passa-baixas de  $h_m^{(1)}[n]$  possuem a propriedade reconstrução perfeita [98]. Para satisfazer a reconstrução perfeita, um banco de filtros deve verificar as propriedades de (i) cancelamento de *alias*<sup>3</sup> e (ii) ausência de distorções. Para garantir o cancelamento de *alias*, deve-se ter [127]

$$H_r^{(1)}(z)H_d^{(1)}(-z) + G_r^{(1)}(z)G_d^{(1)}(-z) = 0. \quad (7.17)$$

Substituindo estas transformadas- $z$  pelas expressões correspondentes para os filtros de Chebyshev<sup>4</sup> em questão e considerando  $m$  ímpar, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-m})\frac{1}{\sqrt{2}}(1+(-z)^{-m}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+z^{-m})\frac{1}{\sqrt{2}}(1-(-z)^{-m}) = \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-m})\frac{1}{\sqrt{2}}(1-z^{-m}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-z^{-m})\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-m}) = 0, \end{aligned} \quad (7.18)$$

que assegura o cancelamento de *alias* [98]. Continuando o desenvolvimento, para se obter reconstrução perfeita, é também exigido que o banco de filtros não introduza distorções. Ou seja, apenas atrasos são admitidos [99]:

$$H_r^{(1)}(z)H_d^{(1)}(z) + G_r^{(1)}(z)G_d^{(1)}(z) = 2z^{-l}, \quad (7.19)$$

em que  $l$  é um inteiro não-negativo. Realizando substituições, segue-se que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-m})\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-m}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+z^{-m})\frac{1}{\sqrt{2}}(1-z^{-m}) = 2z^{-m}. \quad (7.20)$$

<sup>3</sup>O termo *alias* se refere ao fenômeno de superposição espectral decorrente de taxas de amostragem inadequadas. Foi mantida a terminologia inglesa por ser bastante usual. O termo foi cunhado por J. W. Tukey (1915–2000), que também introduziu termos como: *pre-whitening*, *tapering*, *bispectrum* e *cepstrum* [126, p.75].

<sup>4</sup>Não confundir com os clássicos filtros de Chebyshev. Neste trabalho, o termo “filtro de Chebyshev” será limitado aos filtros aqui desenvolvidos.

É interessante observar que o atraso do banco de filtros é exatamente igual à ordem  $m$  do polinômio de Chebyshev inicialmente selecionado.

Uma outra questão a ser examinada é a condição de ortogonalidade de banco de filtro. Um banco de filtros é ortogonal se a seguinte condição for satisfeita [98, 99]:

$$\sum_k h[k]h[k-2n] = \delta[n], \quad (7.21)$$

em que  $\delta[n]$  é o impulso. Realizando os cálculos para o filtro passa-baixas de Chebyshev de primeira espécie, vem que:

$$h^{(1)}[n] = \frac{1}{2} [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]. \quad (7.22)$$

Assim, para este filtro  $h^{(1)}[n]$  a condição da Equação 7.21 é verificada, sendo possível a construção de um banco de filtros com ortogonalidade.

Embora estas duas propriedades desejáveis — reconstrução perfeita e ortogonalidade — sejam satisfeitas, tem-se que verificar se tais filtros  $h_m^{(1)}[n]$  fazem o processo iterativo do algoritmo cascata [93] efetivamente convergir, gerando uma wavelet. A resposta a esta indagação é negativa. Em outras palavras, a função limite do algoritmo cascata não é uma função suave (*smooth*) e o algoritmo não converge em  $L^2$ . Para provar este fato, será aplicado o seguinte teorema [98] acerca das condições necessárias e suficientes para a convergência do processo iterativo [128].

**Teorema 7.1 (Strang [98])** *Sejam  $h[n]$  um filtro passa-baixas de comprimento  $m+1$  e  $\mathbf{H}$  sua matriz de filtragem associada. Se a matriz infinita  $\mathbf{T} = (\downarrow 2)\mathbf{2HH}^T$  tem uma submatriz central  $\mathbf{T}_{2m-1}$  de ordem  $2m-1$ , tal que qualquer autovalor  $\lambda$  dessa submatriz satisfaz  $|\lambda| < 1$  (exceto por um único autovalor  $\lambda = 1$ ), então o algoritmo cascata converge em  $L^2$ .*

De acordo com o Teorema 7.1, ao se eliminar as linhas ímpares da matriz  $\mathbf{2HH}^T$  (i.e., aplicar o operador dizimação por dois ( $\downarrow 2$ )), tem-se prontamente a matriz  $\mathbf{T}_{2m-1}$ . Para os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, tem-se os filtros

$$\mathbf{h}_m^{(1)} = \frac{1}{2} [1 \quad \underbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0}_{(m-1) \text{ zeros}} \ 1]. \quad (7.23)$$

Assim, a matriz  $\mathbf{2HH}^T$  é formada por um empilhamento de linhas deslocadas de um elemento da

seguinte linha (vetor):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] * [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] = \\ & \frac{1}{2} [1 \underbrace{00 \ \dots \ 00}_{(m-1) \text{ zeros}} \ 2 \ \underbrace{00 \ \dots \ 00}_{(m-1) \text{ zeros}} \ 1], \end{aligned} \quad (7.24)$$

em que  $*$  denota a operação de convolução linear.

Como os elementos  $1/2$  do vetor resultante estão separados do elemento unitário por um número par  $m - 1$  de zeros ( $m$  é ímpar), a eliminação das linhas ímpares de  $2\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  fará com que cada coluna de  $\mathbf{T}_{2m-1}$  tenha um único elemento 1 ou um par de elementos com valor  $1/2$ . Uma representação matricial é vista abaixo:

$$\mathbf{T}_{2m-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Observa-se que  $\mathbf{T}_{2m-1}$  é uma matriz estocástica.

Através do cálculo direto dos autovalores desta matriz, a busca de matrizes  $\mathbf{T}_{2m-1}$  que satisfaçam as condições do Teorema 7.1 retornou apenas um caso favorável para  $m < 256$ . Este único caso é  $m = 1$ . Interessantemente, para  $m = 1$  o filtro suavizador resultante,

$$h_1^{(1)}[n] = \frac{1}{2} [1 \ 1], \quad (7.26)$$

é o banco de filtros de Haar, que faz o algoritmo cascata gerar as wavelets de Haar. Limitando nossa busca aos resultados computacionais, este foi o único polinômio de Chebyshev de primeira espécie que produz uma wavelet.

**Exemplo 2** Considerando o filtro passa-baixas  $h_3^{(1)}[n] = \frac{1}{2} [1 \ 0 \ 0 \ 1]$ , para  $m = 3$ , a submatriz central de  $(\downarrow 2)\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  tem ordem  $2m - 1 = 5$ . Computando esta submatriz, tem-se

$$\mathbf{T}_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

cujos autovalores são  $\pm\frac{1}{2}$  e  $\pm 1$ . Como há dois autovalores com módulo unitário, o Teorema 7.1 não é satisfeito. Uma aplicação deste tipo de filtro ao algoritmo cascata gera as formas de onda trazidas na Figura 7.2: funções que não convergem em  $L^2$ .

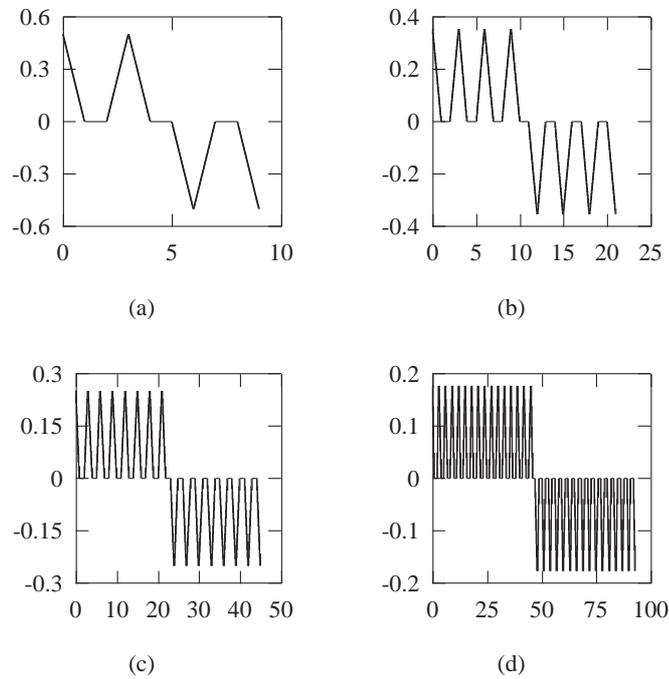


Figura 7.2: Formas de onda geradas pelo algoritmo cascata quando filtros de Chebyshev de primeira espécie de ordem três são utilizados. São mostrados os resultados para as interações 1 (a), 2 (b), 3 (c) e 4 (d) do algoritmo.

### 7.2.2 Wavelets de Chebyshev de Segunda Espécie

Nesta subseção serão examinados os polinômios de Chebyshev de segunda espécie. Esta família de polinômios é construída por meio da mesma relação de recorrência utilizada para gerar os polinômios de primeira espécie. Entretanto, as condições iniciais são diferentes. Tem-se:

$$U_m(x) = 2xU_{m-1}(x) - U_{m-2}(x), \quad (7.28)$$

para  $U_0(x) = 1$  e  $U_1(x) = 2x$ . Uma variedade de propriedades e teoremas envolvendo estes polinômios pode ser encontrada em [1, 90].

Seguindo um desenvolvimento inteiramente similar ao realizado na subseção anterior, será investigado o uso dos polinômios  $U_m(x)$  para a definição de filtros passa-baixas. Será mostrado que neste caso, wavelets serão geradas.

Primeiramente, será adotada a usual mudança de variável  $x = \cos \omega$ , levando a seguinte formulação [1, p.776]:

$$U_m(\cos \omega) = \frac{\text{sen}(m+1)\omega}{\text{sen } \omega}. \quad (7.29)$$

Analogamente, o valor absoluto destas funções será associado à magnitude da resposta em frequência do filtro passa-baixas a ser utilizado no algoritmo cascata. Entretanto, neste caso, diferentemente dos polinômios de primeira espécie, as funções  $|U_m(\cos \omega)|$  não satisfazem prontamente as condições de filtro passa-baixas ( $|H(e^{j0})| = 1$  e  $|H(e^{j\pi})| = 0$ ). Para tal, serão necessários ajustes adicionais. De modo idêntico ao caso dos polinômios de primeira espécie, é assumido um escalonamento no argumento de  $U_m(\cdot)$  por um fator de  $1/2$ , contornando o problema. Assim, a magnitude dos filtros passa-baixas de Chebyshev de segunda espécie é expressa por

$$|H_m^{(2)}(e^{j\omega})| = |U_m(\cos(\omega/2))|, \quad \text{for } n \text{ ímpar}. \quad (7.30)$$

Isto induz que  $|H(e^{j\pi})| = 0$ . A restrição de ordem ímpar também deve ser respeitada, caso contrário os escalonamentos de  $1/2$  não procedem.

Em contraste com os polinômios de primeira espécie, os de segunda espécie não são naturalmente normalizados. O valor máximo de  $U_m(\cos \omega)$  é localizado no lóbulo principal à vizinhança de  $\omega = 0$  e pode ser calculado sem dificuldades:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} U_m(\cos(\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{sen}((m+1)\omega)}{\text{sen}(\omega)} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{(m+1)\cos((m+1)\omega)}{\cos(\omega)} \\ &= m+1. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Deste modo, um fator de escalonamento de  $\frac{1}{m+1}$  deve ser levado em consideração a fim de normalizar a resposta do filtro. Este ajuste redefine a magnitude da resposta em frequência para

$$|H_m^{(2)}(e^{j\omega})| \triangleq \frac{1}{m+1} |U_m(\cos(\omega/2))|, \quad m \text{ ímpar}. \quad (7.32)$$

Isto garante que  $|H_m^{(2)}(e^{j0})| = 1$ . Ilustrações da magnitude da resposta em frequência  $H_m^{(2)}(e^{j\omega})$  destes

filtros são mostradas na Figura 7.3.

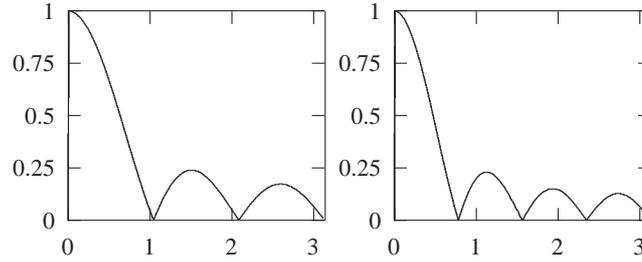


Figura 7.3: Gráficos de  $\frac{1}{m+1}|U_m(\cos(\omega/2))|$ , para  $m = 5, 7$ ,  $\omega \in [0, \pi]$ .

O passo final desta seqüência de ajustes concerne à fase do filtro. Novamente, será associada uma fase linear convenientemente escolhida [101]. Conseqüentemente, os filtros passa-baixas de Chebyshev de segunda espécie têm sua transformada de Fourier definida por

$$H_m^{(2)}(e^{j\omega}) \triangleq \frac{1}{m+1} \underbrace{e^{-jm\omega/2}}_{\text{fase}} U_m(\cos(\omega/2)). \quad (7.33)$$

Usando o fato de que  $U_m(\cos(\omega)) = \text{sen}((m+1)\omega)/\text{sen}(\omega)$ , pode-se escrever a seguinte expressão:

$$H_m^{(2)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{m+1} e^{-jm\omega/2} \frac{\text{sen}((m+1)\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)}. \quad (7.34)$$

Surpreendentemente, esta é a exata formulação da resposta em freqüência dos conhecidos filtros de média móvel ou janela retangular (!) [96]. A resposta ao impulso  $h_m^{(2)}[n]$  deste tipo de filtro é prontamente obtida e conhecida:

$$h_m^{(2)}[n] = \begin{cases} 1/(m+1), & n = 0, \dots, m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7.35)$$

### Propriedades do Banco de Filtros de Chebyshev de Segunda Espécie

Considerando a Equação 7.35 como ponto de partida, pode-se definir os filtros necessários para o banco de filtros. Como feito anteriormente, baseado em  $h_m^{(2)}[n]$  e usando definições similares para os filtros de reconstrução e decomposição (Equações 7.15 e 7.16), encontra-se as seguintes expressões:

$$h_r^{(2)}[n] = \sqrt{2}h_m^{(2)}[n], \quad g_r^{(2)}[n] = \sqrt{2}(-1)^k h[m-n], \quad (\text{QMF}) \quad (7.36)$$

$$h_d^{(2)}[n] = \sqrt{2}h_r[m-n], \quad g_d^{(2)}[n] = \sqrt{2}g_r[m-n]. \quad (7.37)$$

As transformadas- $z$  são prontamente encontradas e dadas por:

$$H_r^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m z^{-i}, \quad (7.38)$$

$$G_r^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m (-1)^i z^{-i}, \quad (7.39)$$

$$H_d^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m z^{-i}, \quad (7.40)$$

$$G_d^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m -(-1)^i z^{-i}. \quad (7.41)$$

Primeiramente, será examinada a questão de reconstrução perfeita. Como comentado anteriormente, um banco de filtros deve satisfazer cancelamento de *alias* e ausência de distorções a fim de possuir a propriedade de reconstrução perfeita [98]. Ou seja, ambas as condições abaixo devem ser verificadas

$$H_r^{(2)}(z)H_d^{(2)}(-z) + G_r^{(2)}(z)G_d^{(2)}(-z) = 0, \quad (7.42)$$

$$H_r^{(2)}(z)H_d^{(2)}(z) + G_r^{(2)}(z)G_d^{(2)}(z) = 2z^{-l}, \quad (7.43)$$

respectivamente. Após tediosa manipulação, encontra-se que a propriedade de cancelamento de *alias* é completamente satisfeita:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m z^{-i} \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m (-z)^{-i} + \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m (-1)^i z^{-i} \frac{\sqrt{2}}{m+1} \sum_{i=0}^m -(-1)^i (-z)^{-i} = \\ & \frac{2}{(m+1)^2} \left( \sum_{i=0}^m z^{-i} \sum_{i=0}^m (-1)^i z^{-i} - \sum_{i=0}^m (-z)^{-i} \sum_{i=0}^m z^{-i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Entretanto, após a aplicação da Equação 7.43, obtém-se que

$$\begin{aligned} H_r^{(2)}(z)H_d^{(2)}(z) + G_r^{(2)}(z)G_d^{(2)}(z) = \\ \left( \frac{\sqrt{2}}{m+1} \right)^2 \left( \frac{1 - z^{-(m+1)}}{2} \right)^2 \frac{z^{-1}}{(1 + z^{-2})^2}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Como a expressão resultante não é da forma  $2z^{-l}$ , para  $l$  inteiro não-negativo, conclui-se que este banco de filtro introduz algum tipo de distorção.

É também fácil de verificar que  $h^{(2)}[n]$  não obedece a Equação 7.21 e, portanto, não há a condição de ortogonalidade. Apesar destas condições não serem satisfeitas, não há impedimento para a existência de wavelets associadas. Em verdade, um exame sobre a convergência do algoritmo iterativo para tais filtros particulares revela o seguinte Lema.

**Lema 7.1** Bancos de filtros baseados em polinômios de Chebyshev de segunda espécie de ordem ímpar satisfazem o Teorema 7.1.

*Demonstração:* Tem-se que  $h_m^{(2)}[n] = \frac{1}{m+1} \underbrace{[1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1]}_{(m+1) \text{ uns}}$ . Assim, as linhas da matriz  $2\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  têm o seguinte formato

$$\begin{aligned} & 2 \frac{1}{m+1} [1 \ \dots \ 1] * \frac{1}{m+1} [1 \ \dots \ 1] = \\ & \frac{2}{(m+1)^2} [1 \ 2 \ \dots \ m \ m+1 \ m \ \dots \ 2 \ 1]. \end{aligned} \quad (7.46)$$

A matriz  $(\downarrow 2)\mathbf{2}\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  é então descrita por:

$$\mathbf{T}_{2m-1} = \frac{2}{(m+1)^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & \\ 6 & 7 & \dots & m-1 & m-2 & m-3 & m-4 & m-5 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & \dots & m+1 & m & m-1 & m-2 & m-3 & \dots & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \dots & m-1 & m & m+1 & m & m-1 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \dots & m-3 & m-2 & m-1 & m & m+1 & \dots & 5 & 4 \\ 0 & 0 & \dots & m-5 & m-4 & m-3 & m-2 & m-1 & \dots & 7 & 6 \\ & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (7.47)$$

Verifica-se que esta matriz em particular é estocástica: a soma dos elementos das colunas é sempre unitária. Para constatar este fato, basta observar separadamente as colunas pares e ímpares, notando que cada coluna tem elementos pares ou ímpares apenas. A soma dos elementos das colunas de elementos pares ( $s_e$ ) e de elementos ímpares ( $s_o$ ) pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} s_e &= m+1 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} 2k \\ &= m+1 + 2 \frac{m-1}{2} \frac{m+1}{2} = \frac{(m+1)^2}{2}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$s_o = 2 \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} 2k+1 = \frac{(m+1)^2}{2}. \quad (7.49)$$

Conseqüentemente,  $\mathbf{T}_{2m-1}$  é uma matriz estocástica.

O seguinte teorema, derivado do célebre Teorema de Perron-Frobenius [38, p.53], apresenta-se bastante adequado para demonstrar que  $\mathbf{T}_{2m-1}$  satisfaz as condições do Teorema 7.1.

**Teorema 7.2 (Autovalores de Matrizes Estocásticas Irredutíveis (Perron-Frobenius))** *Se uma matriz estocástica (markoviana)  $\mathbf{M}$  for irredutível, então  $\mathbf{M}$  tem um autovalor simples com valor abso-*

luto igual a um. Se  $\mathbf{M}$  for aperiódica, então, para todo os outros autovalores  $\lambda$ , tem-se que  $|\lambda| < 1$ .

*Demonstração:* Assim, se for mostrado que  $\mathbf{T}_{2m-1}$  é uma matriz estocástica (a) irredutível e (b) aperiódica, o lema fica provado.

A primeira condição é simples de ser verificada, pois  $\mathbf{T}_{2m-1}$  é uma matriz banda com elementos não-nulos na banda. Na terminologia de cadeias de Markov, pode-se dizer que todos os “estados” são acessíveis entre si e, portanto, a matriz  $\mathbf{T}_{2m-1}$  é irredutível [38]. Ademais, a diagonal da matriz  $\mathbf{T}_{2m-1}$  tem todos os elementos diferentes de zero. Assim, em termos de cadeias de Markov, isto seria interpretado como auto-recorrência (*self-loop*) dos estados. Esta condição garante a aperiodicidade da matriz, finalizando assim a demonstração.  $\square$

A Figura 7.4 mostra alguns resultados obtidos do algoritmo cascata com a utilização dos filtros de Chebyshev de segunda espécie. Vê-se claramente o surgimento de uma wavelet suave e de suporte compacto.

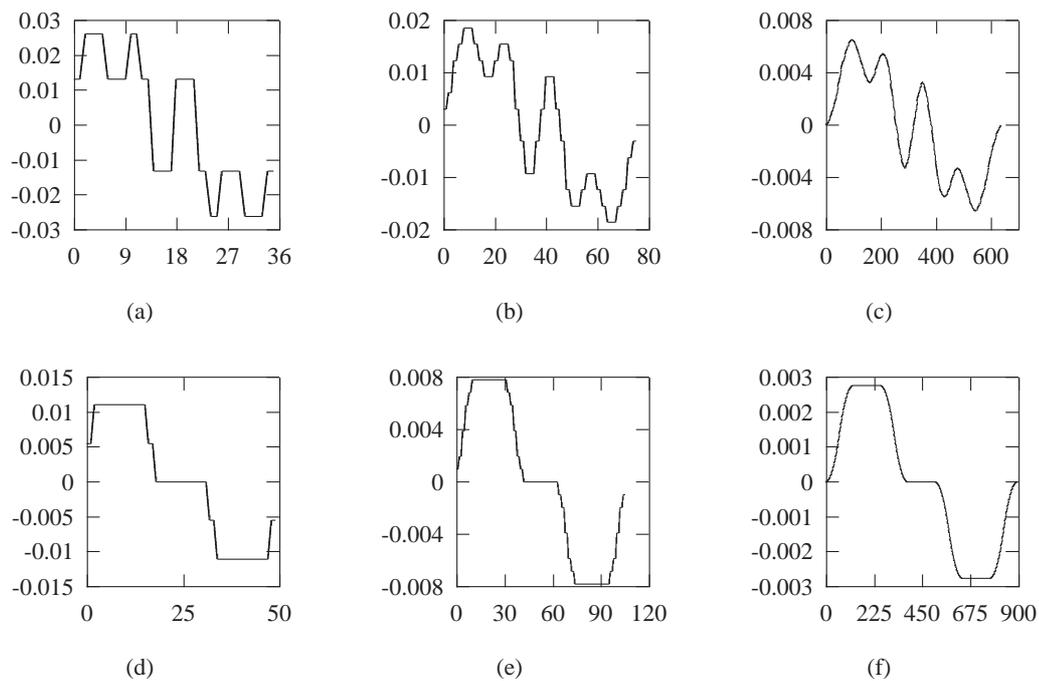


Figura 7.4: Wavelets de Chebyshev de segunda espécie: resultados após 2, 3 e 4 iterações, da esquerda para direita. As curvas (a)–(c) são para  $m = 5$  e as curvas (d)–(f), para  $m = 7$ .

**Exemplo 3** Considere-se o filtro de Chebyshev de segunda espécie de ordem 3 dado por  $h_3^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Construindo-se a submatriz central associada a  $\mathbf{T} = (\downarrow 2)\mathbf{2}\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ , tem-se que:

$$\mathbf{T}_5 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (7.50)$$

Como todos os autovalores desta matriz —  $1$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  e  $0$  (duplo) — têm valor absoluto menor que a unidade (exceto um único autovalor), a regularidade e convergência em  $L^2$  é assegurada.

### 7.2.3 Implementando as Wavelets de Chebyshev

Os filtros propostos neste trabalho foram simulados em ambiente computacional com o uso do pacote *Wavelet Toolbox* para MATLAB™ (The Mathworks, Inc., Natick, MA, E.U.A.) [100]. Alguns sinais-testes foram analisados para ilustrar o comportamento da análise fornecida pelas wavelets sugeridas neste trabalho, bem como para inspecionar aplicações em potencial.

Na Figura 7.5, é mostrada uma análise de um sinal degrau utilizando-se a wavelet de Chebyshev de segunda espécie de ordem 5. A Figura 7.6 exibe dois exemplos de aplicações práticas. Primeiramente, examina-se a decomposição de uma perturbação em frequência. No segundo exemplo, um sinal ruidoso é analisado em dois níveis de decomposição, ilustrando o potencial uso dessas wavelets em descontaminação por limiar (*waveshrinkage*) [129].

## 7.3 Comentários Finais

Motivado por um problema clássico de equações diferenciais, foi introduzida uma nova família de funções para análise de sinais por meio de wavelets. Baseado nos polinômios de Chebyshev (primeira e segunda espécies) e em resultados anteriores [101], foram definidos bancos de filtros para a geração de wavelets.

Foi mostrado que os polinômios de Chebyshev de primeira espécie não são naturalmente adequados para a construção de wavelets, pois tais polinômios não induzem um banco de filtros adequados para o processo iterativo do algoritmo cascata.

Foi mostrado que os polinômios de Chebyshev de segunda espécie fornecem wavelets não-ortogonais, suaves e de suporte compacto. Tais wavelets são geradas por um banco de filtros, cujos filtros são inesperadamente simples: filtros média móvel. As principais propriedades deste banco de filtros foram examinadas em detalhes. Em particular, uma prova da convergência do algoritmo cascata para tais filtros foi apresentada. A Tabela 7.1 resume as propriedades dos bancos de filtro propostos.

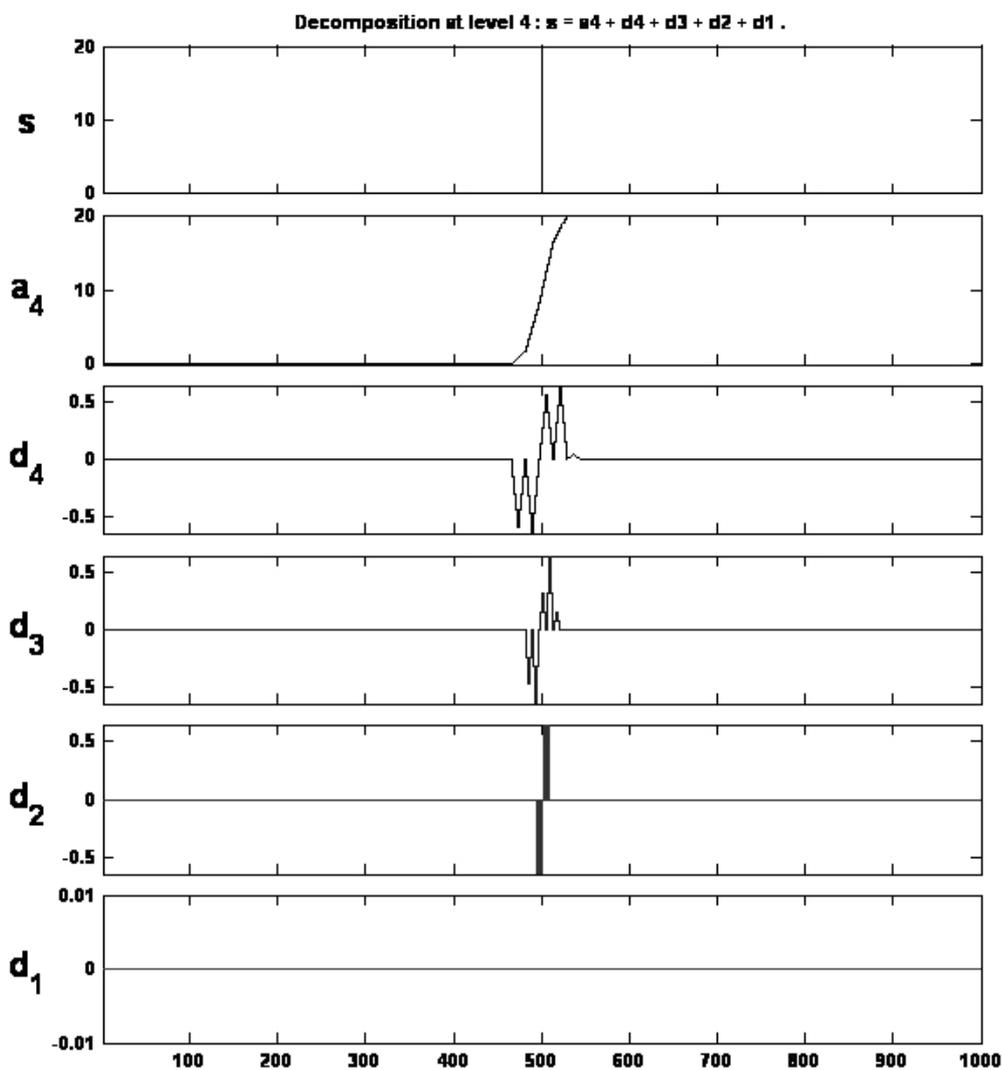


Figura 7.5: Um exemplo do uso da decomposição em escala utilizando a wavelet de Chebyshev de quinta ordem: análise da função degrau.

Tabela 7.1: Resumo das propriedades dos bancos de filtros baseados em filtros de Chebyshev.

Propriedade	Primeira Espécie	Segunda Espécie
Simetria	Sim	Sim
Reconstrução Perfeita	Sim	Não
Ortogonalidade	Sim	Não
Convergência <sup>a</sup>	Não	Sim
Wavelet de Suporte Compacto	n/a	Sim

<sup>a</sup>Algoritmo cascata converge para wavelets.

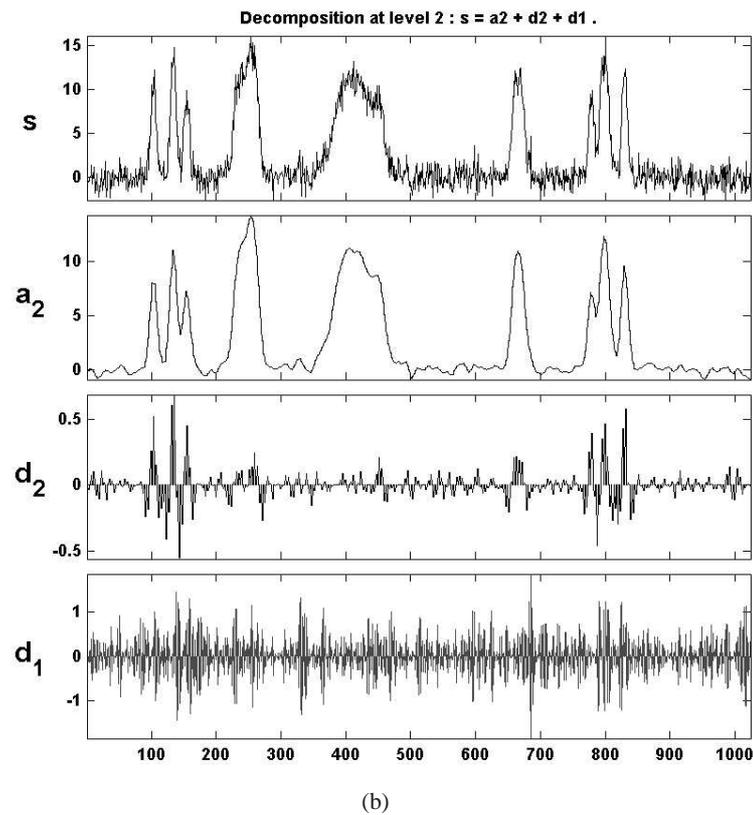
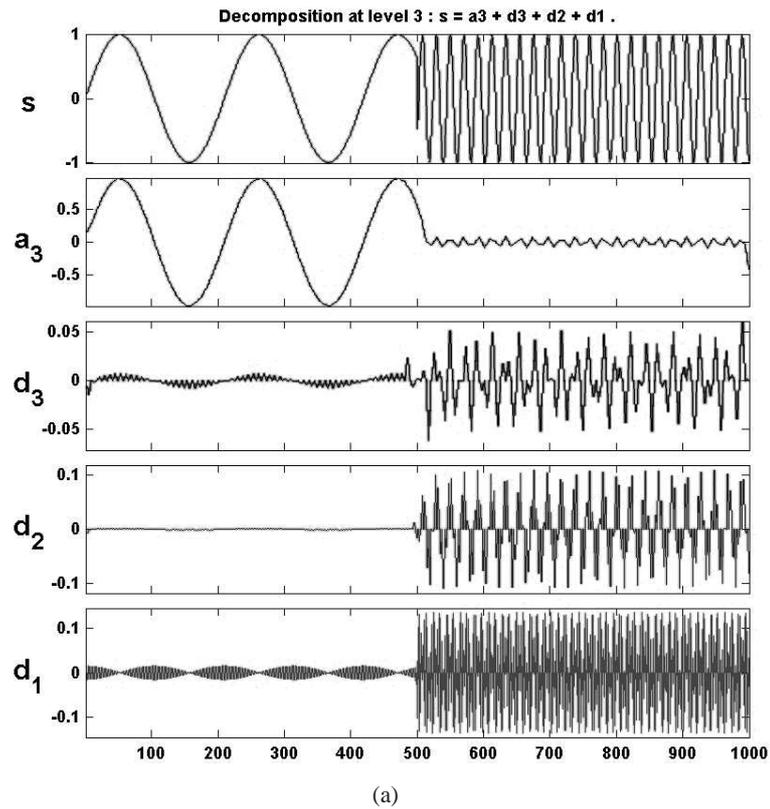


Figura 7.6: (a) Análise de um sinal com perturbação em frequência (decomposição de 3 níveis), (b) Remoção de ruído de um sinal-teste de MATLAB<sup>TM</sup> noisbump através da wavelet de Chebyshev de segunda espécie para  $m = 3$ .

Wavelets não-ortogonais vêm, recentemente, sendo consideradas com maior frequência em problemas de redução de ruído [130] e reconhecimento de padrões [131]. Sendo estas algumas áreas de potencial aplicação para wavelets propostas.

Finalmente, pode-se observar que os polinômios de Chebyshev são, em verdade, casos particulares de uma classe mais geral de polinômios: os polinômios de Gegenbauer. O método utilizado aqui para gerar wavelets pode ser utilizado, tomando como ponto de partida os polinômios de Gegenbauer. Tal consideração deu origem ao trabalho original “*New Compactly Supported Scaling and Wavelet Functions Derived from Gegenbauer Polynomials*” publicado em *IEEE Proceedings of the Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Cataratas do Niágara, Canadá [2].

## **Parte III**

# **Uma Aplicação em Engenharia Biomédica: Eletrogastrografia**

## Capítulo 8

# Eletrogastrografia

*When a man's stomach is full it makes no difference whether he is rich or poor.*

EURÍPIDES (480 A.C–406 A.C.)

Neste capítulo, serão feitos comentários sobre a natureza anatômica e fisiológica do estômago. O enfoque será dado às particularidades da atividade elétrica gástrica.

### 8.1 Anatomia do Estômago

O estômago é um órgão muscular liso, oco, em formato de bolsa em J, conforme ilustrado na Figura 8.1 que exibe um diagrama da seção transversal do órgão. A volta maior do estômago é chamada de grande curvatura<sup>1</sup> e a menor volta é chamada de pequena curvatura. Anatomicamente, o estômago é classicamente dividido em três partes: (i) fundo (situado proximalmente), (ii) corpo e (iii) antro. A histologia do fundo e do corpo é muito similar, se não igual; a região antral, por sua vez, possui relativamente uma maior densidade de células musculares lisas [132].

A parede estomacal, similarmente a outras partes do tubo digestivo, é formada de três camadas: mucosa, muscular e serosa. Destas três camadas, chama atenção a camada muscular, que, por si só, se divide em três níveis: camada longitudinal, camada circular e camada oblíqua. Estes nomes são devidos à orientação das fibras musculares lisas. A camada serosa é a cobertura mais externa do órgão [133].

A principal função fisiológica do estômago é digerir e transportar alimentos. Após a chegada do bolo alimentar ao estômago, atividades de contração e peristaltismo contribuem para misturar e

---

<sup>1</sup>Apesar de, geometricamente, ter a menor curvatura.

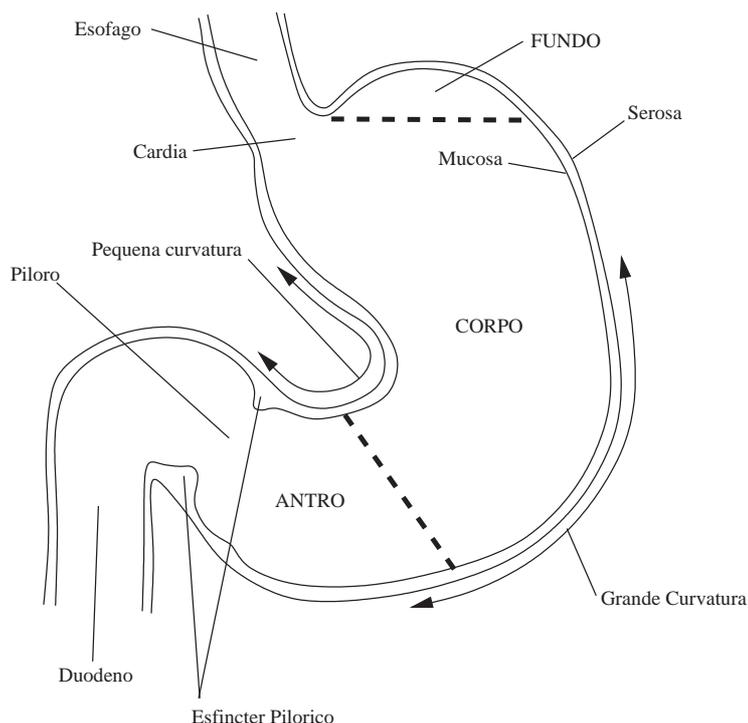


Figura 8.1: Anatomia macroscópica do estômago.

propelir o alimento pelo tubo digestivo, de tal modo que porções do quimo parcialmente digerido sejam levadas gradualmente ao intestino delgado.

As funções de motilidade gástrica estão associadas a complexos padrões de atividade elétrica e gástrica. Partes diferentes do estômago recebem diferentes atribuições funcionais. Em linhas gerais, o resultado desta interação pode ser resumido em quatro etapas:

1. Após a ingestão de alimentos, os músculos da região do fundo e a parte proximal do corpo se relaxam para a acomodação do alimento. Este comportamento é importante para que seja possível o armazenamento temporário de grandes quantidades de alimento;
2. Durante a digestão do alimento, a fase de relaxamento muscular cessa, dando início a uma lenta recuperação do tônus muscular<sup>2</sup>. A atividade de contração tônica move e mistura o conteúdo gástrico para a região distal. As contrações se propagam aboralmente na direção do píloro (vide Figura 8.1), onde param;
3. As contrações gástricas passam a atuar de modo coordenado com a atividade motora do píloro e da região proximal do intestino delgado, de modo que pequenas partes do quimo são enviadas ao duodeno. A quantidade de quimo enviada depende do diâmetro instantâneo da abertura do

<sup>2</sup>O tônus muscular é um estado de contração parcial que os músculos normalmente apresentam. Este estado é causado pela estimulação nervosa e objetiva deixar os músculos prontos para serem atuados [134].

esfíncter pilórico. Em paralelo a isto, quantidades remanescentes de quimo são propelidas na direção oral, continuando a mistura e o processamento. Esta etapa persiste, esvaziando o órgão;

4. Durante o estado interdigestivo, contrações forçadas e periódicas removem qualquer resíduo de conteúdo gástrico que possa ter sido deixado, enviando-o ao duodeno.

## 8.2 Atividade Mioelétrica

O mecanismo de controle do comportamento estomacal, principalmente na região distal do estômago, é de caráter elétrico. A parte proximal não é completamente ausente de atividade elétrica, entretanto apenas atividade intracelular é registrada na literatura, com ausência de padrões elétricos extracelulares [135].

Pode-se dividir a atividade elétrica gástrica em duas classes: a atividade de controle elétrico (ECA) e a atividade de resposta elétrica (ERA). Histologicamente, atribui-se como sítio de origem da atividade elétrica gástrica a área do corpo ao longo da grande curvatura, onde fibras de músculo longitudinal seguem até o início do duodeno. A região do fundo é ausente de contrações.

O processo de propagação da atividade elétrica gástrica entre as células é uma questão não claramente resolvida [136]. Apesar disto, é identificado que, independentemente de como se dá a propagação, há um acoplamento elétrico entre partes distintas do estômago. Ou seja, há um sincronismo entre as regiões.

Estas atividades elétricas, ECA e ERA, têm comportamento distinto, mas atuam associativamente. É mostrado que despolarizações elétricas intracelulares, decorrentes de interações iônicas espontâneas, precedem a contração da fibra muscular lisa estomacal [137, 138].

A ECA é tida como sendo uma despolarização rápida e inicial, funcionando como um gatilho para a contração. Entretanto, tal condição é vista como necessária, mas não suficiente, para o surgimento de uma contração. A ECA é periódica com frequência de aproximadamente 3 ciclos por minuto nos humanos.

Para a existência de uma contração, há a necessidade de que, combinada com a ECA, haja a manifestação da ERA. A ERA tem duas fases distintas: platô e rajadas (*spikes*). Estas duas fases da ERA não são independentes, devendo primeiramente haver um platô para a existência das rajadas. Por outro lado, a manifestação de um platô não necessita de rajadas. A ação combinada da ECA com ERA em platô resulta em contração muscular de pequena intensidade. Quando associado a isto, há rajadas, tem-se contrações bem mais fortes. A ECA é constantemente ativa no estômago, ao passo que a ERA atua de modo intermitente. A Figura 8.2 traz ilustrações da atividade elétrica gerada pelas células musculares lisas gástricas.

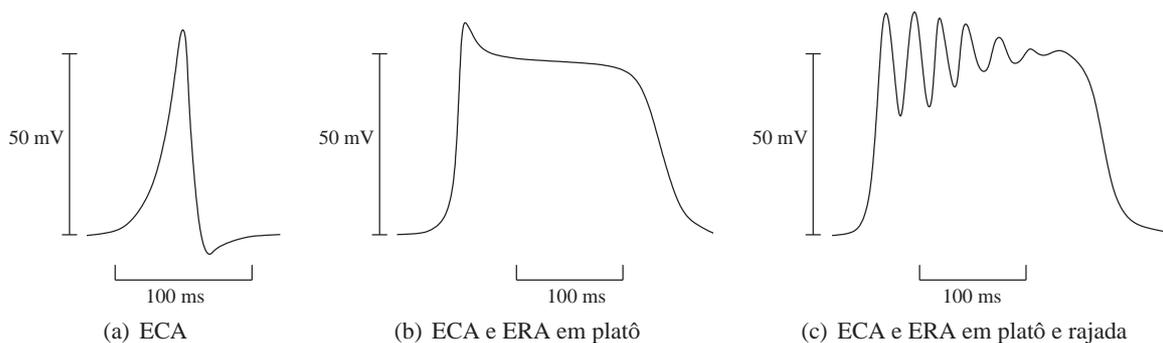


Figura 8.2: Atividade mioelétrica gástrica.

Durante o estado de jejum ou interprandial, foi observado que a atividade elétrica gástrica tem um comportamento particular denominado de Complexo Mioelétrico Migratório (MMC) [139]. Este fenômeno pode ser dividido em quatro fases:

1. A fase quiescente é aquela em que há apenas a presença da ECA, e, portanto, nenhuma contração;
2. Na fase transicional, há a presença de intervalos com a ERA associada a ECA e intervalos onde se tem apenas a ECA;
3. Numa terceira fase, a ERA está sempre presente, seguindo a ECA. Nesta fase, a ECA se apresenta sempre em suas duas formas: platô superposto com rajadas;
4. A fase final é outra fase transicional muito parecida com a segunda fase.

Este ciclo de quatro fases do MMC tem duração aproximada de 2 horas e o período de atividade (terceira fase) dura entre 10 a 20 minutos. Com a ingestão de alimentos, os padrões de MMC se alteram, entrando no processo de atividade gástrica descrita anteriormente. O regresso ao padrão de MMC comentado acima se dá 6–8 horas após a alimentação.

Anormalidades na atividade elétrica gástrica de leituras *in vivo* com eletrodos internamente posicionados na parede estomacal podem ser relacionadas com certas patologias associadas à motilidade gástrica [132, 140–142]. Entretanto, esta técnica é raramente utilizada, pois é invasiva e extremamente não-prática.

### 8.3 Eletrogastrografia

Em termos de amplitude de potenciais elétricos gerados, o estômago é um dos órgãos internos mais ativos, superado apenas pela atividade eletrocardíaca. De maneira similar à eletrocardiogra-

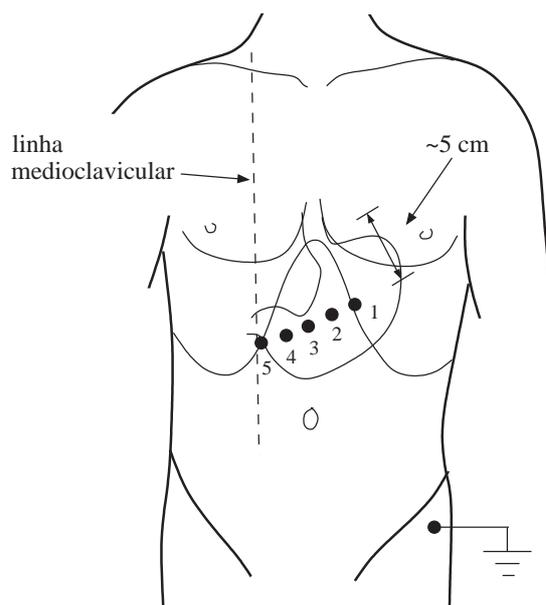


Figura 8.3: Posicionamento de eletrodos para leituras eletrogastrográficas neste trabalho.

fia (ECG), a eletrogastrografia (EGG) é um método para registrar a atividade mioelétrica gástrica por meio de eletrodos cutâneos.

O método data de 1922 quando Alvarez apresentou o trabalho seminal desta área: “*The Electrogastragram and What It Shows*”, cuja frase final é “*The first human electrogastragrams are here presented*” [143]. Apesar das dificuldades tecnológicas de então, vários estudos conduzidos por Alvarez e outros pesquisadores se seguiram [143–146].

Após uma preparação da superfície cutânea, que inclui (i) remoção de pêlos abdominais (se presentes), (ii) aplicação de pasta abrasiva e (iii) desinfecção, procede-se o posicionamento dos eletrodos. Como em técnicas análogas, como, por exemplo, eletroencefalografia, eletrodos são afixados à pele e os sinais da atividade elétrica são coletados. Os eletrodos tipicamente utilizados são eletrodos neonatais descartáveis de Ag/AgCl utilizados normalmente para ECG. A literatura registra várias configurações para a disposição física dos eletrodos [142, 147, 148]. Neste trabalho, adotou-se a configuração proposta por Mirizzi-Scafoglieri, que é considerada ótima [147]. Apesar disto, a questão da padronização do protocolo de leitura de sinais de EGG no que tange a configuração do eletrodos ainda é alvo de debates. Em uma publicação recente [149], há uma tentativa de padronizar o protocolo de aquisição de sinais de EGG como um todo. Entretanto, os autores não levam em consideração a configuração ótima [147], podendo comprometer o estudo. A Figura 8.3 exhibe a configuração adotada neste trabalho para a localização dos eletrodos. Busca-se encompassar a região do antro e a região distal do corpo, que é onde se espera obter uma boa relação sinal-ruído. Os vários eletrodos utilizados

são usualmente combinados em pares bipolares, fornecendo vários canais de leitura. Um eletrodo de referência é afixado à bacia.

Durante as leituras, solicita-se que o paciente limite ao máximo a movimentação de membros, bem como conversação. No caso de experimentação em animais, faz-se o possível para limitar sua movimentação. Tais medidas visam minimizar os artefatos de movimento no sinal de EGG. A leitura se dá em intervalos contínuos de 15–120 minutos, a depender dos protocolos seguidos. Entretanto, como regra geral, procura-se leituras mais longas. Dependendo do objetivo do procedimento, pode-se ter leituras posprandiais ou não. No caso de sinais posprandiais, procura-se fazer o paciente ingerir uma refeição padronizada [150]. No caso de testes não-calóricos, água é ingerida até saciedade.

Segue-se então procedimentos de amplificação em entrada diferencial. No caso de EGG, o valor da impedância de entrada do amplificador requer atenção. Geralmente, a impedância do amplificador em aplicações biomédicas já é alta; mas devido às baixas frequências do sinal de EGG, ela deve ser o maior possível. A impedância pele-eletrodo na faixa de 50–60 Hz é da ordem de 1 k $\Omega$  a 1 M $\Omega$ ; no caso de EGG, que tem frequências extremamente baixas (0,01–1 Hz), a impedância é ainda maior. O condicionamento do sinal é completado com uma filtragem em frequência, objetivando eliminar sinais provenientes de outras fontes, como coração, intestino delgado, cólon, bem como interferências oriundas do sistema respiratório.

## 8.4 Estado da Arte

Os resultados e avanços de outras técnicas de eletrografia, como ECG, sempre fomentaram a pesquisa acerca da EGG, na esperança de que um sucesso similar fosse encontrado. Entretanto, apesar de ter mais de 80 anos, o atual estado da arte não faz com que a EGG seja uma ferramenta clínica, mas objeto de pesquisa.

Uma das maiores dificuldades do método consiste em avaliar em quão fiel o sinal cutâneo representa a atividade elétrica gástrica. O quanto de informação da atividade elétrica interna que é efetivamente disponível em meios cutâneos não é claramente conhecido. O fato é que a eletrogastrografia tem, ao longo de sua história, uma grande lastro de empirismo. Os parâmetros de análise de sinais imediatamente disponíveis resumem-se a: (i) amplitude, (ii) frequência e (iii) fase. Entretanto, estudos anteriores revelam que a utilização de tais parâmetros, de modo isolado, não é capaz de oferecer informações úteis à identificação de anormalidades [151, 152]. É sabido também que há várias dificuldades no processo. Para ilustrar, além da própria impedância pele-eletrodo, a distância entre o estômago e a superfície cutânea é relevante [150].

A partir da década de 1970, os processos de digitalização e auxílio computacional possibilitaram análises cada vez mais sofisticadas. Novas abordagens incluem modelagem e uso de métodos analíticos mais complexos. Abordagens matemáticas mais rigorosas se apresentam atualmente à eletrogastrografia como a alternativa a ser seguida.

Nos próximos dois capítulos serão apresentados dois trabalhos originais acerca do processamento de sinais de EGG. Na exposição de cada um destes capítulos, será descrito o problema a ser endereçado e situada a fronteira da ciência para os tópicos em questão.

## Capítulo 9

# Wavelet Ótima para Eletrogastrografia<sup>1</sup>

### 9.1 Introdução e Motivação

O registro cutâneo da atividade elétrica gástrica, conhecido como eletrogastrografia (EGG), pode desempenhar um papel importante no diagnóstico de desordens da motilidade gástrica [132]. Diversos trabalhos relacionaram com certo sucesso leituras de eletrogastrogramas a diversas patologias, fato que motiva ainda mais o interesse pela técnica [154]. Por ser um procedimento de baixo custo e não-invasivo, a técnica de EGG torna-se bastante atrativa como ferramenta clínica. Vários estudos têm sido conduzidos com o objetivo de classificar eletrogastrogramas registrados de animais em experimentos controlados. Tais análises de eletrogastrogramas incluem (i) determinação do nível de aleatoriedade [155]; (ii) avaliação do conteúdo caótico [156]; (iii) reconhecimento de padrões de campo bio-magnético [157–159] e (iv) investigação da dinâmica da frequência dominante [154].

Além destas pesquisas, técnicas de processamento de sinais, tais como análise via wavelets, também têm sido empregadas para analisar eletrogastrogramas [160–164]. Estas abordagens vêm sendo utilizadas para (i) propor novas wavelets que ofereçam uma melhor localização no plano tempo-frequencial de sinais de EGG [160, 161]; (ii) realizar detecção de ruído em registros de eletrogastrografia [162]; (iii) reduzir artefatos de estimulação [163]; e (iv) caracterizar quadros de disritmia global da atividade elétrica gástrica [164].

O presente estudo endereça o problema da determinação de uma wavelet que seja melhor “casada” à forma de onda do sinal de EGG em estado basal. Embora haja muitos fatores que envolvem a escolha de uma wavelet para análise de sinais [165], geralmente, tanto mais indicada é uma wavelet para uma classe de sinais, quanto menor for a quantidade de coeficientes de wavelet que representam

---

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma compilação do artigo: de Sobral Cintra, R. J., Tchervensky, I. V., Dimitrov, V. S., Mintchev, M. P., “*Optimal Wavelets for Electrogastrography*”, 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, São Francisco, E.U.A., 2004 [153].

estes sinais [93, 166]. Assim, wavelets cuja forma de onda são similares à forma do sinal sob análise são freqüentemente escolhidas.

No contexto desta metodologia proposta, uma wavelet será considerada ótima se representar adequadamente um sinal de EGG após compressão via wavelets a uma dada taxa de compressão. O ponto de ótimo é detectado através da minimização de uma medida de erro entre um sinal de EGG original e sua versão compactada, sujeita à escolha de parâmetros de compressão via wavelets. Se, para uma dada wavelet, o erro associado ao sinal compactado for mínimo, então os coeficientes de sua transformada de wavelet são considerados como bons representantes do sinal original. Assim, tal wavelet seria mais eficientemente “casada” com o sinal sob análise do que outras wavelets em consideração [167]. Uma metodologia similar a esta é proposta por Tewfik em diversos trabalhos [168, 169].

Conseqüentemente, o objetivo deste estudo é quantitativamente determinar uma wavelet adequada à análise de sinais de EGG em estado basal, tanto em modelos caninos, quanto em modelos humanos.

## 9.2 Métodos

### 9.2.1 Preparação Experimental

#### Experimentos em Animais

Após uma laparotomia e a fixação interna e subserosal de seis pares de eletrodos de aço inoxidável na parede gástrica antral de dezesseis cães da raça Beagle (sete fêmeas e nove machos), a parede abdominal foi fechada e cinco eletrodos eletrocardiográficos neo-natais descartáveis padronizados de Ag-AgCl (Conmed, Andover Medical, Haverhill, MA, E.U.A.) foram afixados colinearmente sobre a parede abdominal ao longo da projeção do eixo gástrico. Além destes, um eletrodo de referência foi posicionado na área da bacia. Estudos prévios demonstram que esta configuração de eletrodos pode ser tomada como ótima [147]. Os cinco eletrodos ativos foram agrupados de modo a prover oito canais bipolares de eletrogastrografia. Adicionalmente, seis eletrodos de aço inoxidável implantados subserosalmente fornecem seis canais bipolares com a atividade elétrica gástrica (GEA) interna. Entretanto, neste trabalho apenas os oito canais eletrocardiográficos foram processados, utilizando-se os canais com a GEA interna para fins de referência visual, apenas para verificar que a atividade elétrica gástrica estava presente. A combinação do conjunto de eletrodos e um diagrama da localização física dos eletrodos são exibidos na Figura 9.1. Trabalhos experimentais com arranjos similares foram descritos anteriormente em [154–156].

Foram realizadas gravações da atividade eletrocardiográfica durante trinta minutos. Os sinais de EGG capturados foram condicionados por um filtro ativo passa-baixas de primeira ordem de But-

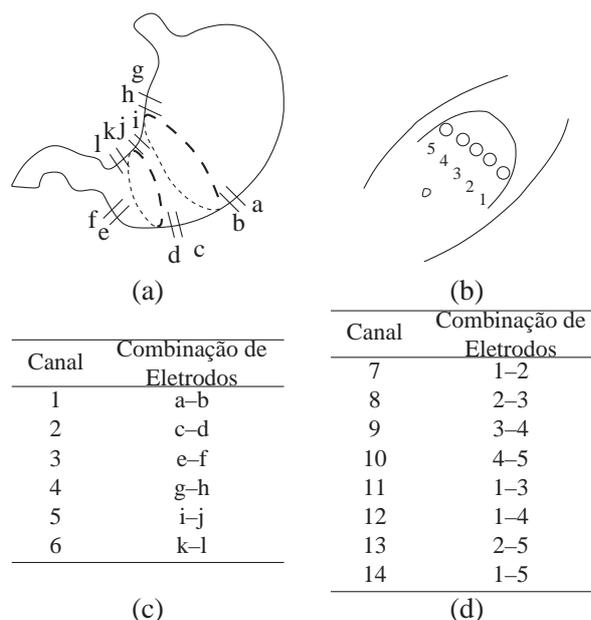


Figura 9.1: Posicionamento dos eletrodos internos (a) e cutâneos (b). Múltiplas combinações de eletrodos foram utilizadas para os registros da GEA (c) e para a eletrogastrografia (d).

terworth na faixa de 0.02–0.2 Hz. Após amplificação, uma conversão analógica-digital com 12 bits foi realizada, utilizando uma frequência de amostragem de 10 Hz e um conversor analógico-digital de 16 canais LABMASTER 20009 (Scientific Solutions, Vancouver, BC, Canadá). Assim, cada aquisição de meia-hora de duração gerou 18.000 amostras por canal por cão.

Como os registros foram significativamente longos, os sinais de EGG foram intermitentemente contaminados por uma variedade de artefatos, incluindo: (i) artefatos de movimento; (ii) variações espontâneas no potencial dos eletrodos; (iii) respiração; (iv) saturação do sinal durante a aquisição; (v) atividade eletrocardíaca; e (vi) perda de sinal durante a aquisição. Usualmente estes artefatos se manifestam simultaneamente em todos os canais de gravação. A Figura 9.2 traz exemplos de diversas categorias de sinais corrompidos. Alguns destes padrões ruidosos são claramente evidenciados por inspeção visual (por exemplo, sinais da Figura 9.2) e podem ser descartados [170]. Esta prática tem sido recomendada objetivando a obtenção de um sinal mais limpo para subsequente análise [149].

Então, para cada cão, intervalos contínuos de 10 minutos de duração de sinais de EGG sincronizados foram manualmente selecionados. Estes dados foram considerados livres de padrões de ruídos visualmente identificáveis. A Figura 9.3 mostra um registro típico de um sinal basal de EGG multi-canal de 10 minutos de duração.

### Experimentos em Humanos

Usando uma configuração similar de oito canais eletrogastrográficos, foram realizadas aquisições de dados por uma hora de duração em seis voluntários normais (duas mulheres e quatro homens)

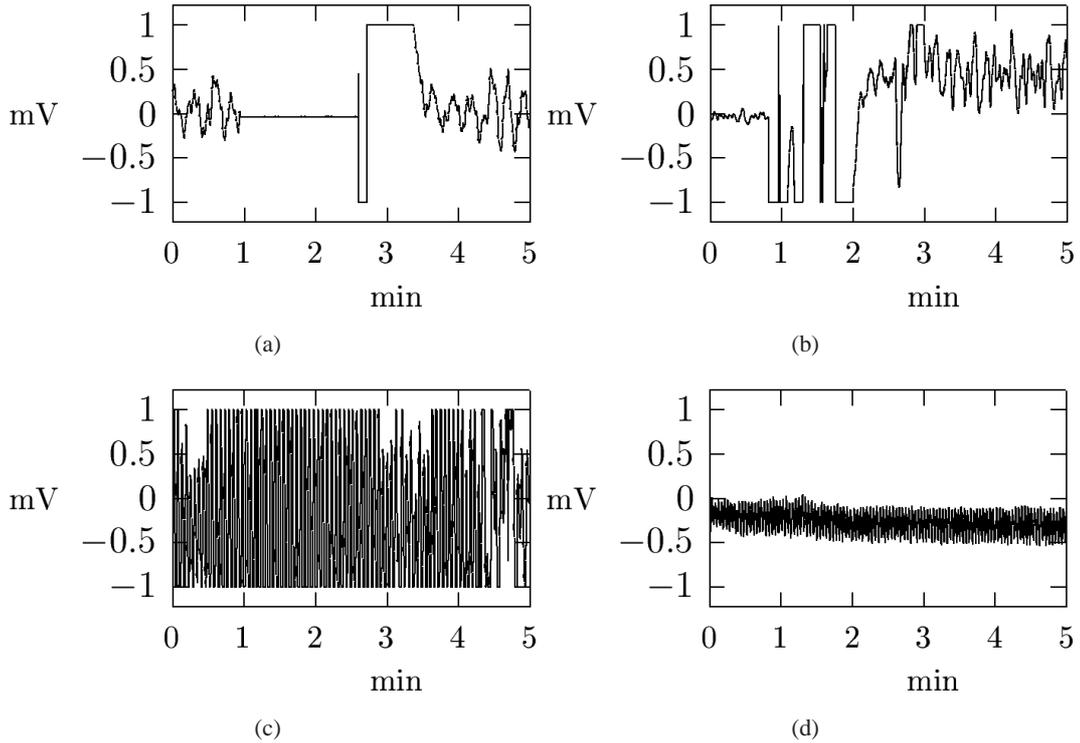


Figura 9.2: Exemplos de artefatos freqüentemente encontrados em aquisições de sinais de EGG: perda de sinal (a), mudança de nível DC e saturação (b), ruído e saturação (c) e perda de sinal por problemas tecnológicos (d).

em estado pós-prandial (refeição de 500 Kcal, 52% carboidratos, 19% proteínas e 29% lipídios). O índice de massa corporal médio dos voluntários foi  $22.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  (Desvio padrão de  $3.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ). Seguiu-se então condicionamento do sinal, amplificação e digitalização semelhantes aos utilizados nos experimentos caninos.

Todos os experimentos foram aprovados pelo *Animal Welfare Committee* e pelo *Ethics Committee* da Faculdade de Medicina, Universidade de Alberta (Edmonton, Alberta, Canadá).

## 9.2.2 Análise de Sinais<sup>2</sup>

### Compressão por Wavelets

A Análise de Sinais por wavelets sugere que é possível escolher uma função wavelet  $\psi(\cdot)$  que gera uma base ortogonal em que um dado sinal pode ser decomposto [93]. Um sinal contínuo  $x(t)$  tem seus coeficientes da transformada de wavelet  $c_{j,k}$  computados por

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad (9.1)$$

<sup>2</sup>Alguns tópicos desta seção já foram discutidos na Parte II desta tese. Assim, são aqui enfocados rapidamente de modo a fazer com que as partes desta tese sejam auto-contidas.

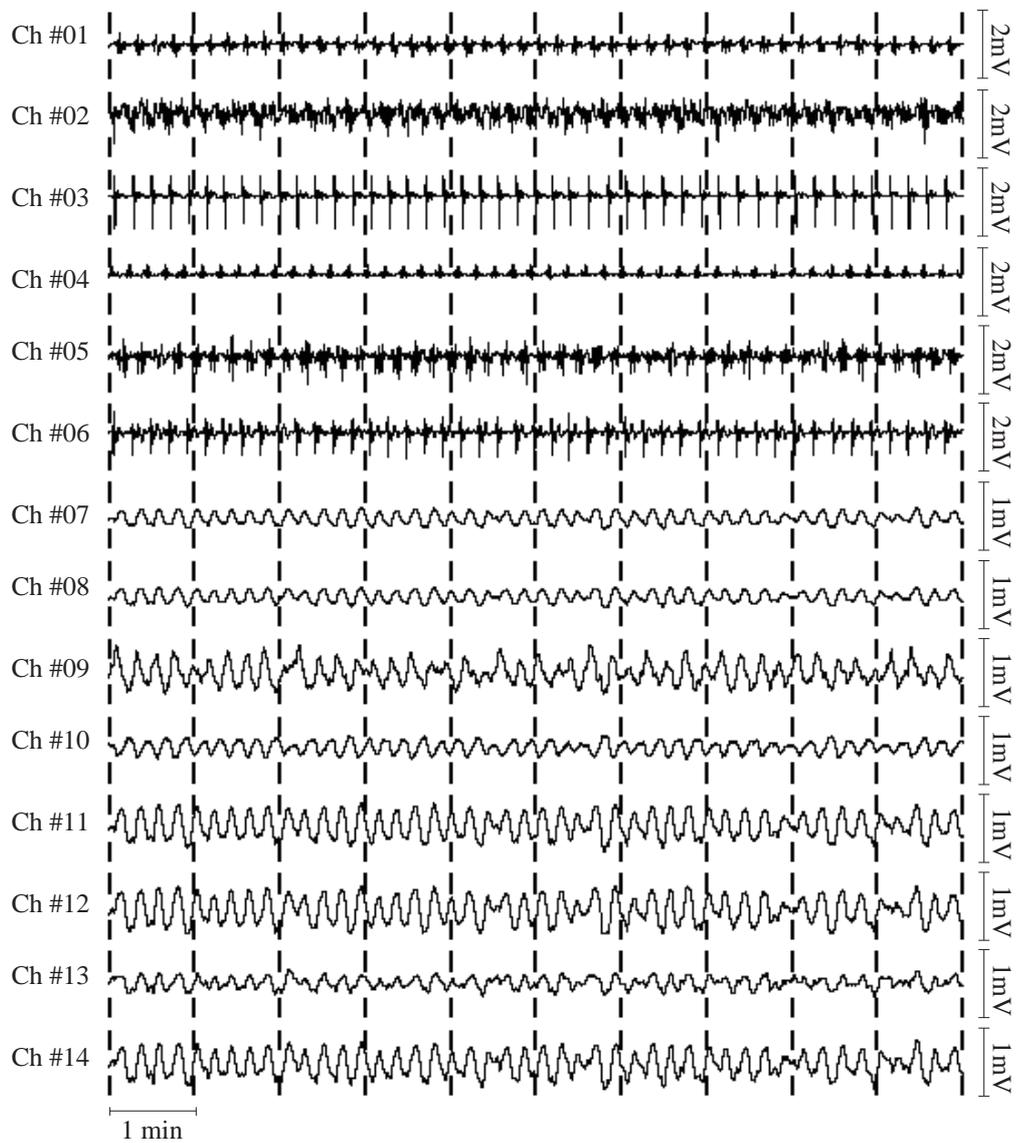


Figura 9.3: Traçados típicos da aquisição multicanal de sinais de EGG em estado basal. Os canais 1–6 correspondem à atividade elétrica gástrica interna. Os canais restantes representam atividade eletrogastrográfica.

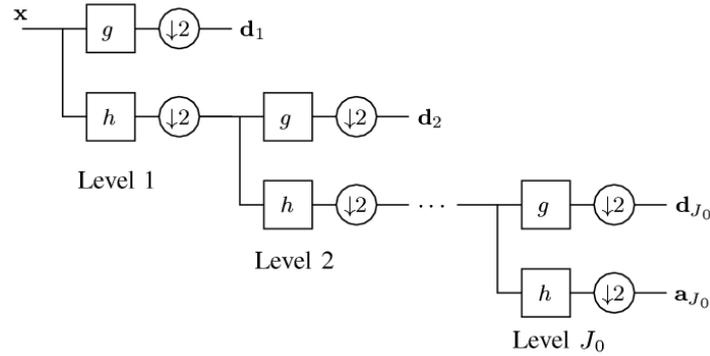


Figura 9.4: Banco de filtros para análise via wavelets. O sinal é iterativamente decomposto através de um banco de filtros para obter sua transformada discreta de wavelet.

em que a base  $\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}\cdot - k)$  é controlada por um índice (fator) inteiro de escala (dilatação)  $j$  e por um índice inteiro de translação  $k$ .

Sob certas condições [93], estes coeficientes representam unicamente a função  $x(t)$ , que pode ser reconstruída a partir dos coeficientes da transformada de wavelet pela seguinte série

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t). \quad (9.2)$$

A Equação 9.2 representa a fórmula de síntese ou transformada inversa de wavelet [171].

Para se processar sinais discretos, esta formulação da transformada de wavelet precisa ser modificada. Mesmo adaptada para tempo discreto, a definição da transformada de wavelet tem uma grande complexidade computacional. Deste modo, transformadas de wavelet são realizadas através da Transformada Rápida de Wavelet usando o algoritmo cascata de Mallat para decomposição (transformada direta) e reconstrução (transformada inversa) [93, 94].

Seja  $\mathbf{x}$  um sinal discreto com  $N = 2^J$  pontos (uma versão do sinal contínuo  $x(t)$  após amostragem). A transformada discreta de wavelet (DWT) de  $\mathbf{x}$  é calculada em uma estrutura recursiva em cascata consistindo de dizimadores  $\downarrow 2$  e filtros passa-baixas  $h$  e passa-altas  $g$  complementares, os quais estão unicamente associados a uma wavelet particular [100, 172]. A Figura 9.4 exhibe um diagrama da estrutura do banco de filtros para a DWT.

Ao fim do procedimento algorítmico, um conjunto de vetores é obtido

$$\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_j, \dots, \mathbf{d}_{J_0}, \mathbf{a}_{J_0}\}, \quad (9.3)$$

em que  $J_0$  é o número de escalas de decomposição da DWT. Este conjunto de vetores de aproximação e detalhe representa a DWT do sinal original. Os vetores  $\mathbf{d}_j$  contém os coeficientes de detalhe da DWT do sinal em cada escala  $j$ . Variando  $j$  de 1 a  $J_0$ , coeficientes de detalhes mais ou menos finos

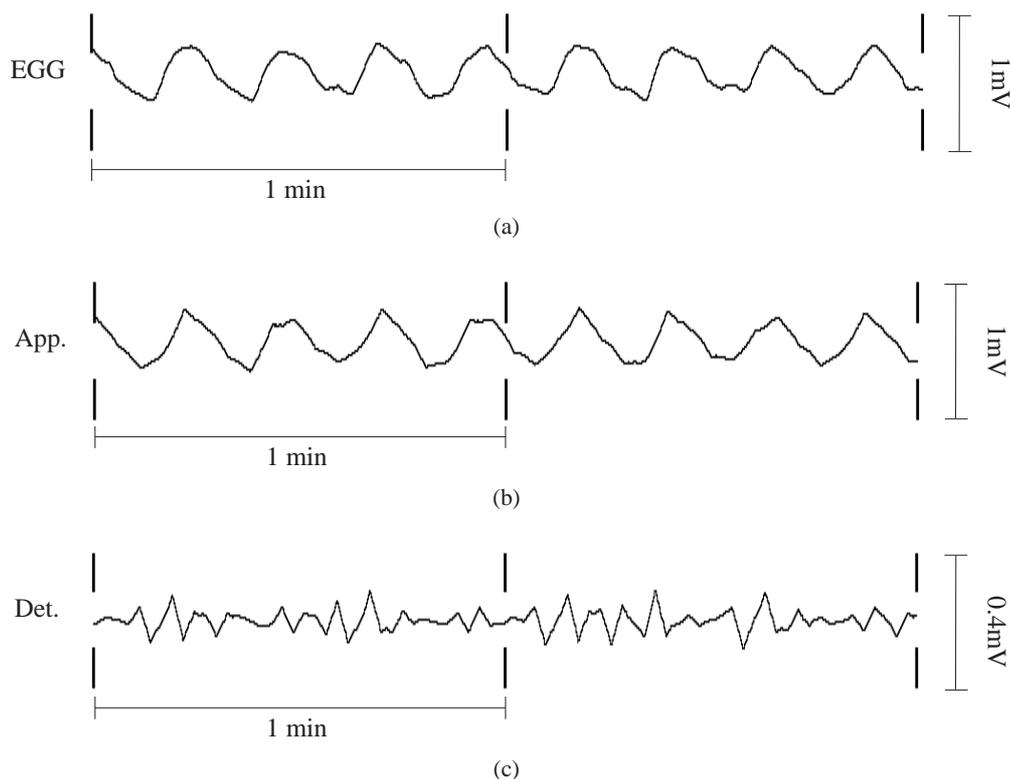


Figura 9.5: Um segmento de 2 minutos de duração de um sinal de EGG típico em estado basal (a), decomposto em sinais de aproximação (b) e detalhe (c) após a sexta iteração utilizando o algoritmo cascata de Mallat. A wavelet utilizada nesta análise foi Daubechies-2.

são obtidos. Por outro lado, o vetor  $\mathbf{a}_{J_0}$  contém os coeficientes de aproximação do sinal na escala  $J_0$ . Note-se que este procedimento recursivo pode ser iterado no máximo  $J$  vezes. Geralmente, o procedimento é iterado  $J_0 < J$  vezes. Dependendo da escolha de  $J_0$ , um conjunto diferente de coeficientes é encontrado. Observe-se que o sinal discreto  $\mathbf{x}$  e sua DWT possuem o mesmo comprimento  $N$ . A transformação inversa pode ser feita através de um procedimento inteiramente análogo e dual [100]. Usualmente, um sinal pode ser sujeito a várias decomposições via wavelets. Esta análise depende fundamentalmente (i) da escolha da wavelet (filtros  $h$  e  $g$ ); e (ii) do número de níveis de decomposição (escalas)  $J_0$ . A Figura 9.5 mostra um sinal de EGG em estado basal e seus sinais de aproximação e detalhe, reconstruídos dos respectivos vetores de aproximação e detalhe. Neste caso foi utilizada wavelet Daubechies-2 [93].

Um esquema de compressão baseado em wavelet procura representar satisfatoriamente um sinal discreto original  $\mathbf{x}$  com o menor número possível de coeficientes da sua DWT associada [166, 173–175]. Um maneira simples de se realizar a compressão é descartar coeficientes que, sob certos critérios, são considerados insignificantes. Conseqüentemente, o sinal reconstruído (compactado) é baseado em um conjunto reduzido de coeficientes [166, 176].

No presente trabalho, o clássico esquema de compressão não-linear foi adotado [166]. Este pro-

cedimento considera um conjunto adaptativo tomado *a posteriori* o qual preserva  $M$  coeficientes da transformada de wavelet que possuem os maiores valores absolutos. Uma decisão por limiar abrupto foi utilizada para anular os coeficientes restantes. O número de coeficientes  $M$  a serem retidos foi determinado de acordo com a taxa de compressão CR desejada, que é definida por

$$\text{CR} = \frac{N}{M}, \quad (9.4)$$

em que  $N$  e  $M$  são o número de coeficientes da transformada de wavelet do sinal original e do sinal compactado, respectivamente.

Deste modo, todos os três parâmetros do esquema de compressão por wavelets foram identificados: (i) o número de escalas (níveis de decomposição); (ii) a taxa de compressão; e (iii) o tipo da wavelet. Entretanto, antes de se entrar em detalhes de como cada um destes parâmetros será encontrado, algumas considerações adicionais precisam ser endereçadas.

### Medida de Distorção

Para continuar nesta análise, torna-se necessário introduzir uma ferramenta de avaliação de qualidade de sinais para comparar um sinal original discreto  $\mathbf{x}$  com seu sinal reconstruído  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Várias medidas que permitem a avaliação do efeito de esquemas de compressão são sugeridos na literatura [177]. Entretanto, uma das ferramentas mais utilizadas é a Diferença Percentual em Média Quadrática (*Percent Root-mean-square Difference*, PRD) [173, 174, 177], que foi a medida de distorção utilizada no presente estudo. A PRD de dois sinais,  $\mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$ , ambos de comprimento  $N$ , é definida por:

$$\text{PRD}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (x_i - \tilde{x}_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2}} \times 100\%. \quad (9.5)$$

### 9.2.3 Escolha dos Parâmetros

#### Número de Escalas

Para selecionar o número de escalas  $J_0 \in \{1, \dots, J\}$  para a decomposição da transformada de wavelet, foi introduzido o seguinte critério:  $J_0$  é escolhido de modo que a escala de aproximação tenha uma pseudo-frequência a mais próxima possível da frequência dominante (fundamental)  $f_c$  de um sinal típico de EGG. No caso dos cães, tal frequência se localiza na faixa de 4–6 ciclos por minuto, nos humanos, em torno de 3 ciclos por minuto [178].

Tabela 9.1: Número de escalas de decomposição  $J_0$  para algumas wavelets

Wavelet	$J_0$	
	Cães	Humanos
Haar	7	8
Daubechies-2	6	7
Daubechies-3	7	7
Coiflet-1	7	7

A pseudo-freqüência  $f_{\text{pseudo}}$  de uma dada escala  $j$  é dada por

$$f_{\text{pseudo}} = \frac{f_{\psi}}{T_s j}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (9.6)$$

em que  $T_s$  é o período de amostragem (no caso em questão, 100 ms) e  $f_{\psi}$  é a freqüência central da wavelet (a freqüência que maximiza a magnitude da transformada de Fourier da wavelet) [100]. Deste modo, a escala  $J_0$  é escolhida para minimizar a diferença:

$$(f_{\text{pseudo}} - f_c). \quad (9.7)$$

A Tabela 9.1 mostra o número de níveis de decomposição para algumas wavelets, segundo este critério.

### Taxa de Compressão

Para esta investigação foram escolhidas algumas taxas de compressão baseado em valores normalmente encontrados na literatura existente em relação a compressão de sinais biomédicos [173, 174]. Assim, foi tomado o seguinte conjunto de taxas de compressão

$$\text{CR} \in \{3, 5, 7, 10\},$$

sendo utilizadas para procedimento de determinação de wavelet ótima.

### Escolha da Wavelet

No contexto deste trabalho, será procurada uma wavelet que minimize a PRD entre um sinal de EGG e sua reconstrução para um dada taxa de compressão. Se, para uma dada wavelet, a PRD associada ao sinal compactado for mínima, então os coeficientes sobreviventes ao processo de compressão estão representando bem o sinal. Assim, a wavelet selecionada está mais efetivamente “casada” com o sinal sob análise, quando comparada a outras wavelets em consideração. Entretanto, a abundância

de wavelets (infinitas) [172] torna tal abordagem proibitiva. Como resultado, algumas restrições serão impostas à escolha da wavelet.

É um fato bem conhecido que wavelets podem ser geradas a partir de filtros discretos de resposta finita ao impulso (FIR) [100]. Propõe-se aqui, que o campo de busca da escolha da wavelet seja limitado para wavelets geradas por filtros FIR de comprimento não maior que seis coeficientes. Neste subconjunto de wavelets, pode-se encontrar as seguintes wavelets: Haar, Daubechies-2, Daubechies-3 e Coiflet-1, para citar as mais comuns [93].

Esta restrição é bastante conveniente, pois todos os filtros FIR de comprimento até seis que podem ser utilizados para gerar wavelets têm simples parametrizações de seus coeficientes [168, 169]. Algumas parametrizações mais usuais são as de Pollen [179], Tewfik [168] e Zhou [169]. Neste estudo, é adotada a parametrização de Pollen na forma encontrada em [168]. Esta parametrização para filtros de seis coeficientes geradores de wavelets possui duas variáveis independentes  $(a, b) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ; variando estes parâmetros, um novo filtro gerador de wavelet é determinado. Os coeficientes de um filtro  $h$  são dados pelas seguintes expressões, em termos dos parâmetros  $a$  e  $b$ :

$$h[0] = \frac{(1 + \cos a + \operatorname{sen} a)(1 - \cos b - \operatorname{sen} b) + 2 \operatorname{sen} b \cos a}{4}, \quad (9.8)$$

$$h[1] = \frac{(1 - \cos a + \operatorname{sen} a)(1 + \cos b - \operatorname{sen} b) - 2 \operatorname{sen} b \cos a}{4}, \quad (9.9)$$

$$h[2] = \frac{1 + \cos(a - b) + \operatorname{sen}(a - b)}{2}, \quad (9.10)$$

$$h[3] = \frac{1 + \cos(a - b) - \operatorname{sen}(a - b)}{2}, \quad (9.11)$$

$$h[4] = 1 - h[0] - h[2], \quad (9.12)$$

$$h[5] = 1 - h[1] - h[3]. \quad (9.13)$$

Conseqüentemente, a parametrização de Pollen define um plano em que cada ponto está conectado a uma wavelet [172]. Na Figura 9.6, o plano de parametrização de Pollen é parcialmente mostrado e as coordenadas de algumas wavelets são denotadas.

Usando o método de compressão discutido, pode-se calcular um valor de PRD para cada wavelet gerada de um ponto com coordenadas  $(a, b)$  situado no plano de parametrização. Procedendo assim, uma superfície pode ser definida com pontos  $(a, b, \text{PRD})$ . Assim, os mínimos desta superfície correspondem a pontos coordenados  $(a, b)$  que geram wavelets que se “casam” ao sinal-teste em questão. Por outro lado, os máximos desta superfície indicam altos valores de PRD, conseqüentemente sinais reconstruídos com wavelets geradas a partir destas coordenadas representam mais pobremente o sinal original [167].

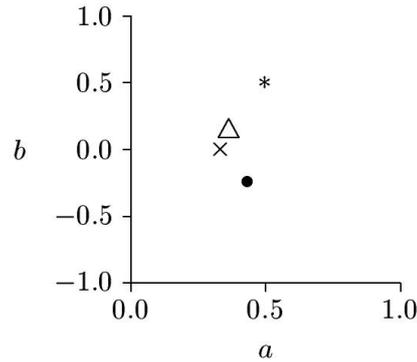


Figura 9.6: Plano de parametrização de Pollen (eixos normalizados por  $\pi$ ). Os pontos destacados correspondem às seguintes wavelets: Haar (\*), Daubechies-2 ( $\times$ ), Daubechies-3 ( $\bullet$ ) e Coiflet-1 ( $\triangle$ ).

### Teste da Metodologia

Para verificar a validade da metodologia proposta, foi analisado um sinal em onda quadrada mostrado na Figura 9.7. Foi mostrado previamente que a wavelet de Haar é a mais adequada para analisar sinais deste tipo (onda quadrada), oferecendo uma boa representação no domínio wavelet [94]. Ajustando a taxa de compressão para 3 e o número de escalas para 6, foi construída uma superfície de PRD sobre o plano de parametrização de Pollen, resultando na Figura 9.8. Trata-se de uma representação em curvas de nível da superfície tridimensional. Um mínimo desta superfície está situado sobre as coordenadas  $(\pi/2, \pi/2)$ , que corresponde exatamente à parametrização usual da wavelet de Haar. Outros mínimos também estão disponíveis sobre os pontos  $(\pi/2, -\pi/2)$ ,  $(\pi/2, 0)$ ,  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $(-\pi/2, 0)$  e sobre os pontos da diagonal. Todos estes pontos são parametrizações alternativas para a wavelet de Haar. Assim, o procedimento proposto de identificação de mínimos da superfície de PRD encontrou sucesso. Isto motiva/valida o uso desta metodologia nos sinais de EGG disponíveis em estado basal para determinar uma wavelet “casada” com eletrogastrogramas normais. Como resultado deste procedimento, obtém-se um conjunto de pontos coordenados  $(a_i, b_i)$  sobre o plano de parametrização. Cada um destes pontos representa a wavelet que minimiza o valor de PRD para cada eletrogastrograma canino normal  $i$ . A Figura 9.9 mostra superfícies típicas geradas a partir de sinais de EGG caninos em estado basal [167].

Como critério para determinação da parametrização ótima, será tomado o valor médio das coordenadas dos pontos de mínimos  $(a_i, b_i)$  para cada sinal  $i$ :

$$(a^*, b^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i, b_i), \quad (9.14)$$

em que  $N$  é o número total de sinais analisados. Admite-se que o ponto  $(a^*, b^*)$  gera uma wavelet que em média é melhor adaptada a eletrogastrogramas normais.

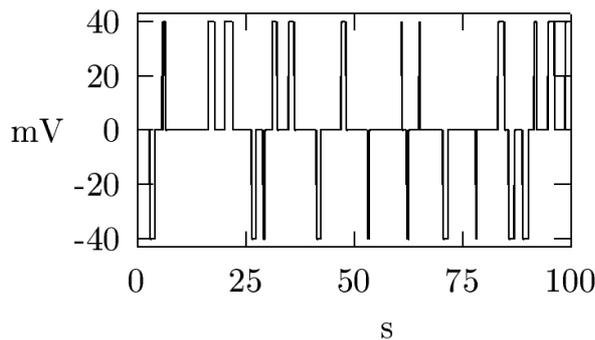


Figura 9.7: Sinal de teste em onda quadrada com polaridade aleatória.

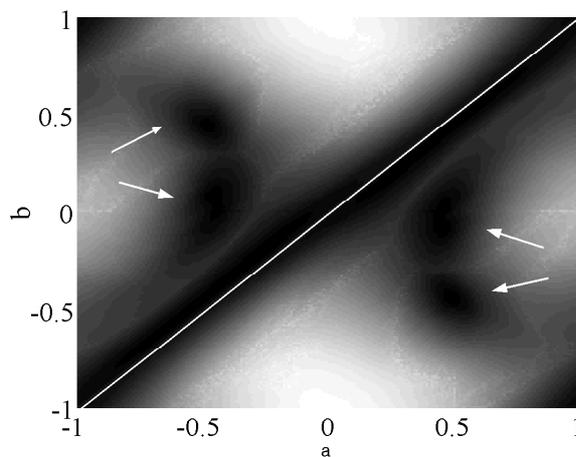


Figura 9.8: Superfície de PRD sobre o plano de parametrização de Pollen resultante do processamento do sinal de teste com taxa de compressão 3. Uma escala de tons de cinza é utilizada para representar os valores de PRD. As regiões mais escuras são os mínimos da superfície e coincidem com as regiões que geram as wavelets de Haar: a diagonal marcada e os pares coordenados  $(0.5, -0.5)$ ,  $(0.5, 0)$ ,  $(-0.5, 0.5)$ ,  $(-0.5, 0)$  (indicados por setas). Os eixos estão normalizados por  $\pi$ .

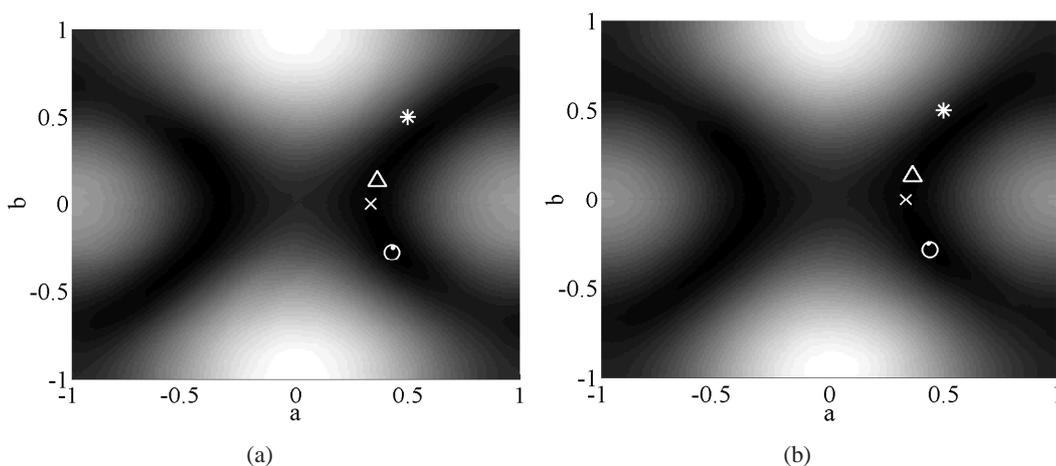


Figura 9.9: Curva de nível gerada após o cálculo da superfície de PRD para todas as possíveis wavelets do plano de parametrização de Pollen para dois sinais de EGG canino em estado basal. O valor mínimo é denotado por um círculo (o). Os pontos coordenados que correspondem às wavelets de Haar (\*), Daubechies-2 (x), Daubechies-3 (•) e Coiflet-1 ( $\Delta$ ) são também denotados para fins de comparação. Os eixos estão normalizados por  $\pi$ .

CR	Cães <sup>a</sup>		Humanos <sup>b</sup>	
	$a^*$	$b^*$	$a^*$	$b^*$
3	0.4329	-0.2608	0.3976	-0.2335
5	0.4323	-0.2638	0.4293	-0.2550
7	0.4323	-0.2700	0.4276	-0.2551
10	0.4293	-0.2736	0.4279	-0.2600

<sup>a</sup>Baseado em 16 cães.

<sup>b</sup>Baseado em 6 voluntários.

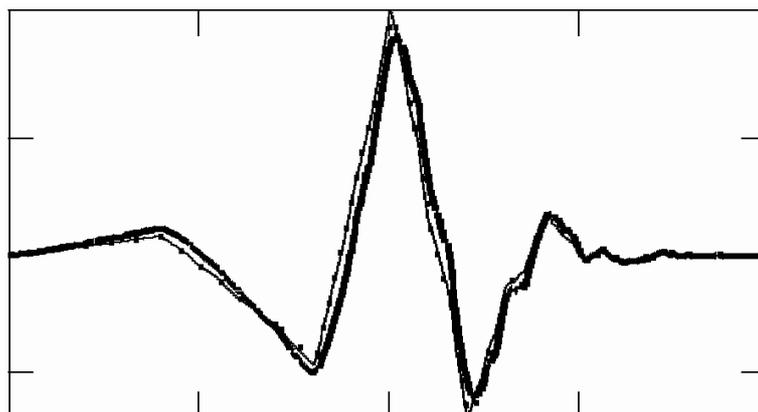


Figura 9.10: Wavelets ótimas obtidas para sinais de EGG caninos (curva pontilhada) e humanos (curva cheia) para uma taxa de compressão igual a 3. A wavelet de Daubechies-3 (curva fina) é exibida para comparação. A semelhança entre Daubechies-3 e as wavelets ótimas para EGG é nítida.

## 9.3 Resultados

### 9.3.1 Determinação dos Parâmetros

#### Wavelet

Os valores ótimos para a parametrização da wavelet foram calculados para cada uma das taxas de compressão selecionada. Os resultados de tal procedimento estão relatados na Tabela 9.2. Para a taxa de compressão igual a 3, têm-se as wavelet mostradas na Figura 9.10. Vale a pena observar que as wavelets propostas são muito similares com a wavelet de Daubechies-3. Os coeficientes de correlação entre a wavelet de Daubechies-3 e a wavelets ótimas para EGG são iguais a 0,996 e 0,965, para cães e humanos, respectivamente.

Como a wavelet Daubechies-3 é (i) muito similar a wavelet proposta; e (ii) facilmente disponível em muitos pacotes computacionais (por exemplo, MATLAB<sup>TM</sup> (The Mathworks, Inc., Natick, MA, E.U.A.)), tal wavelet foi, por fim, selecionada em vez da wavelet proposta. Um trabalho anterior, baseado em observações empíricas, confirma inteiramente esta escolha [161].

## 9.4 Conclusão

Neste trabalho o problema da determinação de wavelets ótimas “casadas” com sinais de EGG foi quantitativamente abordado. As wavelets propostas podem ser consideradas como o passo inicial para o aprofundamento da análise de sinais de EGG. Um ponto importante é que esta metodologia abre espaço para técnicas de classificação de eletrogastrogramas utilizando parâmetros de análise de wavelet — com as wavelets propostas — como elementos de decisão.

## Capítulo 10

# Análise de Eletrogastrogramas via Wavelets<sup>1</sup>

*If there's anything unsettling to the stomach, it's watching actors on television talking about their personal lives.*

ATRIBUÍDA A MARLON BRANDO (1924–2004)

### 10.1 Introdução e Motivação

A atividade elétrica gástrica (GEA) controla os aspectos relativos à motilidade do estômago [181, 182]. É um fato bem estabelecido que desordens na motilidade gástrica, incluindo gastroparese funcional e dispepsia, estão relacionadas com alterações na dinâmica da atividade elétrica gástrica [183]. De modo abrangente, quadros de anormalidade da atividade elétrica gástrica são considerados como resultado de dois fenômenos distintos [149, 158, 182, 184–188]:

- Disritmia global da atividade elétrica gástrica, atingindo simultaneamente todo o órgão;
- Disritmias locais da atividade elétrica gástrica, freqüentemente se manifestando na forma de desacoplamentos elétricos da atividade elétrica gástrica.

Vários estudos enfatizam o impacto da alteração do ritmo da atividade elétrica gástrica como a razão principal para as anormalidades da motilidade gástrica [149, 184, 185]. Entretanto, disritmias gástricas globais são incomuns e foram objetivamente registradas apenas de modo incidental [186, 187].

---

<sup>1</sup>Este capítulo representa uma compilação do artigo: de Sobral Cintra, R. J., Tchervensky, I. V., Dimitrov, V. S., Mintchev, M. P., “Wavelet Analysis in a Canine Model of Gastric Electrical Uncoupling” *Physiological Measurement*, Institute of Physics, Reino Unido, v. 25, dez. 2004 [180].

Freqüentemente, disritmias locais e desacoplamentos elétricos no estômago estão simultaneamente presentes e podem ser considerados bastante similares, se não o mesmo fenômeno.

O desacoplamento elétrico gástrico ocorre quando partes distintas do estômago perdem sincronismo elétrico, levando ao surgimento de regiões de oscilação independente que são disrítmicas em relação a frequência global da atividade elétrica gástrica. [158]. Durante um evento puramente desacoplado, as regiões independentes são caracterizadas por uma oscilação estável, porém diferente da frequência global da atividade elétrica gástrica. Entretanto, é mais comum a presença do desacoplamento associado a alguma disritmia. Independentemente do estômago estar (i) puramente desacoplado ou (ii) desacoplado e localmente disrítmico, a falta de sincronismo oscilatório induz alterações nos padrões elétricos, que levam a funções motoras gástricas anormais [188]. Assim, a identificação de desacoplamento elétrico gástrico recebe especial atenção, pois pode ser crucial para o diagnóstico de anormalidades da motilidade gástrica [182].

No estudo desenvolvido neste capítulo, é proposta uma nova aplicação de wavelets para a análise de sinais EGG, em particular, na detecção de desacoplamento elétrico gástrico e disritmias locais. A hipótese fundamental sugerida neste trabalho admite que eletrogastrogramas oriundos de atividade elétrica gástrica normal e de desacoplamento elétrico gástrico possuem distribuições típicas de energia diferentes ao longo dos seus coeficientes da transformada wavelet. Supondo que a energia do sinal esteja distribuída de maneira relativamente uniforme entre os coeficientes de wavelet, ao se fixar o número de coeficientes descartados (esquema de compressão) resultar-se-ia em uma distorção maior. Em contraste, se a energia estiver concentrada em poucos coeficientes, as chances são de que tais coeficientes mais significativos sobreviveriam ao processo de compressão. E, conseqüentemente, o sinal reconstruído a partir deles será mais próximo do sinal original. Assim, realizando uma compressão de sinais de EGG normais e patológicos, é esperado que parâmetros de avaliação da qualidade destes sinais antes e após a compressão se mostrem estatisticamente diferentes, uma vez que quantidades distintas de energia dos sinais estão sendo utilizadas na sua reconstrução. Para uma taxa de compressão fixa, sinais reconstruídos apresentam diferentes distorções, a depender de suas distribuições de energia no domínio wavelet.

O objetivo deste estudo é apresentar um método para, quantitativamente, detectar estados moderados e severos de desacoplamento elétrico gástrico por meios de compressão via wavelet em um modelo canino.

## 10.2 Métodos

### 10.2.1 Preparação Experimental

Neste estudo, foi realizado um experimento bastante similar ao descrito no Capítulo 9. Fundamentalmente, a mudança neste procedimento reside no fato de serem gravados sinais não apenas em estado basal. Foram obtidos sinais em desacoplamento elétrico gástrico induzidos cirurgicamente, como descritos a seguir.

Dezesseis cães da raça Beagle (sete fêmeas e nove machos) foram anestesiados com a aplicação de tiopental sódico (pentotal) (Abbot, Montreal, Quebec, Canadá) a uma dosagem de 30 mg/kg. Baseado na monitoração da recuperação do reflexo palpebral, doses suplementares a 3 mg/kg foram administradas. Após um procedimento de laparotomia e a fixação interna e subserosa de seis pares de eletrodos de aço inoxidável na parede gástrica antral, em cada cão, dois cortes circunferenciais transversais foram realizados dividindo completamente o estômago em seções separadas. Durante este procedimento, o suprimento de sangue foi preservado, não se permitindo o seccionamento de vasos sangüíneos maiores localizados sobre a grande ou a pequena curvatura. Após cada corte, não foi realizada qualquer tipo de anastomose ao estômago. Os sítios cirúrgicos dos cortes circulares foram escolhidos para ser distal à junção gastro-esofágica (primeiro corte) e proximal a junção gastro-esofágica (segundo corte). Conseqüentemente, ao fim do experimento, estas miotomias circulares dividem o estômago em três partes de dimensões aproximadamente iguais. Durante todo o experimento, os cães foram mantidos em posição supina. Trabalhos experimentais similares foram descritos anteriormente em [154–156].

Após cada incisão, a parede abdominal foi fechada e cinco eletrodos eletrocardiográficos neonatais descartáveis padronizados de Ag-AgCl (Conmed, Andover Medical, Haverhill, MA, E.U.A.) foram afixados colinearmente sobre a parede abdominal ao longo da projeção do eixo gástrico. Além destes, um eletrodo de referência foi posicionado na área da bacia. Estudos prévios demonstram que esta configuração de eletrodos pode ser tomada como ótima [147]. Os cinco eletrodos ativos foram agrupados de modo a prover oito canais bipolares de eletrogastrografia. Adicionalmente, seis eletrodos de aço inoxidável implantados subserosalmente fornecem seis canais bipolares com a atividade elétrica gástrica interna. Entretanto, neste trabalho apenas os oito canais eletrogastrográficos foram processados, utilizando-se os canais com a GEA interna para fins de referência visual, apenas para verificar que a atividade elétrica gástrica estava presente. A combinação do conjunto de eletrodos a sua localização física são idênticas àquelas tratadas descritas no Capítulo 9 e exibidos na Figura 9.1.

Foram realizadas gravações da atividade eletrogastrográfica durante trinta minutos em três estados diferentes:

- Estado basal;
- Desacoplamento elétrico gástrico moderado (após o primeiro corte);
- Desacoplamento elétrico gástrico severo (após o segundo corte).

Seguiu-se então etapas condicionamento dos sinais, amplificação, conversão analógica-digital similares às descritas anteriormente (Capítulo 9, p. 130). De modo similar, os sinais registrados são sujeitos a artefatos de diversas naturezas. Foi realizado então um procedimento de seleção e eliminação de trechos dos sinais, similar ao descrito no Capítulo 9 (p. 130).

Assim, cada aquisição de meia-hora de duração gerou 18.000 amostras por canal por estado (basal, desacoplamento moderado após a primeira incisão e desacoplamento severo após a segunda incisão) por cão. Ao final do experimento, para cada cão, intervalos contínuos de 10 minutos de duração de sinais de EGG sincronizados foram manualmente selecionados. Estes dados foram considerados livres de padrões de ruídos visualmente identificáveis.

Todos os experimentos foram aprovados pelo *Animal Welfare Committee* e pelo *Ethics Committee* da Faculdade de Medicina, Universidade de Alberta (Edmonton, Alberta, Canadá).

## 10.2.2 Análise de Sinais<sup>2</sup>

### Compressão por Wavelets

É adotado neste estudo o mesmo método de compressão descrito no Capítulo 9.

### Medida de Distorção

Para quantificar o erro oriundo da compressão do sinal de EGG, será utilizado a Diferença Percentual em Média Quadrática (*Percent Root-mean-square Difference*, PRD), conforme discutido no Capítulo 9.

## 10.2.3 Análise Estatística

Após o cálculo do parâmetro de avaliação de qualidade (PRD) para cada sinal de EGG canino, os sinais foram agrupados de acordo com (i) o estado do cão (basal, desacoplamento moderado e desacoplamento severo) e com (ii) o canal de aquisição de dados. Objetiva-se então obter diferença estatisticamente significativa ( $p < 0.05$ ) entre os valores de PRD dos sinais de EGG compactados, oriundos de sinais em estado basal e os obtidos de sinais em estados desacoplados (moderado ou severo) para cada canal de aquisição de dados.

---

<sup>2</sup>Alguns tópicos desta seção já foram discutidos no Capítulo 9 desta tese. Serão assim meramente indicados.

Como os sinais de EGG dos três grupos (basal e desacoplados) foram obtidos a partir de uma mesma amostra de dezesseis cães, admitir independência entre os dados pode ser questionável. Conseqüentemente, utilizar inferência estatística baseada no teste  $t$  de Student pode não ser apropriado [189].

Testes estatísticos pareados, tais como o teste  $t$  de Student para diferenças pareadas [189], foram considerados para realizar comparações entre valores de PRD de dois grupos de sinais. Assim, as diferenças pareadas de valores de PRD ( $\Delta$ PRD) foram calculadas. Entretanto, o teste  $t$  de Student para diferenças pareadas pode apenas ser utilizado em amostras com distribuição de frequência relativa das diferenças normalmente distribuídas, testes não-paramétricos, como o teste de Wilcoxon para dados pareados, também foram tomados em consideração [189].

Para verificar a condição de distribuição normal dos dados  $\Delta$ PRD, foi utilizado o teste de normalidade de Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) [190]. Sempre que o teste de Lilliefors indicava que as amostras de diferença estavam normalmente distribuídas, o teste de diferenças pareadas seria utilizado para comparar estatisticamente dois grupos. Caso contrário, o teste de Wilcoxon para dados pareados, menos restritivo, seria empregado.

#### **10.2.4 Escolha dos Parâmetros**

##### **Número de Escalas**

Será utilizada a mesma metodologia descrita no Capítulo 9.

##### **Taxa de Compressão**

A escolha da taxa de compressão para o esquema de compressão wavelet foi realizada de modo a tomar uma taxa que maximize o número de canais que exibem diferença estatisticamente significativa, quando se realiza a comparação entre grupos de sinais em estado basal e grupos em estado de desacoplamento. Para tal, foi elaborada uma curva relacionando a taxa de compressão com o percentual de canais em que diferença estatisticamente significativa foi observada.

Este cálculo foi realizado em dois cenários:

- Comparando-se sinais em estado basal e sinais em desacoplamento elétrico gástrico moderado;
- Comparando-se sinais em estado basal e sinais em desacoplamento elétrico gástrico severo.

Assim, foram tomados valores de taxa de compressão que forneceram a melhor percentagem de canais de detecção em ambos os casos.

Para realizar esta investigação inicial, foram utilizadas as seguintes wavelets: Daubechies-2, Daubechies-3, and Coiflet-1. O número de escalas foi ajustado de acordo com a Tabela 9.1.

### **Escolha da Wavelet**

Com o estudo anterior (Capítulo 9), foi determinado que a wavelet Daubechies-3 pode ser considerada ótima para eletrogastrografia. Deste modo, esta wavelet será prontamente utilizada neste novo estudo. Eventualmente, outras wavelets também serão levadas em consideração para fins de comparação.

## **10.3 Resultados**

### **10.3.1 Determinação da Taxa de Compressão**

Os valores de PRD para todos os eletrogastrogramas disponíveis foram computados utilizando a wavelet Daubechies-3 que é próxima da wavelet ótima, conforme obtido em estudo anterior (Capítulo 9), para diversas taxas de compressão. Adicionalmente, foram consideradas outras wavelets para fins de comparação: Daubechies-2 e Coiflet-1. A wavelet de Haar não foi considerada, pois é descontínua, e sabe-se *a priori* que ela oferece aproximações pobres para funções contínuas e suaves, tal como é o sinal de EGG [93]. A Figura 10.1 mostra os resultados deste procedimento.

Quando se compara os grupos de estado basal e estado de desacoplamento elétrico gástrico moderado, é interessante observar que a percentagem de canais nos quais diferenças estatisticamente significativas foram observadas é fortemente dependente da escolha da taxa de compressão. Com o aumento da taxa de compressão, os valores de PRD resultantes dos dois grupos tornam-se estatisticamente menos distintos, deteriorando-se a capacidade de discriminá-los. A Figura 10.1(a) ilustra este comportamento.

Por outro lado, a metodologia proposta é mais apta a detectar desacoplamentos elétricos gástricos severos. Diferenças estatisticamente significativas ( $p < 0.044$ ) entre o estado basal e o estado de desacoplamento severo foram observadas em até seis dos oito canais de aquisição. Além disto, a percentagem de canais, em que diferenças significativas entre os dois grupos é consistentemente observada, é relativamente constante com respeito à taxa de compressão (Figura 10.1(b)).

As taxas de compressão variando entre três e cinco ofereceram os melhores resultados em ambos os casos. Assim, foi adotada taxa de compressão igual a três, que é a menor taxa de compressão em que ambas as curvas (Figura 10.1) atingem valores máximos.

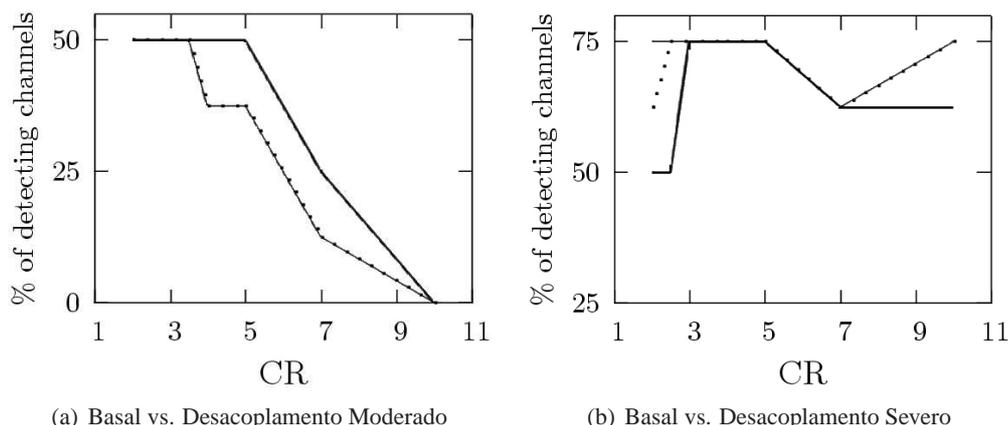


Figura 10.1: Taxa de compressão *versus* percentagem de canais em que houve sucesso na detecção de desacoplamento elétrico gástrico ( $p < 0.05$ ). Cada curva traz a análise para uma wavelet específica: Daubechies-2 (linha fina), Daubechies-3 (linha cheia) e Coiflet-1 (linha pontilhada).

Tabela 10.1: Comparação estatística entre os valores de PRD do grupo em estado basal e do grupo em desacoplamento elétrico gástrico moderado, para  $CR = 3$ .

Canal	Teste	$\Delta PRD$ Médio	Desvio Padrão de $\Delta PRD$	Significativo?	$p$
7	Student	0,982161	1,844312	Não	0,058226
8	Student	0,566675	0,679417	Sim	0,010919
9	Student	0,728762	1,137274	Sim	0,026378
10	Student	0,192864	1,314660	Não	0,592370
11	Wilcoxon	1,347208	1,741442	Sim	0,000854
12	Student	1,186993	1,948825	Sim	0,033388
13	Wilcoxon	0,648649	1,532822	Não	0,187622
14	Student	0,424109	1,643240	Não	0,334474

### 10.3.2 Análise Estatística

As Tabelas 10.1, 10.2 e 10.3 condensam os resultados obtidos, utilizando-se a wavelet de Daubechies-3 e taxa de compressão igual a três.

## 10.4 Discussão

No modelo de desacoplamento elétrico gástrico empregado neste trabalho, à medida que as miotomias foram executadas a potência elétrica produzida pelos geradores gástricos intrínsecos foi dividida entre dois ou três geradores de menor potência elétrica, de acordo com o número de cortes circulares. Conseqüentemente, a relação sinal-ruído do sinal registrado na eletrogastrografia foi diminuída e a influência de várias fontes externas de perturbação tornou-se mais expressiva. Assim, a energia do sinal de EGG tornou-se mais distribuída ao longo dos coeficientes da transformada de wavelet do sinal, quando comparado com um sinal em estado basal (gerador elétrico gástrico único). Assim, após o procedimento de compressão não-linear utilizado, os sinais reconstruídos a partir do conjunto

Tabela 10.2: Comparação estatística entre os valores de PRD do grupo em estado basal e do grupo em desacoplamento elétrico gástrico severo, para CR = 3.

Canal	Teste	$\Delta$ PRD Médio	Desvio Padrão de $\Delta$ PRD	Significativo?	$p$
7	Student	0,924724	1,416927	Sim	0,029661
8	Student	0,755751	0,763789	Sim	0,005647
9	Student	0,596236	1,029897	Sim	0,049474
10	Student	0,306322	1,505244	Não	0,428371
11	Student	0,813283	1,044165	Sim	0,015799
12	Student	0,972415	0,899240	Sim	0,001386
13	Student	0,634854	1,066521	Sim	0,044225
14	Student	0,467240	0,983946	Não	0,112567

Tabela 10.3: Comparação estatística entre os valores de PRD do grupo em desacoplamento elétrico gástrico moderado e do grupo em desacoplamento elétrico gástrico severo, para CR = 3.

Canal	Teste	$\Delta$ PRD Médio	Desvio Padrão de $\Delta$ PRD	Significativo?	$p$
7	Student	0,011820	1,365449	Não	0,973727
8	Student	0,074321	0,803788	Não	0,744598
9	Student	-0,191332	1,317089	Não	0,582588
10	Student	-0,169222	1,481669	Não	0,676127
11	Student	-0,441275	1,605023	Não	0,322378
12	Student	-0,304088	1,756426	Não	0,513433
13	Student	0,044421	1,093672	Não	0,877249
14	Student	-0,208983	1,242392	Não	0,540001

reduzido de coeficientes de wavelet apresentaram maiores erros de reconstrução nos estados desacoplados.

A avaliação do erro de reconstrução de sinais de EGG caninos após compressão por meio da técnica proposta foi capaz de discriminar grupos em estado de desacoplamento elétrico gástrico severo e grupos em estado basal em 75% dos canais de EGG. A capacidade de detecção deste procedimento foi reduzida quando se compara o grupo de controle com o grupo em desacoplamento elétrico gástrico moderado. Entretanto, mesmo assim, diferenças significativas foram observadas em 4 dos 8 canais de EGG (vide Tabelas 10.1 e 10.2). O aumento da sensibilidade do teste em se detectar desacoplamento severo era esperado e reforça observações anteriores [154, 156, 191]. Os canais 8, 11 e 12 foram identificados como os que apresentaram o melhor desempenho geral em detectar sinais desacoplados (valores  $p$  variando de 0.0009 a 0.01). Os sítios destes canais se sobrepõem à região que engloba as porções central e distal do corpo gástrico da região epigástrica. Estas localizações de eletrodos são mais propícias a englobar completamente a atividade elétrica de todas as regiões em desacoplamento. Esta observação enfatiza a importância da utilização de um sistema multicanal para a aquisição de sinais de EGG.

Uma observação na Tabela 10.2 revela que os canais 9 e 13 são apenas marginalmente significativos. Uma interpretação mais conservadora dos dados (por exemplo,  $p < 0.01$ ) reduziria a capacidade

do método para detectar desacoplamento moderado para um único canal (#11). Apesar disto, entretanto, esta detecção representa um avanço nas técnicas de detecção de desacoplamento elétrico gástrico moderado, comparado aos procedimentos existentes [191].

Grupos em desacoplamentos gástricos elétricos moderado e severo foram estatisticamente indistinguíveis ( $p > 0.05$ ). Isto indica que, de acordo com a técnica proposta, os sinais de EGG contém informações insuficientes para avaliar o nível de desacoplamento elétrico. Além disto, quando se compara grupos em estado de desacoplamento moderado e severo, nota-se uma inconsistência na variação do erro de reconstrução. Isto pode ser observado pela flutuação do sinal da média do erro de reconstrução na Tabela 10.3.

Trabalhos anteriores [154–156, 191] sugerem que as naturezas determinística, estocástica e caótica estão dinamicamente presentes no sinal de EGG. A investigação conduzida neste trabalho indica que uma única abordagem de processamento de sinais pode ser insuficiente para fornecer elementos que possibilitem uma avaliação acurada de sinais de EGG. Levando-se em conta a natureza dinâmica e complexa do sinal de EGG, vários métodos, tais como análise tempo-frequencial clássica, wavelets, técnicas de análise não-linear e reconhecimento de padrões de campos biomagnéticos, devem ser combinados para oferecer dados a um decisor (diagnóstico). Em verdade, tal abordagem combinada pode ser o ponto chave para elevar a eletrogastrografia ao *status* de ferramenta clínica.

## 10.5 Conclusão

Uma nova abordagem de análise por wavelets baseada em compressão de sinais foi proposta para a detecção de desacoplamento elétrico gástrico moderado e severo em um modelo canino. Combinando os resultados do método sugerido com um sistema multicanal de aquisição de dados, bem como, com um mapeamento abrangente da localização dos eletrodos ao longo da projeção do eixo gástrico, foi demonstrado que diferenças estatisticamente significativas foram registradas entre sinais em estado basal e sinais em desacoplamento elétrico gástrico. Os canais em que a detecção foi bem sucedida situam-se ao longo da projeção abdominal das regiões central e distal do eixo do corpo gástrico.

# Capítulo 11

## Conclusões Gerais

O modo pelo qual esta tese foi organizada fez com que, naturalmente, cada capítulo com contribuição original trouxesse uma seção conclusiva. Dessa maneira, a função deste capítulo final ficou pulverizada pela tese. Por outro lado, cabe a oportunidade para ressaltar claramente as contribuições contidas neste trabalho. Evidenciando, também, caminhos para futuros desenvolvimentos.

Como trabalhos originais desta tese, pode-se elencar:

1. A proposição da transformada de Hartley arredondada em uma e duas dimensões;
2. A introdução do conceito de inversão aproximada;
3. A proposição da transformada aritmética de Hartley;
4. Uma nova interpretação das transformadas aritméticas, ressaltando a importância do processo de interpolação;
5. A proposição de vários métodos para a geração de autofunções para a transformada de Fourier, Hartley e Hankel;
6. A introdução de um procedimento sistemático de associação de funções conhecidas à construção de wavelets;
7. A introdução da Wavelet de Mathieu;
8. A introdução da Wavelet de Chebyshev;
9. A determinação de wavelets ótimas para sinais de eletrogastrografia, através de um procedimento original;
10. A proposição de um novo método para a análise de sinais eletrogastrográficos.

**Transformada de Hartley Arredondada.** A transformada de Hartley arredondada é um tópico que merece atenção especial. Por ser um estimador espectral de baixíssima complexidade computacional, sua aplicação em problemas que envolvam grande número de operações, como uma busca em um banco de dados, parece ser a mais indicada. A função de arredondamento utilizada poderia ser facilmente trocada por outra função que mapeasse o intervalo  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  em  $\{-1, 0, 1\}$ . Um estudo para determinar qual o mapeamento ótimo, que minimiza o erro da estimativa fornecida ainda é uma questão em aberto.

Uma outra questão em aberto e de grande interesse seria um procedimento sistemático para a geração de matrizes inversas aproximadas. Em relação a RHT, há ainda um terceiro ponto interessante. A inversa exata da matriz de Hartley arredondada, apesar de não ser tão interessante quanto a matriz de Hartley arredondada, ainda assim é uma matriz de baixa complexidade. Explorar suas propriedades e obter um algoritmo rápido é tema de investigação.

**Transformada Aritmética.** Como uma proposição isolada, a transformada aritmética de Hartley é, sem dúvida, a maior contribuição daquele capítulo. Em verdade, do ponto de vista conceitual, talvez o melhor desdobramento que este estudo gerou foi um melhor entendimento sobre os processos de interpolação. Em particular, o fato de que — sob a ótica da teoria aritmética — a interpolação é a própria transformação.

**Autofunções.** O uso de uma base de autofunções de uma transformada específica para decompor uma função e em seguida calcular a transformada não é algo novo na literatura [89]. Porém, há apenas um único exemplo deste fato: funções de Hermite para a transformada de Fourier. Com a motivação de encontrar outras bases para outras funções, foi, inicialmente, tratado o problema de se obter autofunções. Interessantemente, a literatura não cobre este tópico em maiores detalhes. Com a proposição de vários métodos de se obter autofunções, fica em aberto o próximo passo: encontrar uma base de autofunções. Este tópico é particularmente intrigante, pois pode ser pivotal na criação de novos algoritmos rápidos para transformadas, diferentes em conceito dos métodos geralmente utilizados.

**Construção de Novas Wavelets.** Com a aplicação cada vez mais frequente de wavelets, a construção de wavelets casadas com a aplicação se apresenta como um problema natural.

Há vários métodos existentes para se criar wavelets novas, entretanto, nesse trabalho, foi explorado um procedimento inteiramente novo. Associando soluções de equações diferenciais a filtros geradores de wavelets. Este tema abre por si só caminho para a definição de várias outras wave-

lets com aplicação potencial em problemas que estejam de algum modo associado às soluções das equações diferenciais em questão.

O método de construção de wavelets casadas proposto no Capítulo 9 se apresenta como uma outra contribuição original. Há, entretanto, espaço para ampliar o resultado. Os resultados obtidos por Sherlock e Monro [192], podem ser um caminho para estender o espaço de busca da wavelet ótima para wavelets com filtros de comprimento maior que seis. Tal consideração é um tópico bastante atrativo.

**Eletrogastrografia.** A eletrogastrografia é um tema que atrai muitos pesquisadores e que oferece até então escassos resultados. A natureza dos sinais eletrogastrográficos vem por mais de 80 anos sendo alvo de estudo, sem um resultado definitivo.

O método proposto nessa tese assume uma postura conservadora, visando determinar diferenças estatisticamente significativas em grupos de sinais de EGG em estado basal e em estado de desacoplamento elétrico. Os resultados obtidos revelam que é possível se distinguir grupos em estado de desacoplamento elétrico gástrico de um grupo controle. Este resultado contribui para solidificar um pouco mais a técnica de eletrogastrografia. Há ainda muito a ser feito até que sinais de EGG sejam corriqueiros na atividade clínica.

Os métodos de análise utilizados nesta tese podem eventualmente serem considerados para uso em outras classes de sinais eletrofisiológicos, por exemplo, (i) sinais do cólon, (ii) sinais de depressão alastrante da atividade elétrica cerebral [193] ou (iii) registros da atividade contrátil uterina.

**Publicações.** O Apêndice A lista as publicações oriundas das pesquisas realizadas no período de realização desta tese.

# Apêndice A

## Lista de Publicações

### Publicações em Periódicos

1. de Sobral Cintra, R. J.; Tchervensky, I. V., Dimitrov, V. S., Mintchev, M. P. “Wavelet Analysis in a Canine Model of Gastric Electrical Uncoupling”. *Physiological Measurement*, vol. 25, no. 6, pp. 1355–1369, Institute of Physics, Reino Unido, 2004.
2. de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M. “A Short Survey on Arithmetic Transforms and the Arithmetic Hartley Transform”. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, 2005. Aceita para publicação.
3. Lira, M. M. S., Oliveira, H. M., de Sobral Cintra, R. J. “Elliptic-Cylindrical Wavelets: The Mathieu Wavelets”. *IEEE Signal Processing Letters*. E.U.A., vol. 11, no. 1, pp. 52–55, 2004.

### Publicações em Conferências

1. de Sobral Cintra, R. J.; Tchervensky, I. V.; Dimitrov, V. S.; Mintchev, M. P. “Optimal Wavelets for Electrogastrography” In: *The 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, 2004, São Francisco, Califórnia, E.U.A., IEEE Press, 2004.
2. Soares, L. R.; Oliveira, H. M.; de Sobral Cintra, R. J. “New Compactly Supported Scaling And Wavelet Functions Derived From Gegenbauer Polynomials” In: *IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2004, Cataratas do Niágara. IEEE Press, 2004. pp. 2347–2350
3. de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M.; Soares, L. R. “Chebyshev Wavelets” In: *XX Simpósio*

*Brasileiro de Telecomunicações*, 2003, Rio de Janeiro. Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações. Rio de Janeiro, 2003. pp. 89–92

4. Soares, L. R.; de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M.; Campello De Souza, R. M. “Fourier Eigenfunctions, Gabor Uncertainty Principle and Isoresolution Wavelets” In: *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, 2003, Rio de Janeiro. Anais do XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 2003. pp. 61–64
5. de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M.; Soares, L. R. “On Filter Banks And Wavelets Based On Chebyshev Polynomials” In: *7th Wseas International Conference On Circuits*, 2003, Ilha Corfu, Grécia. *Proceedings of 7th WSEAS International Multiconference in Corfu (CSCC 2003)*. World Scientific and Engineering Academy and Society, 2003. pp. 195–200
6. de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M. “How to Interpolate in Arithmetic Transform Algorithms” In: *IEEE 27th International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2002, Orlando, Flórida, E.U.A. IEEE Press, 2002. pp. 13–17
7. de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M. “Interpolating in Arithmetic Transforms” In: *2nd WSEAS International Conference on Signal Processing and Computational Vision*, 2002, Rethymon, Creta. *Proceedings of the 6th International Multiconference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC 2002)*. Eds. N. Mastorakis, G. Antoniou, WSEAS Press, 2002. pp. 349–354
8. de Sobral Cintra, R. J.; Oliveira, H. M.; Cintra, C. O. “The Rounded Hartley Transform” In: *IEEE International Telecommunications Symposium – ITS’2002*, 2002, Natal. CD-ROM

### **Publicação Aceita em Conferência**

1. Lira, M. M. S.; Oliveira, H. M.; de Sobral Cintra, R. J.; SOUZA, R. M. C. “Wavelets for Elliptical Waveguide Problems” In: *2002 WSEAS International Conference On Wavelet Analysis And Multirate Systems*, 2002, Atenas, Grécia: WSEAS Press, 2002.

### **Publicação Submetida a Periódico**

1. Newton-Price, C.; de Sobral Cintra, R. J.; Westwick, D. T., Mintchev, M. P. “Classification of Biomedical Signals Using the Dynamics of the False Nearest Neighbours (DFNN) Algorithm”, submetido para publicação em *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*.

## **Publicação Submetida a Conferência**

1. Tchervensky, I. V.; de Sobral Cintra, R. J.; Neshev, E.; Dimitrov, V. S.; Mintchev, M. P., “Center-Specific Multichannel EGG Testing Utilizing Wavelet-Based Decomposition”, submetido para publicação em *Thirteenth International Workshop on Electrogastrography – International Electrogastrography Society (IEGGS)*, Chicago, Illinois, E.U.A., 2005.

# Apêndice B

## Notação

□	Q.E.D. ( <i>Quod Erat Demonstrandum</i> ), Fim de demonstração, Halmos.
■	Fim de definição, fim de enunciado matemático com demonstração omitida ou inexistente.
(↓2)	Dizimador por dois.
≈	Aproximadamente igual a.
≜	Igual por definição.
δ(·)	Delta de Dirac.
Δ <sub>t</sub>	Incerteza temporal.
Δ <sub>f</sub>	Incerteza freqüencial.
Π(·)	Função porta (pulso retangular), $\Pi(x) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se }  x  < 1/2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
φ(·)	Função de escala, Função φ de Euler.
φ <sub>n</sub> (·)	Função de Hermite de ordem <i>n</i> .
Φ(·)	Transformada de Fourier da função de escala.
ψ(·)	Função de wavelet.
Ψ(·)	Transformada de Fourier da função de wavelet.

$\text{cas}(\cdot)$	Função “cosseno e seno”, função de Hartley, $\text{cas } x \triangleq \cos x + \text{sen } x$ .
$\text{ce}(\cdot)$	Cosseno elíptico.
$\mathcal{E}\{\cdot\}$	Parte par.
$\mathcal{F}_{\text{cos}}$	Operador transformada integral de Fourier cosseno.
$\mathcal{F}_{\text{sen}}$	Operador transformada integral de Fourier seno.
$\mathcal{F}$	Operador transformada integral de Fourier.
<b>g</b>	Vetor de coeficientes de filtro passa-altas.
<b>h</b>	Vetor de coeficientes de filtro passa-baixas.
$\mathcal{H}$	Operador transformada integral de Hartley.
<b>H<sub>n</sub></b>	Matriz de Hartley de ordem $n$ .
$\mathbb{H}_n$	Matriz de Hartley arredondada de ordem $n$ .
<b>Had<sub>n</sub></b>	Matriz de Hadamard de ordem $n$ .
$\mathfrak{H}\text{an}$	Operador transformada integral de Hankel.
$\Im\{\cdot\}$	Parte imaginária.
$J_n(\cdot)$	Função de Bessel de $n$ -ésima espécie.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\text{Sa}(\cdot)$	Função amostral $\text{Sa}(x) = \text{sen}(x)/x$ , se $x \neq 0$ . $\text{Sa}(0) = 1$ .
mmc	Mínimo múltiplo comum.
mdc	Máximo divisor comum.
$\mathcal{O}\{\cdot\}$	Parte ímpar.
$\Re\{\cdot\}$	Parte real.
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais estritamente positivos.
$\text{se}(\cdot)$	Seno elíptico.

## Apêndice C

# Bibliografia Anotada sobre a Transformada Aritmética

Neste apêndice, é apresentada uma bibliografia comentada em ordem cronológica ascendente de várias referências sobre a Transformada Aritmética. Os breves comentários tecidos são sobre a natureza teórica, prática e histórica da área em questão. Apesar de bastante representativa, esta bibliografia não representa de modo algum uma listagem completa ou atualizada. Essencialmente, são listados os trabalhos mais disseminados em fontes indexadas.

Entretanto, antes de apresentar a listagem bibliográfica, serão feitas algumas observações estatísticas realizadas com base nos dados desta referência. A Tabela C.1 apresenta a distribuição dos trabalhos com relação ao enfoque abordado. As contribuições foram divididas em três grupos: avanços teóricos, considerações implementacionais e aplicações. Por se tratar de uma técnica inovadora e em evolução, é natural que a maioria das publicações sejam devotadas aos aspectos teóricos. A Tabela C.2 traz os autores com maior número de publicações. Os artigos mais citados nesta área são listados pela Tabela C.3. Os cinco artigos exibidos nesta tabela são citados na maioria absoluta das publicações. E, finalmente, a Figura C.1 mostra a evolução do número de trabalhos publicados ao longo dos anos. É interessante notar como o ambiente tecnológico pode fazer uma grande diferença: antes de 1988, há apenas dois trabalhos diretamente sobre o tema.

Tabela C.1: Distribuição dos tópicos da bibliografia apresentada nesta compilação. Os percentuais não somam 100%, pois alguns trabalhos tratam de mais de um tópico.

Teoria	67,4%
Implementação	32,6%
Aplicação	10,8%

Tabela C.2: Maiores contribuintes em quantidade de artigos publicados na área.

Autor	Número de Trabalhos
D. W. Tufts	11
I. S. Reed	6
G. Sadasiv	4
M. -T. Shih	4
T. K. Truong	4
V. Di Lecce	4

Tabela C.3: Os artigos mais citados.

1	Fourier Analysis and Signal Processing by Use of the Möbius Inversion Formula [Reed, 1990a]
2	The Arithmetic Fourier Transform [Tufts, 1988a]
3	<i>Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens</i> [Bruns, 1903]
4	A VLSI Architecture for Simplified Arithmetic Fourier Transform Algorithm [Reed, 1990b]
5	An Arithmetical Approach to Ordinary Fourier Series [Wintner, 1947]

## Bibliografia Anotada

[Harzer, 1886] P. Harzer. Über eine von Herrn Tschebyschef angegebene Interpolationsmethode. *Astron. Nach.*, 115, 1886.

Embora não seja um trabalho diretamente relacionado com a transformada aritmética, há uma abordagem sobre médias aritméticas e estimação dos coeficientes de Fourier para fins de interpolação. Publicado numa revista da área de Astronomia, este trabalho é um prelúdio do que se tornará a ser a transformada aritmética.

[Bruns, 1903] Ernst Heinrich Bruns. *Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Alemanha, 1903.

Esta publicação marca o início da história da transformada aritmética. Trata-se um artigo puramente matemático e é a contribuição fundamental nesta área.

[Wintner, 1947] Aurel Freidrich Wintner. *An Arithmetical Approach to Ordinary Fourier Series*. Monografia, 1947.

Neste trabalho, os coeficientes da série de Fourier de funções pares periódicas são abordados por meio de cálculo aritmético. Usando a função de Möbius, este método é bastante similar ao de Bruns (1903).

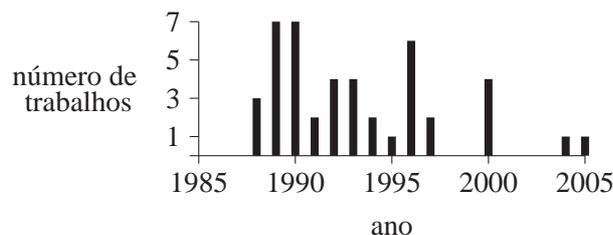


Figura C.1: Distribuição da literatura sobre a Transformada Aritmética em relação ao tempo. Antes de 1998, foram identificados apenas dois artigos: o artigo de 1903 por H. Bruns’ 1903 *Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens* e a monografia de 1947 intitulada *An Arithmetical Approach to Ordinary Fourier Series* por Wintner.

[Tufts, 1988a] Donald W. Tufts and Angaraih G. Sadasiv. Arithmetic Fourier Transform and Adaptive Delta Modulation: A Symbiosis for High Speed Computation. In *Proceedings of The International Society for Optical Engineering (SPIE)*, pp. 168–178, jan., 1988.

[Tufts, 1988b] Donald W. Tufts and Angaraih G. Sadasiv. The Arithmetic Fourier Transform. *IEEE ASSP Magazine*, pp. 13–17, jan., 1988.

Reinvenção do método de Wintner por Tufts e Sadasiv. De modo análogo ao procedimento original, este trabalho lida apenas com funções pares periódicas. Citado freqüentemente, é neste artigo que se encontra o termo “Arithmetic Fourier Transform” pela primeira vez. São apresentadas as primeiras abordagens para implementação da transformada em VLSI. Os autores exploram conexões entre a AFT e a modulação delta e delta adaptativa visando simplificar o procedimento.

[Schiff, 1988] J. L. Schiff and W. J. Walker. A Sampling Theorem and Wintner’s Results on Fourier Coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 133(2), ago., 1988.

Fornecer métodos para a extração dos coeficientes dos senos e cossenos da expansão em série de Fourier de uma função periódica. Este trabalho é citado em [Hsu, 1994] e é indiretamente relacionado com [Reed, 1990a].

[Reed, 1989] Irving S. Reed, Y. Y. Choi, and X. Yu. Practical Algorithm for Computing the 2-D Arithmetic Fourier Transform. In *Proceedings of The International Society for Optical Engineering (SPIE)*, pp. 54–61, jan., 1989.

Introduz o método AFT no caso bidimensional. Este método é baseado na abordagem descrita em [Tufts, 1988b]. Como consequência, este novo procedimento trata apenas de funções bidimensionais pares.

[Bartels, 1989] G. Faye Bartels-Boudreaux, Donald W. Tufts, P. Dhir, Angaraih G. Sadasiv, and G. Fischer. Analysis of Errors in the Computation of Fourier Coefficients Using the Arithmetic Fourier Transform (AFT) and Summation by Parts (SBP). In *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP’89*, pp. 1011–1014, Glasgow, Reino Unido, maio, 1989.

A complexidade computacional da AFT é examinada. Também é feita uma investigação sobre os erros devido ao uso de amostragem uniforme e interpolação. É demonstrado que uma estimativa dos coeficientes da série de Fourier  $\hat{a}_k$  obtidos pela AFT tem erros com variância relativa crescente em  $k$ , contudo o erro total  $\hat{a}_k$  é constante com a frequência. É feita uma comparação com o algoritmo “soma por partes”

[Tepedelenioglu, 1989] Nazif Tepedelenioglu. A Note on the Computational Complexity of the Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7):1146–1147, jul., 1989.

Claramente evidencia o ponto fraco da AFT: o grande número de amostras necessárias para o seu cálculo. Tepedelenioglu mostra que o cálculo exato de  $N$  componentes espectrais exige aproximadamente  $3\left(\frac{N}{\pi}\right)^2 + O(N \log N)$  amostras no domínio temporal.

[Tufts, 1989] Donald W. Tufts. Comments on “A Note on the Computational Complexity of the Arithmetic Fourier Transform”. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(7):1147–1148, jul., 1989.

Em resposta imediata (publicada na mesma revista, na página seguinte) à nota de Tepedelenioglu, este trabalho defende a AFT, esclarecendo que o problema do elevado número de amostras pode ser contornado pelo uso de esquemas de interpolação, como a interpolação de ordem zero [Reed, 1990a]. É também feito um breve comentário conectando a AFT com a série de Farey. Outro ponto salientado, é que o elevado número de adições da AFT pode ser combatido com o uso de computação em paralelo.

[Choi, 1989] Y. Y. Choi. *Algorithms for Computing the 2-D Arithmetic Fourier Transform*. Tese de Doutorado, Department of Electrical Engineering – Systems, University of Southern California, Los Angeles, E.U.A., 1989.

[Tufts, 1989] Donald W. Tufts, Z. Fan, and Z. Cao. Image Processing and the Arithmetic Fourier Transform. *SPIE High Speed Computing II*, 1058:46–53, 1989.

[Fischer, 1989] G. Fischer, Donald W. Tufts, and Angaraih G. Sadasiv. *VLSI Implementation of the Arithmetic Fourier Transform (AFT): A New Approach to High Speed Communication for Signal Processing*, cap. VLSI Signal Processing III, p. 264–275. IEEE Press, Noa Iorque, 1989. R. Broderon and H. Moscovitz, Eds.

[Reed, 1990a] Irving S. Reed, Donald W. Tufts, Xiaoli Yu, T.K. Truong, Ming-Tang Shih, and Xi-aowei Yin. Fourier Analysis and Signal Processing by Use of the Möbius Inversion Formula. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(3):458–470, mar., 1990.

Provavelmente o artigo mais citado nessa área. Nele, é feita uma extensão do método de Tufts-Sadasiv, fazendo que a AFT possa calcular as componentes pares e ímpares da série de Fourier de uma função periódica. Por outra perspectiva, este trabalho traz, de modo independente, um tratamento similar ao realizado por Schiff and Walker [Schiff, 1988]. Entretanto, vantagens computacionais o tornam superior. A série de Fourier é sempre tratada em sua expansão em um número finito de termos, diferentemente dos trabalhos anteriores. Interpolação de ordem zero é empregada. Estimativas acerca da complexidade computacional também são feitas:  $(3/8)M^2$  adições reais e  $(3/2)M$  multiplicações reais, em que  $M = 2 \cdot N + 1$  ( $N$  é o comprimento do sinal). Neste artigo, há também uma análise do erro computacional da AFT.

[Li, 1990] Weiping Li. Fourier Analysis Using Adaptative AFT. In *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP’90*, pp. 1523–1526, Albuquerque, E.U.A., abr., 1990.

Este estudo trata de métodos iterativos para o cálculo da AFT, atualizando a estimativa das componentes freqüenciais a partir do algoritmo dos mínimos quadrados (LMS). Esta é também uma outra solução ao número excessivo de amostras temporais exigido pela AFT. *En passant*, a AFT é utilizada para calcular a transformada inversa de Fourier. É trazido um interessante exemplo com 16 iterações do procedimento proposto.

[Fischer, 1990] G. Fischer, Donald W. Tufts, and R. Unnikrishnan. VLSI Implementation of the Arithmetic Fourier Transform. In *Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 800–803, ago., 1990.

Este trabalho é endereçado aos problemas de sincronismo devido a geração de índices não uniformemente espaçados. Técnicas utilizando capacitores chaveados são exploradas para projetar uma amostrado analógico em tecnologia CMOS.

**[Reed, 1990b]** Irving S. Reed, Ming-Tang Shih, E. Hendon, T. K. Truong, and Donald W. Tufts. A VLSI Architecture for Simplified Arithmetic Fourier Transform Algorithm. In *International Conference on Application Specific Array Processors, Special-Purpose Systems*, pp. 542–553, Princeton, E.U.A., set., 1990.

Revisita o algoritmo da AFT proposto em [Reed, 1990a], tornando-o mais balanceado. O algoritmo de 1990 [Reed, 1990a] tinha uma desvantagem no que toca o número de operações para o cálculo dos coeficientes ímpares comparado com os pares. Os coeficientes ímpares exigiam mais operações. Neste artigo, é feita uma nova versão do método original proposto por Bruns, comparando com os métodos existentes. É mostrado que o método de Bruns é superior. Este novo procedimento remove a necessidade de sinais de média nula tem uma complexidade de  $(1/2)N^2$  adições e  $N$  multiplicações. É mostrado também que os cálculos dos coeficientes ímpares e pares por meio das médias alternantes de Bruns apresentam aproximadamente o mesmo número de operações. Uma estrutura VLSI é proposta, reduzindo em 25% o número de adições da AFT. Este novo método foi chamado de “*Simplified AFT*”. Os resultados deste artigo de conferência foram expandido em uma versão para revista [Reed, 1992].

**[Park, 1990]** Heonchul Park and Viktor K. Prassana. VLSI Architectures for Computing the Arithmetic Fourier Transform. Relatório Técnico, Department of Electrical Engineering – Systems, University of Southern California, dez., 1990.

**[Choi, 1990]** Y. Y. Choi, Irving S. Reed, and Ming-Tang Shih. The New Arithmetical Approach to Fourier Series Analysis for a 2-D Signal. In *Proceedings of the International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing – ICASSP’90*, pp. 1997–2000, Novo México, 1990.

Uma extensão natural do trabalho [Choi, 1989]. Utiliza-se do método de Bruns, em vez da abordagem de Tufts-Sadasiv approach [Tufts, 1988b]. Este artigo é análogo a [Reed, 1990b; Reed, 1992], mas trata do caso bidimensional.

**[Wigley, 1990]** N. Wigley and G. A. Jullien. Sampling Reduction for the Arithmetic Fourier Transform. In *Proceedings of 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 841–844, 1990.

Enfoca os aspectos da amostragem não-uniforme. Os autores utilizam interpolação de primeira ordem em amostras uniformemente colhidas. É proposta também uma implementação em *hardware* registradores e acumuladores. O método de AFT utilizado é o visto em [Tufts, 1988b].

**[Park, 1991a]** Heonchul Park and Viktor K. Prassana. VLSI Architectures for Computing the Arithmetic Fourier Transform. In *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP’91*, pp. 1029–1032, maio, 1991.

Este artigo trata dos aspectos físicos da implementação da AFT. É proposta duas arquiteturas modulares com o uso de técnicas de implementação de circuitos em *array*. É feita uma comparação com a implementação proposta em [Reed, 1990b], evidenciando que a nova abordagem é superior.

**[Park, 1991b]** Heonchul Park and Viktor K. Prassana. Fixed Size Array Architectures for Computing Arithmetic Fourier Transform. In *Conference Record of the Twenty-Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 85–89, nov., 1991.

Estruturas em *array* são novamente abordadas [Park, 1991a]. Neste trabalho estendido, é evidenciado que a AFT pode ser calculada com  $2p$  elementos de processamento (*array*) e um multiplicador,  $1 \leq p \leq N$ . É brevemente comentado sobre a possibilidade de utilizar a AFT para calcular a transformada discreta do cosseno (DCT).

**[Ananthashayana, 1992]** V. K Ananthashayana. Comments on “Fourier Analysis and Signal Processing by Use of the Möbius Inversion Formula”. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(3):676, mar., 1992.

Nesta breve correspondência, é realizada a correção de seis pequenos erros nas demonstrações de teoremas e equações do artigo [Reed, 1990a]. Os erros, entretanto, não comprometiam os resultados.

**[Reed, 1992]** Irving S. Reed, Ming-Tang Shih, T. K. Truong, E. Hendon, and Donald W. Tufts. A VLSI Architecture for Simplified Arithmetic Fourier Transform Algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(5):1122–1133, maio, 1992.

É um dos artigos mais citados sobre AFT. Esta publicação é uma versão estendida de [Reed, 1990b] com comentários detalhados. Contém um exemplo bastante elucidativo.

[Wigley, 1992] N. Wigley and G. A. Jullien. On Implementing the Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(9):2233–2242, set., 1992.

Trata-se de uma versão ampliada de um artigo anterior do mesmo autor [Wigley, 1990]. Os aspectos teóricos da amostragem e a conexão com as frações de Farey são expostas com ênfase. Embora tenha sido publicado apenas em 1992, o manuscrito deste trabalho foi enviado para publicação em 1989.

[Zaid, 1992] A. Abo Zaid, A. El-Mahdy, A. O. Attia, and M. M. Selim. A High Speed Classifier Using the Arithmetic Fourier Transform. In *Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 36–39, 1992.

Aplica a AFT para gerar elementos a serem utilizados em sistemas de apoio à decisão, no caso *Fourier descriptors*, em técnicas de reconhecimento de padrão. Este trabalho mostra que o uso da AFT melhora as taxas de classificação quando se compara com o mesmo método utilizando FFT. Entretanto, não fica claro qual FFT é empregada na comparação.

[Kelley, 1993] Brian T. Kelley and Vijay K. Madiseti. Efficient VLSI Architectures for the Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(1):365–384, jan., 1993.

Este artigo chama a atenção outros parâmetros a serem observados na implementação da AFT, tais como tempos de operação e área física ocupada. São apresentadas descrições de várias propostas de implementação VLSI e uma comparação é realizada. É proposta uma nova implementação para a AFT 2-D utilizando estruturas de dados cíclicas. A versão da AFT considerada é [Reed, 1990a]. Talvez, em adotar o método descrito em [Reed, 1992], os autores poderiam obter melhores resultados

[Tufts, 1993] Donald W. Tufts and Haiguang Chen. Iterative Realization of the Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(1):152–161, jan., 1993.

Nesta publicação, é proposto uma implementação iterativa da AFT. Os esforços iniciais nessa direção foram de Weiping Li [Li, 1990]. Entretanto, Tufts e Chen observaram que a abordagem de Li era muito dependente do comprimento  $N$  do vetor de dados de entrada e problemas de convergência surgiam. Comentários sobre o esquema de amostragem da AFT são feitos, enfatizando ainda mais a preocupação com as frações de Farey. A AFT é mostrada em formato matricial. A matriz da AFT é uma matriz de dimensão  $F \times N$  que relaciona um vetor no domínio do

tempo  $\mathbf{x}$  com um vetor de componentes espectrais  $\mathbf{X} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , em que  $N$  é o número de amostras temporais uniformemente espaçadas e  $F$  é o número de componentes frequenciais espaçadas de acordo com frações de Farey. Como é um sistema com muitas soluções, os autores impuseram restrições, como tomar a solução com norma mínima. É sugerido um algoritmo iterativo no contexto de processamento adaptativo de sinais. A complexidade computacional é examinada após cada iteração:  $(N - 1)$  escalonamentos por inteiros e aproximadamente  $N$  multiplicações são necessárias. É demonstrado que o número de iterações é menor que  $N/2$ , fazendo este procedimento mais interessante do que a implementação direta da AFT. Em verdade, é mostrado que o processo tem convergência exponencial e poucas iterações são necessárias.

[Park, 1993] Heonchul Park and Viktor K. Prassana. Modular VLSI Architectures for Computing Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(6):2236–2246, jun., 1993.

Versão estendida da pesquisa contida em [Park, 1991a; Park, 1991b].

[Lovine, 1993] Frederick P. Lovine and Sawasd Tantaratana. Some Alternate Realizations of the Arithmetic Fourier Transform. In *Conference Record of the Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 310–314, Pacific Grove, nov., 1993.

Este artigo traz três métodos distintos para aprimorar a AFT. Duas características “particulares” da AFT foram removidas: a função de Möbius,  $\mu(\cdot)$ , e os fatores de escalonamento  $\frac{1}{2^n}$ . O uso da função de Möbius pôde ser eliminado através de uma abordagem recursiva, levando ao que os autores chamaram de “Möbius-function-free AFT”. Um outro método (AFT Modulada) para se eliminar a função de Möbius é modular o sinal de entrada de tal modo que o terço inferior de seu espectro seja deslocado para os dois terços superiores. Deste modo, os coeficientes de Möbius são desnecessários. O terceiro melhoramento proposto (AFT Integrada) consiste em integrar o sinal de entrada antes do uso da AFT. As médias alternantes de Bruns do sinal integrado já incorporam naturalmente os fatores de escala  $\frac{1}{2^n}$ .

[Hsu, 1994] Chin-Chi Hsu, Irving S. Reed, and T. K. Truong. Inverse Z-Transform by Möbius Inversion and Error Bounds of Aliasing in Sampling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(10):2823–2831, out., 1994.

Este artigo contém os principais resultados da segunda parte da tese de doutorado de Chin-Chi Hsu (aluno do Prof. Dr. Reed). A primeira parte da tese trata de implementações de códigos Reed-Solomon, com uma revisão do assunto. A segunda parte oferece um resumo da teoria da AFT e traz um procedimento para calcular a transformada  $Z$  via AFT. Este tópico, em particular, recebeu um tratamento extenso e uma análise de limitantes do erro da AFT foram encontrados. No capítulo final, há uma análise detalhada do balanço entre complexidade e interpolação na estimação de amostras inexistentes necessárias ao processo da AFT.

**[Knockaert, 1994]** Luc Knockaert. A Generalized Möbius Transform and Arithmetic Fourier Transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11):2967–2971, nov., 1994.

Com o uso ferramentas de Teoria dos Números e séries de Dirichlet, este artigo traz um método para o cálculo direto dos coeficientes ímpares da série de Fourier, sem a necessidade de deslocamentos do sinal original (compare com [Reed, 1990]).

**[Di Lecce, 1995]** Vincenzo Di Lecce and Andrea Guerriero. A FT Processor Based in Short AFT Module. In *Proceedings of International Symposium on Applied Informatics, IASTED*, Innsbruck, fev., 1995.

**[Andria, 1996]** Gregorio Andria, Vincenzo Di Lecce, and Mario Savino. Application of the AFT Technique for Low-Cost and Accurate Measurements. In *8th Mediterranean Electrotechnical Conference – MELECON'96*, pp. 1347–1350, Bari, Itália, maio, 1996.

Propõe o uso da AFT em substituição da FFT no contexto de medição de sinais. Os autores enfatizam que a AFT tem várias vantagens sobre a FFT, especialmente quando se trata de dados que não são potência de dois.

**[Knockaert, 1996]** Luc Knockaert. A Generalized Möbius Transform, Arithmetic Fourier Transforms, and Primitive Roots. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(5):1307–1310, maio, 1996.

É uma extensão de um trabalho anterior [Knockaert, 1994]. Transformadas generalizadas de Möbius são proposta com a introdução de funções periódicas multiplicativas de período  $q$ . Dr. Knockaert prova que, sob certas condições, estas funções existem.

**[Huisheng, 1996a]** Qian Huisheng and Li Ping. 2-D Arithmetic Fourier Transform Algorithm. In *Proceedings of 3rd International Conference on Signal Processing – ICSP'96*, pp. 147–150,

out., 1996.

É outra proposta de AFT bidimensional. Baseia-se no algoritmo da AFT proposto em [Reed, 1990a]. Outros pesquisadores já propuseram a AFT 2-D antes [Tufts, 1989; Reed, 1989; Choi, 1990; Choi, 1991; Kelley, 1993].

**[Huisheng, 1996b]** Qian Huisheng, Li Ping, Zhou Feng. On Arithmetic Cosine Transform Algorithm. In *Proceedings of 3rd International Conference on Signal Processing – ICSP’96*, pp. 143–146, out., 1996.

A AFT é aplicada para calcular a transformada discreta do cosseno (DCT). Já é sabido que a versão original da AFT de Tufts-Sadasiv é uma espécie de transformada de Fourier cosseno, uma vez que ela só calcula os coeficientes pares da série de Fourier. Apesar disto, os méritos de Huisheng *et al.* residem na conversão das quatro versões da DCT para o formalismo da AFT. Um sinal de teste,  $\cos\left(\frac{n\pi}{N}\right)$ , para  $N = 64$  e  $N = 100$ , é utilizado para uma comparação dos erros RMS após a reconstrução dos sinais pela DCT clássica e pelo método proposto.

**[Andria, 1996]** Gregorio Andria, Vincenzo Di Lecce, Andrea Guerriero. An AFT-based Virtual Instrument for Low-cost Spectrum Analysis. In *Proceedings of IMCT’96*, Bruxelas, 1996.

**[Di Lecce, 1996]** Vincenzo Di Lecce, Andrea Guerriero. Spectral Estimation by AFT Computation. *Digital Signal Processing*, 6(24):213–223, 1996.

Após uma revisão teórica sobre a teoria da AFT, este artigo traz uma análise da AFT com ênfase nos aspectos implementacionais em *software* e *hardware*. É apresentada então uma avaliação de desempenho do algoritmo.

**[Atlas, 1997]** Valery G. Atlas, Dmitry G. Atlas, Evgeny I. Bovbel. 2-D Arithmetic Fourier Transform Using the Bruns Method. *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 44(6):546–551, jun., 1997.

Este trabalho traz a conversão do método de Bruns para o tratamento de sinais 2-D. Este artigo é o análogo bidimensional do problema examinado em [Reed, 1992]. Adicionalmente, uma implementação em arquitetura VLSI é proposta.

**[Ge, 1997]** Xin-Jin Ge, Nan-Xian Chen, Zhao-Dou Chen. Efficient Algorithm for 2-D Arithmetic Fourier Transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(8):2136–2140, ago., 1997.

Independentemente de Atlas *et al.* [Atlas, 1997], Ge *et al.* também estenderam a AFT para o caso bidimensional. A complexidade computacional do algoritmo proposto é de  $\frac{1}{4}N^2$  adições e  $N$  multiplicações, que representa um avanço sobre as versões anteriores da AFT 2-D (Kelley [Kelley, 1993] e Tufts-Fan-Cao [Tufts, 1989]).

**[Xianchao, 2000a]** Zhang Xianchao, Wan Yingyu, Chen Guoliang. A New Approach for Implementing the Arithmetic Fourier Transform (AFT). In *Proceedings of the Fourth International Conference/Exhibition on High Performance Computing in the Asia-Pacific Region*, pp. 633–634, Beijing, China, maio, 2000.

Introduz um método para contornar o problema da elevada taxa de amostragem da AFT. Geralmente, para melhorar os resultados da AFT combinada com interpolação de ordem zero, exige-se mais amostras. O trabalho proposto utiliza uma abordagem simples para se gerar mais pontos. A partir de  $N$  amostras obtidas à taxa de Nyquist de uma função  $A(t)$ , no intervalo  $[0, T]$ , tem-se os seguintes pontos  $(i\Delta, A(i\Delta))$ , em que  $\Delta = \frac{T}{2N}$  e  $i = 0, \dots, 2N$ . Assim, para se dobrar o número de amostras, sugere-se considerar os pontos intermediários definidos por  $\left(\frac{i\Delta+(i+1)\Delta}{2}, \frac{A(i\Delta)+A((i+1)\Delta)}{2}\right)$ . Entretanto, as condições que  $A(t)$  deve satisfazer para que esta abordagem seja adequada não são comentadas.

**[Xianchao, 2000b]** Zhang Xianchao, Huang Liusheng, Chen Guoliang. A New Approach for Computing the Discrete Fourier Transform of Arbitrary Length. In *Proceedings of ICSP2000*, pages 81–84, ago., 2000.

Propõe a ADFT: transformada discreta de Fourier aritmética. Xianchao e colaboradores associam por meio da transformada aritmética os coeficientes da série de funções contínuas às seqüências discretas da DFT.

**[Cintra, 2002a]** R. J. de Sobral Cintra, H. M. de Oliveira. How to Interpolate in Arithmetic Transform Algorithms. In *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP’02*, Orlando, Flórida, E.U.A., maio 2002.

Um resumo dos principais resultados contidos em [Cintra, 2002b].

**[Cintra, 2002b]** R. J. de Sobral Cintra, H. M. de Oliveira. Interpolating in Arithmetic Transform Algorithms. In *6th WSEAS CSCC Multiconference, 2nd WSEAS International Conference on Signal Processing and Computational Geometry And Vision*, Creta, Grécia, jul., 2002.

Introduz a transformada aritmética de Hartley. Neste artigo, a técnica de transformada aritmética é elaborada não a partir de uma expansão em série, mas considerando a AFT como uma transformada discreta genuína. Os autores aplicam o método para outras transformadas discretas. Os núcleos de Fourier, Fourier cosseno e Fourier seno e Hartley são examinados. O problema da não uniformidade do intervalo entre amostras do sinal de entrada exigida pela AFT se repete nessa nova exposição. Neste caso, na forma de componentes fracionárias do sinal, por exemplo,  $v_{\frac{1}{3}}$  ou  $v_{\frac{5}{8}}$ . Uma análise envolvendo técnicas de interpolação é realizada.

[Lima, 2004] J. B. Lima, R. M. Campello de Souza, H. M. de Oliveira, M. M. Campello de Souza. Faster DTMF Decoding. In *Lecture Notes in Computer Science*, 3124:510–515, Berlim, 2004.

Propõe a aplicação da AFT na decodificação de tons DTMF. O conhecimento *a priori* do sinal sob análise (tons DTMF) é explorado para fornecer um algoritmo AFT dedicado para a aplicação. É utilizado o algoritmo de Reed-Shih e é mostrado que o método proposto pode ser superior ao algoritmo de Goertzel, usualmente empregado para decodificação DTMF.

[Cintra, 2005] R. J. de Sobral Cintra, H. M. de Oliveira. A Short Survey on Arithmetic Transforms and the Arithmetic Hartley Transform. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, 2005. Aceita para publicação.

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Abramowitz I. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1968.
- [2] L. R. Soares, H. M. Oliveira, R. J. de Sobral Cintra, “New compactly supported scaling and wavelet functions derived from Gegenbauer polynomials,” in *Proceedings of the Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Cataratas do Niágara, Canadá, 2004.
- [3] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Application*. McGraw-Hill, 1986.
- [4] R. E. Blahut, *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley, 1985.
- [5] W. L. Briggs V. E. Henson, *The DFT: An Owner’s Manual for the Discrete Fourier Transform*, 1<sup>a</sup> ed. SIAM, 1995.
- [6] H. V. Sorensen, D. L. Jones, C. S. Burrus, M. T. Heideman, “On computing the discrete Hartley transform,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 33, pp. 1231–1238, out. 1985.
- [7] R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*. Oxford, 1986.
- [8] M. T. Heideman, *Multiplicative Complexity, Convolution, and the DFT*. Springer-Verlag, 1988.
- [9] C. H. Paik M. D. Fox, “Fast Hartley transforms for image processing,” *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 7, no. 2, pp. 147–153, jun. 1988.
- [10] K. J. Olejniczak G. T. Heydt, “Scanning the special section on the Hartley transform,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, no. 3, pp. 372–380, mar. 1994.
- [11] R. M. Campello de Souza, H. M. de Oliveira, A. N. Kauffman, “Trigonometry in finite fields and a new hartley transform,” in *Proceedings of the 1998 International Symposium on Information Theory*, Cambridge, MA, E.U.A., 1999, p. 293.

- [12] B. Cipra, “The best of the 20th century: Editors name top 10 algorithms,” *SIAM News*, vol. 4, p. 1, maio 2000.
- [13] ———, “The FFT: Making technology fly,” *SIAM News*, vol. 26, no. 3, maio 1993.
- [14] D. M. Burton, *Elementary Number Theory*. Allyn and Bacon, Inc., 1979.
- [15] G. Bruun, “z-transform DFT filters and FFTs,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 26, no. 1, pp. 56–63, 1978.
- [16] R. Storn, “Some results in fixed point error analysis of the Bruun-FTT algorithm,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 7, pp. 2371–2375, 1993.
- [17] S. Winograd, *Arithmetic Complexity of Computations*, ser. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM, 1980, vol. 33.
- [18] ———, “On computing the discrete Fourier transform,” *Mathematics of Computation*, vol. 32, no. 141, pp. 175–199, jan. 1978.
- [19] J. L. Antonakos, *The Pentium Microprocessor*. Prentice Hall, 1996.
- [20] J. W. Cooley J. W. Tukey, “An algorithm for the machine computation of complex Fourier series,” *Mathematics of Computation*, vol. 19, pp. 297–301, 1965.
- [21] M. N. Yatsimirskiy, “A Rader-Brenner fast Hartley transformation,” *Telecommun. Radio Eng.*, vol. 47, no. 8, pp. 106–110, 1992, publicado originalmente em *Radiotekhnika*, n. 1–2, 1992, p. 66–70.
- [22] N. Benvenuto, L. Franks, F. Hill, Jr., “Dynamic programming methods for designing FIR filters using coefficients  $-1,0$  and  $+1$ ,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 4, pp. 785–792, 1986.
- [23] T. Hsung, D. P. K. Lun, W.-C. Siu, “The discrete periodic Radon transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 10, pp. 2651–2657, 1996.
- [24] N. Merhav B. Vasudev, “A multiplication-free approximate algorithm for the inverse discrete cosine transform,” in *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, vol. 2, 1991, pp. 759–763.
- [25] E. Vegh L. Leibowitz, “Fast complex convolution in finite rings,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 24, no. 4, pp. 343–344, 1976.

- [26] V. Dimitrov R. Baghaie, "Computing discrete Hartley transform using algebraic integers," in *Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, CA, E.U.A., 1999, pp. 1351–1355.
- [27] I. S. Reed, D. W. Tufts, X. Yu, T. Truong, M.-T. Shih, X. Yin, "Fourier analysis and signal processing by use of the Möbius inversion formula," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 3, pp. 458–470, mar. 1990.
- [28] N. Bhatnagar, "A binary friendly algorithm for computing discrete Hartley transform," in *1997 13th International Digital Signal Processing Proceedings*, vol. 1, jul. 1997, pp. 353–356.
- [29] H. S. Dee V. Jeoti, "Computing DFT using approximate fast Hartley transform," *International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA)*, pp. 100–103, ago. 2001.
- [30] R. C. Gonzalez R. E. Woods, *Digital Imaging Processing*, 2<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, 2002.
- [31] I. S. Reed, M.-T. Shih, T. K. Truong, E. Hendon, D. W. Tufts, "A VLSI architecture for simplified arithmetic Fourier transform algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 5, pp. 1122–1133, maio 1992.
- [32] D. W. Tufts A. G. Sadasiv, "The arithmetic Fourier transform," *IEEE ASSP Magazine*, pp. 13–17, jan. 1988.
- [33] R. J. de Sobral Cintra, H. M. Oliveira, C. O. Cintra, "The rounded Hartley transform," in *Proceedings of the IEEE International Telecommunications Symposium*, 2002.
- [34] R. J. de Sobral Cintra, "A transformada rápida de Hartley: Novas fatorações e um algoritmo aritmético," Dissertação de mestrado, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, jul. 2001.
- [35] H. M. de Oliveira, R. J. de Sobral Cintra, R. M. Campello de Souza, "A factorization scheme for some discrete Hartley transform matrices," in *ICSECIT 2001 Proceedings – International Conference on System Engineering, Communications and Informations Technologies*, Universidad de Magallanes, Punta Arenas, Chile, 2001.
- [36] R. V. L. Hartley, "A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems," *Proceeding of the I.R.E.*, pp. 144–150, mar. 1942.
- [37] R. N. Bracewell, "The discrete Hartley transform," *Journal of Optical Society of America*, vol. 73, pp. 1832–1835, 1983.

- [38] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea, 1959, vol. 2.
- [39] J. F. Humphreys M. Y. Prest, *Numbers, Groups and Codes*, 1<sup>a</sup> ed. Boca Raton: Cambridge University Press, 1990.
- [40] R. N. Bracewell, O. Buneman, H. Hao, J. D. Villasenor, “Fast two-dimensional Hartley transform,” *Proceedings of IEEE*, vol. 74, no. 8, pp. 1282–1283, set. 1986.
- [41] “The USC-SIPI image database,” <<http://sipi.usc.edu/services/database/Database.html>>, 2002, University of Southern California, Signal and Image Processing Institute.
- [42] H. M. de Oliveira, R. J. de Sobral Cintra, R. M. Campello de Souza, “The multilayer Hadamard decomposition of the discrete Hartley transform,” in *XVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Gramado, Brasil, set. 2000.
- [43] H. M. de Oliveira, R. F. G. Távora, R. J. de Sobral Cintra, R. M. Campello de Souza, “Fast finite field Hartley transform based on Hadamard decomposition,” 2001, aceito para publicação em *Sixth International Symposium on Communication Theory and Applications (ISCTA’01)*, Ambleside, U.K.
- [44] R. J. de Sobral Cintra, H. M. de Oliveira, R. M. Campello de Souza, “Um algoritmo bifuncional para a avaliação dos espectros de Hadamard e Hartley,” in *XIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Fortaleza, Brasil, set. 2001.
- [45] R. J. de Sobral Cintra H. M. a. de Oliveira, “How to interpolate in arithmetic transform algorithms,” in *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing – ICASSP’02*, Orlando, Flórida, E.U.A., maio 2002.
- [46] E. H. Bruns, *Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens*. Leipzig, Alemanha: B. G. Teubner Verlag, 1903.
- [47] N. Tepedelenlioglu, “A note on the computational complexity of the arithmetic Fourier transform,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 1146–1147, jul. 1989.
- [48] D. W. Tufts, “Comments on “a note on the computational complexity of the arithmetic Fourier transform”,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 1147–1148, jul. 1989.

- [49] I. S. Reed, Y. Y. Choi, X. Yu, "Practical algorithm for computing the 2-D arithmetic Fourier transform," in *Proceedings of The International Society for Optical Engineering (SPIE)*, jan. 1989, pp. 54–61.
- [50] Y. Y. Choi, I. S. Reed, M.-T. Shih, "The new arithmetical approach to Fourier series analysis for a 2-D signal," in *Proceedings of the International Conference on Acoustic, Speech, and Signal Processing – ICASSP'90*, Novo México, E.U.A., 1990, pp. 1997–2000.
- [51] Q. Huisheng L. Ping, "2-D arithmetic Fourier transform algorithm," in *Proceedings of 3rd International Conference on Signal Processing – ICSP'96*, out. 1996, pp. 147–150.
- [52] V. G. Atlas, D. G. Atlas, E. I. Bovbel, "2-D arithmetic Fourier transform using the Bruns method," *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 6, pp. 546–551, jun. 1997.
- [53] X.-J. Ge, N.-X. Chen, Z.-D. Chen, "Efficient algorithm for 2-D arithmetic Fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 8, pp. 2136–2140, ago. 1997.
- [54] Y. Y. Choi, "Algorithms for computing the 2-D arithmetic Fourier transform," Tese de doutorado, Department of Electrical Engineering – Systems, University of Southern California, Los Angeles, CA, E.U.A., 1989.
- [55] F. P. Lovine S. Tantaratana, "Some alternate realizations of the arithmetic Fourier transform," in *Conference Record of the Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, E.U.A., nov. 1993, pp. 310–314.
- [56] D. W. Tufts H. Chen, "Iterative realization of the arithmetic Fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 152–161, jan. 1993.
- [57] W. Li, "Fourier analysis using adaptative AFT," in *Proceedings of International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP'90*, Albuquerque, E.U.A., abr. 1990, pp. 1523–1526.
- [58] I. S. Reed, M.-T. Shih, E. Hendon, T. K. Truong, D. W. Tufts, "A VLSI architecture for simplified arithmetic Fourier transform algorithm," in *International Conference on Application Specific Array Processors*, ser. Special-Purpose Systems, Princeton, E.U.A., set. 1990, pp. 542–553.
- [59] L. Knockaert, "A generalized Möbius transform and arithmetic Fourier transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 2967–2971, nov. 1994.

- [60] —, “A generalized Möbius transform, arithmetic Fourier transforms, and primitive roots,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 5, pp. 1307–1310, maio 1996.
- [61] Q. Huisheng, L. Ping, Z. Feng, “On arithmetic cosine transform algorithm,” in *Proceedings of 3rd International Conference on Signal Processing – ICSP’96*, out. 1996, pp. 143–146.
- [62] G. Fischer, D. W. Tufts, R. Unnikrishnan, “VLSI implementation of the arithmetic Fourier transform,” in *Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, ago. 1990, pp. 800–803.
- [63] N. Wigley G. A. Jullien, “Sampling reduction for the arithmetic Fourier transform,” in *Proceedings of 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 1990, pp. 841–844.
- [64] —, “On implementing the arithmetic Fourier transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 9, pp. 2233–2242, set. 1992.
- [65] H. Park V. K. Prassana, “VLSI architectures for computing the arithmetic Fourier transform,” in *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP’91*, maio 1991, pp. 1029–1032.
- [66] —, “Fixed size array architectures for computing arithmetic Fourier transform,” in *Conference Record of the Twenty-Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, nov. 1991, pp. 85–89.
- [67] B. T. Kelley V. K. Madiseti, “Efficient VLSI architectures for the arithmetic Fourier transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 1, pp. 365–384, jan. 1993.
- [68] H. Park V. K. Prassana, “Modular VLSI architectures for computing arithmetic Fourier transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 6, pp. 2236–2246, jun. 1993.
- [69] G. Fischer, D. W. Tufts, A. G. Sadasiv, *VLSI Implementation of the Arithmetic Fourier Transform (AFT): A New Approach to High Speed Communication for Signal Processing*. Nova Iorque: IEEE Press, 1989, ch. VLSI Signal Processing III, pp. 264–275, r. Broderon and H. Moscovitz, Eds.
- [70] H. Park V. K. Prassana, “VLSI architectures for computing the arithmetic Fourier transform,” Departamento de Engenharia Elétrica – Sistemas, University of Southern California, R.T., dez. 1990.

- [71] ———, “Modular VLSI architectures for computing arithmetic Fourier transform,” IRIS #273, Departamento de Engenharia Elétrica – Sistemas, University of Southern California, R.T., ago. 1991.
- [72] V. Di Lecce A. Guerriero, “A FT processor based in short AFT module,” in *Proceedings of International Symposium on Applied Informatics, IASTED*, Innsbruck, fev. 1995.
- [73] A. Abo Zaid, A. El-Mahdy, A. O. Attia, M. M. Selim, “A high speed classifier using the arithmetic Fourier transform,” in *Proceedings of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 1992, pp. 36–39.
- [74] G. Andria, V. Di Lecce, M. Savino, “Application of the AFT technique for low-cost and accurate measurements,” in *8th Mediterranean Electrotechnical Conference – MELECON’96*, Bari, Itália, maio 1996, pp. 1347–1350.
- [75] G. Andria, V. Di Lecce, A. Guerriero, “An AFT-based virtual instrument for low-cost spectrum analysis,” in *Proceedings of IMCT’96*, Bruxelas, 1996.
- [76] C.-C. Hsu, I. S. Reed, T. K. Truong, “Inverse z-transform by Möbius inversion and error bounds of aliasing in sampling,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 10, pp. 2823–2831, out. 1994.
- [77] C.-C. Hsu, “Use of number theory and modern algebra in the Reed-Solomon code and the arithmetic Fourier transform,” Tese de doutorado, Department of Electrical Engineering – Systems, University of Southern California, Los Angeles, CA, ago. 1994.
- [78] D. W. Tufts, Z. Fan, Z. Cao, “Image processing and the arithmetic Fourier transform,” *SPIE High Speed Computing II*, vol. 1058, pp. 46–53, 1989.
- [79] J. B. Lima, R. M. Campello de Souza, H. M. de Oliveira, M. M. Campello de Souza, “Faster DTMF decoding,” *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3124, pp. 510–515, 2004.
- [80] G. F. Bartels-Boudreaux, D. W. Tufts, P. Dhir, A. G. Sadasiv, G. Fischer, “Analysis of errors in the computation of Fourier coefficients using the arithmetic Fourier transform (AFT) and summation by parts (SBP),” in *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing – ICASSP’89*, Glasgow, Reino Unido, maio 1989, pp. 1011–1014.
- [81] L. R. Soares, H. M. de Oliveira, R. J. de Sobral Cintra, R. M. Campello de Souza, “Fourier eigenfunctions, Gabor uncertainty principle, and isoresolution wavelets,” in *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, out. 2003.

- [82] “IEEE Xplore®,” <<http://ieeexplore.ieee.org/>>, 2004, Release 1.8, acessado em 18 de novembro de 2004.
- [83] A. Ali, “Repeated convolutions of Butterworth-filtered spectra,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 31, no. 6, pp. 584–587, 1984.
- [84] B. V. Gnedenko A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, 1954.
- [85] A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.
- [86] B. V. Gnedenko, *The Theory of Probability*. Moscou: Mir Publishers, 1977.
- [87] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2<sup>a</sup> ed. Reading, Mass.: John Wiley & Sons, 1971, vol. II.
- [88] A. D. Poularikas, *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*, A. D. Poularikas, Ed. Boca Raton: CRC Press, IEEE Press, 1999.
- [89] N. Wiener, *The Fourier Integral and Certain of Its Applications*. Dover, 1959.
- [90] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 2<sup>a</sup> ed. New York: Academic Press, 1970.
- [91] H. Dym H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972.
- [92] J.-B. Martens, “The Hermite transform—theory,” *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 9, pp. 1595–1606, 1990.
- [93] S. G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2<sup>a</sup> ed. Academic Press, 1999.
- [94] H. M. de Oliveira, “Análise de sinais para engenheiros: Uma abordagem via wavelets,” a ser publicado pela Editora Manole, São Paulo.
- [95] A. M. Reza, “From Fourier transform to wavelet transform,” White paper, out. 1999.
- [96] A. V. Oppenheim R. W. Schaffer, *Discrete-time Signal Processing*. New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
- [97] C. E. Heil D. F. Walnut, “Continuous and discrete wavelet transforms,” *SIAM Review*, vol. 31, no. 4, pp. 628–666, dez. 1989.
- [98] G. Strang T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1996.

- [99] M. J. T. Smith T. P. Barnwell, III, "Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 34, no. 3, pp. 434–441, jun. 1986.
- [100] M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J.-M. Poggi, *Wavelet Toolbox User's Guide*, 2<sup>a</sup> ed. New York: The MathWorks, Inc., 2000.
- [101] M. M. S. Lira, H. M. de Oliveira, R. J. de Sobral Cintra, "Elliptic-cylindrical wavelets: The Mathieu wavelets," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, no. 1, pp. 52–55, 2004.
- [102] J. H. Conway N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*. New York: Springer Verlag, 1988.
- [103] É. Mathieu, "Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique," *J. Math. Pures Appl.*, vol. 13, pp. 137–203, 1868.
- [104] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*. New York: Dover, 1964.
- [105] M. Calco F. Vera, "Resonant time-dependent magnetocurrents in a hall bar," *Physical Review B*, vol. 64, pp. 073 406–1–073 406–4, 2001.
- [106] L. Ruby, "Applications of the Mathieu Equation," *American Journal of Physics*, vol. 64, no. 1, pp. 39–44, jan. 1996.
- [107] A. M. Hussein W. Wurjantara, "Analysis of Elliptic Conductors Using the Point Matching Method with Mathieu Functions," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 5, pp. 4125–4127, set. 1997.
- [108] Wang-Ye-Heng Zhang-Xiang, "Elliptical Fourier Series Expansion Method together with Cutoff Frequencies in Elliptical Optical Waveguides," *American Journal of Physics*, vol. 16, no. 10, pp. 1933–1941, out. 1998.
- [109] S. Caorsi, M. Pastorino, M. Raffetto, "Electromagnetic Scattering by a Multilayer Elliptic Cylinder under Transverse-magnetic Illumination: Series Solution in Terms of Mathieu Functions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 6, pp. 926–935, jun. 1997.
- [110] K. Sun J. M. Tranquilla, "Study of Elliptical Annular Microstrip Antenna Using Full Mathieu Formulation," in *Proceedings of the International Symposium of the Antennas and Propagation Society*, vol. 2, 1993, pp. 944–947.

- [111] G. Beylkin, *Wavelets: Mathematics and Applications*. Boca Raton: CRC Press, 1993, ch. On Wavelet-based Algorithms for Solving Differential Equations, pp. 449–466.
- [112] W. Dahmen, Ed., *Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations*, ser. Wavelet Analysis and Its Applications, jul. 1997, vol. 6.
- [113] B. Alpert, G. Beylkin, R. R. Coifman, V. Rokhlin, “Wavelets for the Fast Solution of Second-kind Integral Equations,” *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, vol. 14, pp. 159–174, 1993.
- [114] G. Floquet, “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques,” *Ann. École Norm. Sup.*, vol. 12, no. 47, 1883.
- [115] I. S. Gradshteyn I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 4<sup>a</sup> ed. New York: Academic Press, 1965.
- [116] S. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, jul. 1989.
- [117] ———, *Une exploration des signaux en Ondelettes*. Palaiseau: Les Editions de l’École Polytechnique, 2000.
- [118] M. M. S. Lira, H. M. de Oliveira, M. A. Carvalho Júnior, R. M. Campello de Souza, “Compactly supported wavelets derived from Legendre polynomials: Spherical harmonic wavelets,” in *7th WSEAS International Multiconference CSCC*, Ilha Corfu, Grécia, jul. 2003.
- [119] M. Nasse C. Foot, “Influence of Background Pressure on the Stability Region of a Paul Trap,” *European Journal of Physics*, vol. 22, no. 6, pp. 563–573, nov. 2001.
- [120] Z. X. Nie, M. Feng, J. M. Li, L. Shi, X. W. Zhu, K. L. Gao, “Effect of the Double Frequency of Trap Field in a Paul Trap,” *Communications in Theoretical Physics*, vol. 35, no. 5, pp. 593–596, nov. 2001.
- [121] R. J. de Sobral Cintra, H. M. de Oliveira, L. R. Soares, “On filter banks and wavelets based on Chebyshev polynomials,” in *7th WSEAS International Multiconference (CSCC 2003)*, Ilha Corfu, Grécia, 2003, pp. 195–200.
- [122] ———, “Chebyshev wavelets,” in *XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, set. 2003, pp. 89–92.

- [123] T. Kilgore J. Prestin, "Polynomial wavelets in the interval," *Constructive Approximation*, vol. 12, pp. 95–110, 1996, springer-Verlag New York, Inc.
- [124] B. Fischer J. Prestin, "Wavelets based on orthogonal polynomials," Universität Rostock, 1996, preprint.
- [125] M. Vetterli J. Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.
- [126] A. B. Laboratories, *A History of Engineering & Science in the Bell System — Communication Sciences (1925–1980)*, S. Millman, Ed. AT&T Bell Laboratories, 1984.
- [127] M. Vetterli, "Wavelets, approximation, and compression," *IEEE Signal Processing Magazine*, no. 3, pp. 59–73, set. 2001.
- [128] W. M. Lawton, "Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 32, no. 1, pp. 57–61, jan. 1991.
- [129] D. L. Donoho I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90, no. 432, pp. 1200–1224, 1995.
- [130] S. K. Solanki, C. Régulo, M. Fligge, A. G. Kosovichev, "Noise reduction in helioseismic power spectra by non-orthogonal wavelets," *Astronomy & Astrophysics*, vol. 379, pp. 1039–1044, 2001.
- [131] M. Venkatraman V. Govindaraju, "Zero crossings of a non-orthogonal wavelet transform for object location," in *International Conference on Image Processing*, Washington, DC, E.U.A., 1995, p. 3057.
- [132] A. J. P. M. Smout, E. J. Van Der Schee, J. L. Grashuis, "What is measured in electrogastrography?" *Digestive Diseases and Sciences*, vol. 25, no. 3, pp. 179–186, mar. 1980.
- [133] M. P. Mintchev, "Electrogastrography: Metodology and clinical applications," <<http://www.enel.ucalgary.ca/People/Mintchev/www.html>>, 2004.
- [134] "Webciencia, Sistema Muscular," <[http://www.webciencia.com/11\\_28musculos.htm](http://www.webciencia.com/11_28musculos.htm)>, 2004, acessado em 19 de fevereiro de 2005.
- [135] K. G. Morgan, F. Angel, P. F. Schmalz, J. H. Szurszewski, "Intracellular electrical activity of muscularis mucosae of the dog stomach," *American Journal of Physiology*, vol. 249, pp. 256–263, ago. 1985.

- [136] A. J. Bauer, N. G. Publicover, K. M. Sanders, "Origin and spread of slow waves in canine gastric antral circular muscle," *American Journal of Physiology*, vol. 234, pp. 800–806, 1985.
- [137] T. L. Abell J. Malagelada, "Electrogastrography: Current assessment and future perspectives," *Digestive Diseases and Science*, vol. 33, pp. 982–92, 1988.
- [138] J. H. Szurszewski, *Physiology of the Gastrointestinal Tract*. Nova Iorque: Raven Press, 1981, vol. 2, ch. Electrical Basis for Gastrointestinal Motility, pp. 1435–1466.
- [139] C. F. Code J. A. Marlett, "The interdigestive myoelectrical complex of the stomach and small bowes of dogs," *Journal of Physiology*, vol. 246, pp. 289–309, 1975.
- [140] Y. J. Kingma, "The electrogastrogram and its analysis," *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 17, no. 2, pp. 105–124, 1987.
- [141] A. J. P. M. Smout, *Myoelectric Activity of the Stomach*. Holanda: Delft University Press, 1980.
- [142] H. Geldof, "Electrogastrography: Clinical applicatioins," Tese de doutorado, Erasmus University, Rotterdam, Holanda, 1987.
- [143] W. C. Alvarez, "The electrogastrogram and what it shows," *The Journal of the American Medical Association*, vol. 78, no. 15, pp. 1116–1119, abr. 1922.
- [144] ———, "New methods of studying gastric peristalsis," *The Journal of the American Medical Association*, vol. 79, no. 16, pp. 1281–1285, out. 1922.
- [145] E. Klein, "Gastric motility," *Archives of Surgery*, vol. 12, pp. 571–582, 1926.
- [146] W. C. Alvarez, "A non-polarizable electrode and clamp designed particularly for gastrointestinal work," *American Journal of Physiology*, vol. 69, pp. 249–253, 1924.
- [147] N. Mirizzi U. Scafoglieri, "Optimal direction of the electrogastrographic signal in man," *Medical & Biological Engineering & Computing*, vol. 21, no. 4, pp. 385–389, jul. 1983.
- [148] Z. Lin J. Z. Chen, *Time-Frequency Analyses of the Electrogastrogram*, 1<sup>a</sup> ed., ser. Biomedical Engineering Series. IEEE Press, out. 1997, ch. 6.
- [149] H. P. Parkman, W. L. Hasler, J. L. Barnett, E. Y. Eaker, "Electrogastrography: a document prepared by the gastric section of the american motility society clinical GI motility testing task force," *Neurogastroenterology and Motility*, vol. 15, pp. 89–102, 2003.

- [150] M. P. Mintchev K. L. Bowes, "Impact of external factors on the stability of human electrogastragrams," *Medical & Biological Engineering & Computing*, vol. 34, pp. 270–272, 1996.
- [151] B. O. Familoni, K. L. Bowes, Y. J. Kingma, K. R. Cote, "Can transcutaneous recordings detect gastric electrical abnormalities?" *GUT*, vol. 32, no. 2, pp. 141–146, 1991.
- [152] M. P. Mintchev, Y. J. Kingma, K. L. Bowes, "Accuracy of cutaneous recordings of gastric electrical activity," *Gastroenterology*, vol. 104, pp. 1273–1280, 1993.
- [153] R. J. de Sobral Cintra, I. V. Tchervensky, V. S. Dimitrov, M. P. Mintchev, "Optimal wavelets for electrogastrography," in *26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBS)*, São Francisco, CA, E.U.A., set. 2004.
- [154] M. P. Mintchev, S. J. Otto, K. L. Bowes, "Electrogastrography can recognize gastric electrical uncoupling in dogs," *Gastroenterology*, vol. 112, pp. 2006–2011, 1997.
- [155] M. P. Mintchev, A. Stickel, K. L. Bowes, "Dynamics of the level of randomness in gastric electrical activity," *Digestive Diseases and Sciences*, vol. 43, no. 5, pp. 953–956, maio 1998.
- [156] J.-Y. Carré, A. Høst-Madsen, K. L. Bowes, M. P. Mintchev, "Dynamics of the level of deterministic chaos associated with gastric electrical uncoupling in dogs," *Medical & Biological Engineering & Computing*, vol. 39, pp. 322–329, 2001.
- [157] L. A. Bradshaw, J. K. Ladipo, J. P. Wikswo, Jr., W. O. Richards, "The human vector magnetogastrogram and magnetoenterogram," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 46, no. 8, pp. 959–970, ago. 1999.
- [158] L. A. Bradshaw, A. G. Myers, A. Redmond, J. P. Wikswo, W. O. Richards, "Biomagnetic detection of gastric electrical activity in normal and vagotomized rabbits," *Neurogastroenterology and Motility*, vol. 15, no. 5, pp. 475–482, out. 2003.
- [159] L. A. Bradshaw, A. Myers, J. P. Wikswo, W. O. Richards, "A spatio-temporal dipole simulation of gastrointestinal magnetic fields," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 50, no. 7, pp. 836–847, jul. 2003.
- [160] X. Xie H. H. Sun, "Sinusoidal time-frequency wavelet family and its application in electrogastrographic signal analysis," in *Proceedings of the 20th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, vol. 3, Hong Kong, China, 1998, pp. 1450–1453.

- [161] C. Ryu, K. Nam, S. Kim, D. Kim, "Comparison of digital filters with wavelet multiresolution filter for electrogastragram," in *Proceedings of the Second Joint BMES/EMBS Conference*, Houston, TX, E.U.A., out. 2000, pp. 137–138.
- [162] J. Liang, J. C. Cheung, J. D. Z. Chen, "Noise detection and denoising on electrogastragraphy using nonorthogonal multiresolution wavelet analysis," in *Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, vol. 3, Amsterdam, Países Baixos, 1996, pp. 1039–1040.
- [163] H. Liang Z. Lin, "Stimulus artifact cancellation in the serosal recordings of gastric myoelectric activity using wavelet transform," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 49, no. 7, pp. 681–688, jul. 2002.
- [164] W. Qiao, H. H. Sun, W. Y. Chey, K. Y. Lee, "Continuous wavelet analysis as an aid in the representation and interpretation of electrogastragraphic signals," in *Proceedings of the Fifteenth Southern Biomedical Engineering Conference*, Dayton, E.U.A., mar. 1996, pp. 140–141.
- [165] J. O. Chapa R. M. Rao, "Algorithms for designing wavelets to match a specified signal," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 12, pp. 3395–3406, dez. 2000.
- [166] M. Vetterli, "Wavelets, approximation, and compression," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 5, pp. 59–73, set. 2001.
- [167] R. A. Gopinath, J. E. Odegard, C. S. Burrus, "Optimal wavelet representation of signals and the wavelet sampling theorem," *IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 41, no. 4, pp. 262–277, abr. 1994.
- [168] A. H. Tewfik, D. Sinha, P. Jorgensen, "On the optimal choice of a wavelet for signal representation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 747–765, mar. 1992.
- [169] H. Zhou A. H. Tewfik, "Parametrization of compactly supported orthonormal wavelets," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 3, pp. 1428–1431, mar. 1993.
- [170] M. A. M. T. Verhagen, L. J. Van Schelven, M. Samsom, A. J. P. M. Smout, "Pitfalls in the analysis of electrogastragraphic recordings," *Gastroenterology*, vol. 117, no. 2, pp. 453–460, 1999.
- [171] M. Unser T. Blu, "Wavelet theory demystified," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no. 2, pp. 470–483, fev. 2003.

- [172] O. Bratteli P. E. T. Jorgensen, *Wavelets Through A Looking Glass: The World of the Spectrum*. Boston: Birkhäuser, 2002.
- [173] A. Chagas, E. Da Silva, J. Nadal, “ECG data compression using wavelets,” in *Computers in Cardiology*, set. 2000, pp. 423–426.
- [174] Z. Lu, D. Y. Kim, W. Pearlman, “ECG signal compression with a new wavelet method,” in *Proceedings of the First Joint BMES/EMBS Conference*, Atlanta, GA, E.U.A., out. 1999, p. 955.
- [175] M. J. Watson, A. Liakopoulos, D. Brzakovic, C. Georgakis, “Wavelet techniques in the compression of process data,” in *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, E.U.A., jun. 1995, pp. 1265–1269.
- [176] M. Unser A. Aldroubi, “A review of wavelets in biomedical applications,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 626–638, abr. 1996.
- [177] R. Besar, C. Eswaran, S. Sahib, R. J. Simpson, “On the choice of the wavelets for ECG data compression,” in *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Istanbul, Turkey, jun. 2000, pp. 1011–1014.
- [178] M. P. Mintchev, A. Girard, K. L. Bowes, “Nonlinear adaptive noise compensation in electrogastrograms recorded from healthy dogs,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 47, no. 2, pp. 239–248, jan. 2000.
- [179] D. Pollen, “ $SU_1(2, F[z, 1/z])$  for  $F$  a subfield of  $\mathbb{C}$ ,” *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 3, no. 3, pp. 611–624, jul. 1990.
- [180] R. J. de Sobral Cintra, I. V. Tchervensky, V. S. Dimitrov, M. P. Mintchev, “Wavelet analysis in a canine model of gastric electrical uncoupling,” *Physiological Measurement, Institute of Physics*, vol. 25, no. 6, pp. 1355–1369, dez. 2004.
- [181] J. H. Szurszewski, *Physiology of the Gastrointestinal Tract*. New York: Raven Press, 1981, ch. Electrical Basis for Gastrointestinal Motility, pp. 1435–1466.
- [182] E. E. Daniel, B. L. Bardakjian, J. D. Huizinga, N. E. Diamant, “Relaxation oscillator and core conductor models are needed for understanding of GI electrical activities,” *American Journal of Physiology: Gastrointestinal and Liver Physiology*, vol. 226, no. 3, pp. 475–482, 1994.
- [183] M. Bortolotti, “Electrogastrography: A seductive promise, only partially kept,” *The American Journal of Gastroenterology*, vol. 93, no. 10, pp. 1791–1794, out. 1998.

- [184] J. D. Z. Chen, J. Pan, R. W. McCallum, "Clinical significance of gastric myoelectrical dysrhythmias," *Digestive Diseases and Sciences*, vol. 13, no. 5, pp. 275–290, set. 1995.
- [185] J. D. Z. Chen, W. R. Stewart Jr., R. W. McCallum, "Spectral analysis of episodic rhythmic variations in cutaneous electrogastrogram," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 40, no. 2, pp. 128–135, fev. 1993.
- [186] C. H. You W. Y. Chey, "Study of electromechanical activity of the stomach in humans and dogs with particular attention to tachygastria," *Gastroenterology*, vol. 86, pp. 1460–1468, 1986.
- [187] M. P. Mintchev K. L. Bowes, "Do increased electrogastrographic frequencies always correspond to internal tachygastria?" *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 25, pp. 1052–1058, 1997.
- [188] N. G. Publicover K. M. Sanders, "Are relaxation oscillators an appropriate model of gastrointestinal electrical activity?" *American Journal of Physiology: Gastrointestinal and Liver Physiology*, vol. 256, no. 2, pp. 265–274, 1989.
- [189] G. W. Snedecor W. G. Cochran, *Statistical Methods*, 6<sup>a</sup> ed. Iowa State University Press, 1967.
- [190] T. Gonzalez, S. Sahni, W. R. Franta, "An efficient algorithm for the Kolmogorov-Smirnov and Lilliefors tests," *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 3, no. 1, pp. 60–64, mar. 1977.
- [191] C. P. Sanmiguel, M. P. Mintchev, K. L. Bowes, "Dynamics of level of randomness of electrogastrograms can be indicative of gastric electrical uncoupling in dogs," *Digestive Diseases and Sciences*, vol. 44, no. 3, pp. 523–528, mar. 1999.
- [192] B. G. Sherlock D. M. Monro, "On the space of orthonormal wavelets," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, pp. 1716–172, jun. 1998.
- [193] R. C. A. Guedes, A. Amâncio dos Santos, R. Manhães de Castro, R. R. G. Costra Cruz, "Citalopram has an antagonistic action on cortical spreading depression in well-nourished and early-malnourished adult rats," *Nutritional Neurosciences*, vol. 5, no. 2, pp. 115–123, 2002.

O autor nasceu na cidade do Recife em 18 de setembro de 1976. É técnico em Eletrônica formado pela então Escola Técnica Federal de Pernambuco, bacharel e mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Pernambuco.

Em 2003-2004, realizou estágio de doutoramento na *University of Calgary*, Canadá, ingressando na área de Engenharia Biomédica.

É membro da Sociedade Brasileira de Telecomunicações (SBrT), de *The Institute of Electrical and Electronic Engineers* (IEEE), da *American Mathematical Society* (AMS) e da *Society for Industrial and Applied Mathematics* (SIAM). É revisor da *IEEE Signal Processing Letters* e da Revista Brasileira de Telecomunicações. Regularmente é revisor de conferências internacionais em Engenharia Elétrica. Suas áreas de maior interesse são: algoritmos rápidos, processamento digital de sinais, processamento de sinais biomédicos.

Endereço: Rua Nissin Bensoussan, 50/501

Cordeiro, Recife, Pernambuco

C.E.P.: 50.630-030

rjsc@ieee.org

Esta tese foi diagramada usando  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ <sup>1</sup> pelo autor.

---

<sup>1</sup> $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  é uma extensão do  $\text{\LaTeX}$ .  $\text{\LaTeX}$  é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema  $\text{\TeX}$ , que foi desenvolvido por Donald E. Knuth.  $\text{\TeX}$  é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática (AMS). A maioria das macros usadas na formatação desta tese foram escritas por Dinesh Das, Departamento de Ciência da Computação, Universidade do Texas. Algumas macros foram escritas por Renato José de Sobral Cintra, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco.

# Índice Remissivo

- Algoritmo “cascata”, **91**, 101, 104, 108
- Algoritmos Rápidos
  - Fatores de desempenho, 3
  - para a DFT, 5
- Alvarez, 125
- Análise combinada (EGG), 150
- Arredondamento
  - Função de, 15
- Bases de Gabor, 86
- Bracewell, Ronald Newbold, 35
- Bruns, Ernest Heinrich, 33
- Cadeia de Markov, 115
- Chebyshev, Pafnuty Lvovich, 103
- Complexidade Multiplicativa, 8
  - DHT, 9
  - Mínima, 8
  - Nula, 11
- Condição
  - de admissibilidade, 87
  - de convergência, 108
  - QMF, 90, 99, 107, 112
- Desacoplamento elétrico, 142, 144
- Desigualdade de Heisenberg-Gabor, 84
- Duração de um sinal, 83
- Eletrogastrografia, **124**, 128, 150
  - artefatos, 130
  - dificuldades, 126
- Equação de refinamento, 89
- Escalograma, 87
- Espectrograma, 82
- Estômago
  - anatomia, 121
  - atividade elétrica, 123
- Filtro
  - de decomposição, 106, 107
  - de escala, 89
  - de Mathieu, 97
  - de reconstrução, 106, 107
  - de wavelet, 90
  - média móvel, 112
  - suavizador, 96, 99, 105, 106, 109
- Frequência dominante (EGG), 135
- Função peso, **53**, 55, 58, 59
- Hankel, Hermann, 74
- Hartley, Ralph Vinton Lyon, 35
- Hermite
  - Charles, 77
  - Funções de, 77
- Incerteza
  - tempo-frequência, **83**, 84, 86
- Índice fracionário, 49, 52, 53
- Interpolação
  - comportamento assintótico, 55

- de ordem elevada, 59
- de ordem zero, 57
- para a DFT cosseno, 53
- para a DFT seno, 53
- para a DHT, 52, 53
- Inversão aproximada, 17
- Involução, 16, 17, 19, 69
- Janelamento, 81
- Lena, 29
- Mathieu
  - Emile Léonard, 93
  - equação de, 93
- Miotomia, 144
- Multiresolução, 89
- Möbius
  - função de, 37
  - fórmula de inversão
    - para séries finitas, 38, 45, 50
    - para séries infinitas, 40
- Médias
  - alternantes de Bruns, 44
  - de Reed-Tufts, 42
  - de Tufts-Sadasiv, 39
- Parametrização de Pollen, 137
- Permutação, 31
- Polinômios de Chebyshev
  - aplicações, 104
  - de primeira espécie, 105
  - de segunda espécie, 110
- PRD, 135
- PSNR, 25
- Reed, Irving S., 34
- Série
  - de Fourier, 33, 34, 43, 46, 48
  - de Hartley, 48
  - de wavelet, 88
- Taxa de Nyquist, 48
- Teorema de Floquet, 95
- Teorema de Perron-Frobenius, 114
- Transformada
  - contínua de wavelet, 87
  - de Hadamard, 11, 14, 30
  - discreta de Fourier, 2
  - discreta de Hartley, **4**, 35
    - forma matricial, 14
  - discreta de wavelet, 89
  - integral de Fourier, 62
  - integral de Hankel, 74
  - integral de Hartley, 66
- Transformada aritmética
  - de Fourier, 34, **36**
    - aplicações, 35
    - bidimensional, 35
    - complexidade computacional, 41, 44–46, 48
    - dificuldades, 47
    - Reed-Shih, 44
    - Reed-Tufts, **41**, 46
    - Tufts-Sadasiv, **39**, 42, 58
  - de Hartley, **49**
    - exemplo, 50
  - de Hartley inversa, 51
- Transformada de Hartley Arredondada, 14
  - Algoritmo Rápido, 22
  - Bidimensional, 24

**Wavelet**

casada, 92

compressão via, 134

Daubechies-3, 140

parametrização, 137

Wintner, Aurel Freidrich, 33

