

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



PEDRO ANDRADE LIMA SÁ DE MELO



**ANÁLISE DE CÓDIGOS LDPC EM CANAIS
MARKOVIANOS BASEADOS EM FILA**

VIRTUS IMPAVIDA

RECIFE, AGOSTO DE 2012.

PEDRO ANDRADE LIMA SÁ DE MELO

**ANÁLISE DE CÓDIGOS LDPC EM CANAIS
MARKOVIANOS BASEADOS EM FILA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Elétrica**

ORIENTADOR: CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL, PH.D.

Recife, Agosto de 2012.

Catálogo na fonte
Bibliotecária: Rosineide Mesquita Gonçalves Luz / CRB4-1361 (BCTG)

M528a Melo, Pedro Andrade Lima Sá de.
Análise de códigos LDPC em canais Markovianos baseados em fila /
Pedro Andrade Lima Sá de Melo. – Recife: O Autor, 2012.
xii, 87f., il., figs., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Cecilio José Lins Pimentel, PH.D.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco.
CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2012.
Inclui Referências e Apêndice.

1. Engenharia Elétrica. 2. Canais Markovianos de Estados Finitos 3.
Capacidade de Canal. 4. Códigos LDPC. 5. Decisão Suave. 6.
Desvanecimento Rayleigh. 7. Modelamento de Canais. I. Pimentel,
Cecilio José Lins (Orientador). II. Título.

621.3 CDD (22.ed) UFPE/BCTG-2012/248



Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DO MESTRADO ACADÊMICO DE

PEDRO ANDRADE LIMA SÁ DE MELO

TÍTULO

**“ANÁLISE DE CÓDIGOS LDPC EM
CANALIS MARKOVIANOS BASEADOS EM FILA”**

A comissão examinadora composta pelos professores: CECÍLIO JOSÉ LINS PIMENTEL, DES/UFPE, VALDEMAR CARDOSO DA ROCHA JÚNIOR, DES/UFPE e ERNESTO LEITE PINTO, DEE/IME, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **PEDRO ANDRADE LIMA SÁ DE MELO APROVADO.**

Recife, 03 de agosto de 2012.

GERALDO LEITE TORRES
Vice-Coordenador do PPGEE

CECÍLIO JOSÉ LINS PIMENTEL
Orientador e Membro Titular Interno

ERNESTO LEITE PINTO
Membro Titular Externo

VALDEMAR CARDOSO DA ROCHA JÚNIOR
Membro Titular Interno

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Pedro Augusto e Silene.

A Nara Gisele.

AGRADECIMENTOS

A todos os professores do Departamento de Eletrônica e Sistemas da UFPE que contribuíram para minha formação como acadêmica, pelas contribuições valiosas, tanto em termos profissionais como pessoais.

Ao Prof. Dr. Valdemar Cardoso da Rocha Jr. e Prof. Dr. Ernesto Leite Pinto que gentilmente aceitaram o convite para integrar a banca examinadora desta dissertação.

À Queen's University, pelo convite para realizar parte da pesquisa desenvolvida neste trabalho em seu *campus*. Ao Prof. Dr. Fady Alajaji pelas importantes contribuições para os resultados apresentados nesta dissertação.

Aos amigos da graduação e pós-graduação pela amizade que me propiciaram.

Agradeço ao Professor Cecilio José Lins Pimentel pela orientação da elaboração deste trabalho, durante a qual sempre estive presente na forma de apoio, supervisão, e principalmente na passagem de conhecimentos, que ficarão para toda a minha carreira profissional. Gostaria de ressaltar seu interesse na formação do aluno, característica essencial em um docente de qualquer área.

PEDRO ANDRADE LIMA SÁ DE MELO

Recife, 3 de Agosto de 2012.

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

ANÁLISE DE CÓDIGOS LDPC EM CANAIS MARKOVIANOS BASEADOS EM FILA

Pedro Andrade Lima Sá de Melo

Agosto/2012

Orientador: Cecilio José Lins Pimentel, Ph.D.

Área de Concentração: Comunicações

Palavras-chaves: canais markovianos de estados finitos, capacidade de canal, códigos LDPC, decisão suave, desvanecimento Rayleigh, modelamento de canais

Número de páginas: XII + 87

Um canal de comunicação discreto não binário e com memória é apresentado com o objetivo de capturar tanto a informação de decisão suave quanto a correlação temporal de um canal com desvanecimento (DFC) quantizado em 2^q níveis de quantização. Mostra-se que o canal discreto pode ser descrito explicitamente em termos de seu processo de entrada binário e processo de ruído 2^q -ário. Também é mostrado que o canal é simétrico e admite uma expressão simples para sua capacidade de canal. O processo de ruído é então modelado como um modelo baseado em fila (QB), produzindo uma fonte de ruído markoviano estacionário e ergódico de ordem M com $2^q + 2$ parâmetros. O DFC é aproximado pelo canal discreto com ruído QB, cujos parâmetros são estimados por um processo iterativo que minimiza a divergência de Kullback-Leibler entre as fontes de ruído do DFC e QB. Os modelos obtidos são usados em esquemas de decodificação LDPC desenvolvidos para o canal discreto com ruído QB, em que se observa um ganho de decodificação quando comparado ao caso sem memória.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of
Master in Electrical Engineering

ANALYSIS OF LDPC CODES IN QUEUE-BASED MARKOV CHANNELS

Pedro Andrade Lima Sá de Melo

August/2012

Supervisor: Cecilio José Lins Pimentel, Ph.D.

Area of Concentration: Communication

Keywords: finite-state markov channels, channel modeling, soft-decision, LDPC codes

Number of pages: XII +87

A non-binary discrete communication channel with memory is introduced with the objective of capturing both the soft-decision information and the time correlation of a discrete fading channel (DFC) with an output quantizer with 2^q quantization levels. It is shown that the discrete channel can be explicitly described in terms of its binary input process and a 2^q -ary noise process. It is also shown that the channel is symmetric and admits a simple expression for its channel capacity. The noise process is next modeled as a queue-based (QB) noise model to produce a stationary ergodic M 'th order Markovian noise source with $2^q + 2$ parameters. The DFC is fitted by a discrete channel with QB noise, whose parameters are estimated via an iterative procedure that minimizes the Kullback-Leibler divergence rate between the DFC and QB noise sources. The obtained models are used in LDPC decoding schemes developed for the discrete channel with QB noise in which coding gains are observed when compared to the memoryless case.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objeto do Estudo	3
1.2	Organização do Trabalho	5
2	O MODELO DE CANAL DISCRETO DE RUÍDO NÃO-BINÁRIO	7
2.1	Modelo de Clarke	7
2.2	Canal Discreto com Desvanecimento Demodulado com Decisão Suave	8
2.3	Modelo Alternativo do DFC: O Canal Discreto de Ruído Não-Binário	12
2.4	Capacidade do Canal DFC	14
2.5	O Ruído Markoviano Não-Binário Baseado em Fila	17
2.6	O Canal com Ruído Markoviano de Bloco	22
3	MODELAMENTO DO CANAL DFC POR MEIO DO NBNDQ-QB	24
3.1	Cálculos de Capacidade de Canais DFC	24
3.2	Modelamento do DFC por meio do QB	27
4	CÓDIGOS LDPC APLICADOS A CANAIS MARKOVIANOS	34
4.1	Códigos LDPC	34
4.2	Grafos de Tanner	35
4.3	Algoritmo Soma-Produto	38
4.4	O ASP Aplicado a Mensagens em Razão de Verossimilhança	40
4.5	Um Grafo de Fatores para um Código LDPC em um Canal Markoviano de Estados Finitos	42
4.5.1	Escalonamento de passagem de mensagens	44
4.6	Decodificação pelo ASP aplicada ao BMNC	45
4.7	Decodificação pelo ASP aplicada ao NBNDQ-QB	47
4.8	Limite de Shannon para a Taxa de Distorção	49

5	RESULTADOS	52
5.1	Limite de Shannon para Taxa de Distorção do NBNDQ-QB e DMC	52
5.2	Desempenho da Decodificação LDPC do canal NBNDQ-QB	57
5.3	Desempenho da Decodificação LDPC dos esquemas DFC-QB e DFC-BMNC	59
6	CONCLUSÕES	66
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	69
Apêndice A PROVA DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO DO NBNDQ-QB		70
Apêndice B PROVA DA SIMETRIA DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DO NBNDQ		77
Apêndice C PROVA DO LEMA 4.1		80

LISTA DE TABELAS

3.1	Capacidades do canal DMC em (bits/uso do canal) com decisão abrupta ($q = 1$) e suave com $q = 2$	26
3.2	Limitantes inferiores para a capacidade de canal, $C^{(n)}$, em (bits/uso do canal) para canais DFC com $f_D T = 0,01$	27
3.3	Limitantes inferiores para a capacidade de canal, $C^{(n)}$, em (bits/uso do canal) para canais DFC com $f_D T = 0,005$	27
3.4	Parâmetros do modelo QB para representar o DFC com $q = 1$	30
3.5	Parâmetros do modelo QB para representar o DFC com $q = 2$	30
5.1	Modelos QB para o DFC com $f_D T = 0,01, 0,005$, e $0,001$, com decisão abrupta ($q = 1$).	63
5.2	Modelos QB para um DFC com $f_D T = 0,005$, e decisão suave ($q = 2$).	63

LISTA DE FIGURAS

2.1	Canal Discreto com Desvanecimento (DFC).	9
2.2	Passo de quantização normalizado ótimo em função da SNR, para $q = 2, 3, 4$, com dados ajustados a funções exponenciais.	12
2.3	Uma fila de comprimento M .	18
2.4	Ilustração do processo de geração de ruído do modelo QBC.	19
3.1	$C^{(n)}$ em função do passo de quantização δ para diferentes valores de n ; DFC com $q = 2$, $f_D T = 0,005$, SNR = 10 dB.	26
3.2	Valores de α para o modelo QB usado para representar o DFC com SNR=10 dB, $q = 1$.	31
3.3	Segunda parcela da KLDR para modelos QB usados para representar o DFC com SNR=10 dB e $q = 1$.	31
3.4	Comparação das funções de autocorrelação: DFC com $f_D T = 0,005$, $q = 2$, SNR = 5 dB e $\delta = 0,4$, sobreposta às curvas do modelo NBNDC-QB.	32
3.5	Comparação das funções de autocorrelação: DFC com $f_D T = 0,005$, $q = 2$, SNR = 10 dB e $\delta = 0,2$, sobreposta às curvas do modelo NBNDC-QB.	33
3.6	Limitantes de capacidade: limitantes inferiores do DFC comparados ao limitantes inferiores e superiores do NBNDC-QB (com $n = 15$), para $q = 2$.	33
4.1	Grafo de Fatores.	36
4.2	Mensagens passadas em um grafo de fatores.	40
4.3	Mensagem enviada a partir de um nó de função.	41
4.4	Grafo de fatores utilizado para decodificar um código LDPC em um FSMC.	43
5.1	RDSL para o canal com desvanecimento Rayleigh com entrelaçamento perfeito (sem memória) com decisão suave, para códigos de taxa $r = \frac{1}{2}$.	54
5.2	RDSL para canais NBNDC-QB escolhidos fixando-se o coeficiente de correlação em $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,5$ $\alpha = 1$, para um código de taxa $r = \frac{1}{2}$ e $q = 1$.	55
5.3	RDSL para canais NBNDC-QB escolhidos fixando-se o coeficiente de correlação em $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,6$ $\alpha = 1$, para um código de taxa $r = \frac{1}{2}$ e $q = 1$.	56

5.4	RDSL para os canais NBNDQ-QB binários selecionados para representar o canal com desvanecimento Rayleigh, com $f_D T = 0,005$ e SNR=1 dB, para um código de taxa $r = \frac{1}{2}$	57
5.5	Diagrama em blocos da codificação LDPC e decodificação NBNDQ-QB. Caso o canal seja o NBNDQ-QB, tem-se o esquema QB-QB, e caso seja o DFC, tem-se o DFC-QB.	58
5.6	Desempenho obtido para a decodificação de um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$) nos canais BSC e DMC com $q = 2$ e modelos QB arbitrários com coeficiente de correlação fixado em 0,5, para $q = 1$ e $q = 2$ ($M = 2$ e $\alpha = 1$).	59
5.7	Diagrama em blocos do esquema DFC-BMNC.	60
5.8	Comparação entre as curvas de BER versus SNR obtidas para o BSC, DFC ($f_D T = 0,005, q = 1$) decodificado pelo esquema DFC-QB e seu esquema QB-QB equivalente, para um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$).	64
5.9	Comparação entre as curvas de BER versus SNR obtidas para o BSC, DFC ($f_D T = 0,005, q = 1$) decodificado por seu modelo NBNDQ-QB e BMNC, para um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$).	64
5.10	Comparação entre as curvas de BER obtidas para o BSC e para o DFC decodificado pelos modelos NBNDQ-QB apresentados na Tabela 5.1 para $f_D T = 0,01, 0,005, 0,001$, com $q = 1$, utilizando-se um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$).	65
5.11	Comparação entre as curvas de BER obtidas para o BSC, um DMC com $q = 2$ e um DFC ($f_D T = 0,01; 0,005$) decodificado por seu modelo NBNDQ-QB, com um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$).	65

LISTA DE SIGLAS

ASP Algoritmo Soma-Produto

AWGN Additive White Gaussian Noise

BMNC Block-Markov Noise Channel

BPSK Binary Phase-Shift Keying

BSC Binary Symmetric Channel

DFC Discrete Fading Channel

DMC Discrete Memoryless Channel

FSMC Finite-State Markov Channel

GEC Gilbert-Elliot Channel

LDPC Low-Density Parity-Check

LLR Log-Likelihood Ratio

MAP Maximum *a Posteriori* Probability

NBNDC-QB Non-binary Noise Discrete Channel com ruído Queue-Based

NBNDC Non-Binary Noise Discrete Channel

QBC Queue-Based Channel

QB Queue-Based

RDSL Rate-Distortion Shannon Limit

SNR Signal-to-Noise Ratio

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Existe uma crescente demanda por tecnologias de comunicações sem fio, tanto para comunicação por voz quanto para transmissão de dados, sem que haja a necessidade do usuário do serviço estar vinculado aos pontos de conexão cabeados, como ocorre na rede de telefonia fixa ou as redes DSL. Redes sem fio, tais como sistema de comunicação celular, sistemas de televisão digital e redes de dados sem fio (GPRS, WiMax, HSDPA, etc.) trazem a vantagem da mobilidade da estação receptora, que faz com que o usuário da rede possa utilizá-la onde quer que esteja, seja em lugares públicos abertos, dentro de prédios fechados ou em trânsito para seu local de trabalho.

Canais de comunicação sem fio são caracterizados por sofrer desvanecimento multi-percurso, tanto devido ao movimento do receptor com relação à estação transmissora, quanto à própria dinâmica dos objetos nas proximidades do receptor. Este movimento faz com que a intensidade do sinal recebido seja variável, e dependendo de quanto tempo o usuário permaneça nesta região, os erros de decodificação no sinal recebido ocorrerão em surtos, caracterizados por um grande número de símbolos consecutivos decodificados com erros. Este tipo de erro de recepção caracteriza um canal de comunicação em que os erros são correlacionados temporalmente, ou seja, um erro em um certo instante de recepção aumenta a

probabilidade de erro no futuro próximo. Devido a esta dependência estatística de amostras sucessivas do desvanecimento, tais canais são ditos apresentarem memória.

É comum o uso da técnica de entrelaçamento [1], para que símbolos transmitidos dentro de uma mesma palavra sejam afetados pelo desvanecimento do canal em instantes de tempo suficientemente distantes. Tais técnicas tornam possíveis aplicações em canais sem fio de técnicas clássicas desenvolvidas para proteção contra erros em canais sem memória. Porém, no uso desta técnica, há um desperdício na taxa de informação, pois sabe-se que canais com memória têm uma maior capacidade de canal que canais sem memória [2]. Além disso, o entrelaçamento necessita de uma quantidade de processamento de sinal relativamente alta para aplicações em tempo real, causando atrasos na comunicação.

Torna-se então evidente que a recepção de sinais através de canais com correlação temporal pode ser feita de maneira mais eficiente se a memória do canal for aproveitada no processo de decodificação, como por exemplo, para estimar o estado atual do canal a partir de seus estados anteriores e usar esta informação na métrica de decodificação. Porém, utilizar diretamente as estatísticas do canal sobre o qual se faz a comunicação pode ser bastante complicado, devido à complexidade matemática com que tais erros são gerados. Faz-se necessário então o modelamento de tais canais por modelos mais simples, tais como modelos markovianos, que são processos estocásticos que apresentam memória. Modelos markovianos para canais de comunicações vêm sendo utilizados desde o fim da década de 1950 [3, 4] quando Gilbert e Elliot estudavam ruídos em surto em canais de telefonia fixa, nos laboratórios da Bell. Pelo uso de um modelo simples com dois estados, o canal Gilbert-Elliot (GEC, do inglês *Gilbert-Elliot Channel*), pôde-se calcular a capacidade de tais canais e desempenho em termos de erros em tais canais. Tal modelo foi o primeiro de uma classe de canais markovianos denominada FSMC [5] (do inglês *Finite-State Markov Channel*), muito utilizada para modelamento de canais com memória. Desde

meados da década de 1990, modelos GEC, e outros modelos FSMC, tais como o canal de Fritchman [6] e o canal de contágio com memória finita [7], vêm sendo utilizados para modelar canais sem fio com desvanecimento plano.

1.1 Objeto do Estudo

Neste trabalho, será considerado um modelo de canal de entrada binária e saída 2^q -ária denominado NBND (do inglês *Non-Binary Noise Discrete Channel*) [8], que é útil para descrever a saída 2^q -ária de um canal com decisão suave como uma função explícita do processo de entrada e de um processo de ruído 2^q -ário (independente do processo de entrada). Este modelo será utilizado para representar um canal com desvanecimento Rayleigh e decisão suave, denominado de canal discreto com desvanecimento (DFC, do inglês *Discrete Fading Channel*), que consiste em um modulador de deslocamento de fase binário (BPSK, do inglês *Binary Phase-Shift Keying*), um canal com desvanecimento Rayleigh com correlação temporal e um demodulador coerente com decisão suave de q bits. Será provado que este canal é simétrico no sentido de que um processo de entrada de distribuição uniforme e sem memória maximiza a informação mútua de bloco entre entrada e saída. Como consequência, serão apresentados limitantes inferiores e superiores para a capacidade deste canal quando seu ruído é estacionário e ergódico (que corresponde a um processo de desvanecimento subjacente estacionário e ergódico). Também será avaliado numericamente o efeito dos parâmetros do quantizador e parâmetros de correlação do canal na capacidade do DFC. Os resultados de capacidade indicam que explicitar tanto a memória do canal como a informação da decisão suave é mais vantajoso que ignorar qualquer uma das duas por meio do entrelaçamento ou decisão abrupta.

O processo de ruído do DFC será modelado por um processo markoviano 2^q -ário denominado QB

(do inglês *Queue-Based*). Quando este modelo de ruído é acoplado ao NBND, tem-se um canal FSMC denominado NBND-QB, que é uma generalização do modelo QB apresentado em [10]. A fonte de ruído não binária é um processo estacionário ergódico markoviano de ordem M com $2^q + 2$ parâmetros independentes. Uma das vantagens deste modelo é que o número de parâmetros não depende do número de estados, enquanto em modelos FSMC sem estrutura o número de parâmetros cresce exponencialmente com o número de estados [12]. São estabelecidas expressões fechadas para diversas estatísticas do processo de ruído QB. Os parâmetros do processo QB são estabelecidos de forma a representar o DFC utilizando o critério da minimização da taxa de divergência de Kullback-Leibler entre as distribuições do DFC e do processo QB. A precisão do modelo é então medida comparando-se as curvas de autocorrelação e capacidade de canal. Obtém-se um bom ajuste para uma faixa ampla de condições de desvanecimento.

Existem classes de códigos corretores de erros, tais como o LDPC (do inglês *Low-Density Parity-Check*) e códigos turbo, para as quais se executa decodificação iterativa, atingindo taxas próximas à capacidade de canais sem memória [13]. Esquemas de decodificação iterativa operando em canais binários (entrada e saída binárias) com memória foram propostos em [14–17]. Nestes trabalhos, assume-se que o canal discreto (desde a entrada no modulador até a saída no demodulador de decisão abrupta) é modelado como canal FSMC e incorpora a estrutura do FSMC no processo de decodificação com o intuito de explorar a memória do canal. Foram observados ganhos de desempenho significativos em relação a esquemas tradicionais que ignoram a memória do canal por meio de entrelaçamento perfeito. Neste último caso, as taxas em que se pode fazer decodificação com probabilidade de erro tão pequena quanto se queira são menores que aquelas do canal original, uma vez que é conhecido que a memória aumenta a capacidade para uma ampla classe de canais estáveis em informação [10, 18]. Além disto,

mostrou-se recentemente que modelos FSMC binários aproximam bem canais com desvanecimento plano Rayleigh e Rice com decisão abrupta, como por exemplo em [11, 12, 19, 20, 24–26]. Por outro lado, estudos recentes revalaram que a informação não-binária na saída de canais com decisão suave pode elevar significativamente a capacidade quando comparada à quantização abrupta para diversas classes de canal, incluindo canais com desvanecimento Rayleigh entrelaçados e ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, do inglês *Additive White Gaussian Noise*) [27, 28].

Com a motivação dos resultados mencionados, será utilizado neste trabalho o modelo de canal NBNDQ-QB para projetar um esquema de decodificação LDPC do canal DFC. Uma vez que se tenha um modelo QB para o canal DFC, pode-se utilizar este decodificador com os parâmetros obtidos. Serão feitas comparações do desempenho obtido por este decodificador com decodificações efetuadas em um esquema em que o canal subjacente é o canal NBNDQ-QB e também com limitantes de Shannon para taxa de distorção.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 é apresentado um canal de comunicações discreto com modulação BPSK, desvanecimento Rayleigh e esquema de recepção com decisão suave, denominado de DFC. É proposto um modelo não-linear de ruído para este canal, denominado NBNDQ, e então é estabelecida uma fórmula para a capacidade de canais com memória. Apresenta-se um modelo Markoviano de geração de erros estatisticamente correlacionados denominado QB. São apresentadas expressões para as probabilidades conjuntas e função autocorrelação deste modelo.

No Capítulo 3 é feito um modelamento de canais DFC usando-se o modelo NBNDQ-QB pelo método da minimização da distância de Kullback-Leibler. São feitas então comparações das funções au-

tocorrelação e das capacidades de canal obtidas para os canais DFC modelados e dos modelos NBND-
QB como forma de verificação da precisão dos modelos propostos para caracterizar estatisticamente o
DFC. As principais contribuições deste trabalho estão contidas neste capítulo.

No Capítulo 4 é apresentado o algoritmo soma-produto (ASP) em forma vetorial e razão de verossi-
milhança, bem como sua aplicação em códigos LDPC para canais markovianos. O algoritmo será
então aplicado para desenvolver um decodificador para canais NBND-
QB. Será então apresentado o
conceito de limite de Shannon para a taxa de distorção (RDSL).

No Capítulo 5 são primeiramente calculados limitantes de Shannon para taxa de distorção do
NBND-
QB e para canais sem memória e com decisão suave. São então aplicados os algoritmos
de decodificação desenvolvidos para canais NBND-
QB. Os desempenhos obtidos na decodificação do
canal DFC são comparados com o desempenho da decodificação de canais NBND-
QB pelo mesmo
algoritmo e também com a decodificação de canais markovianos de bloco com probabilidades de ordem
 M iguais às do DFC.

No Capítulo 6 é feita uma conclusão sobre os resultados obtidos, bem como propostas para trabalhos
futuros dentro do tema exposto neste trabalho.

CAPÍTULO 2

O MODELO DE CANAL DISCRETO DE RUÍDO NÃO-BINÁRIO

Neste capítulo, é apresentado um modelo de canal discreto com desvanecimento plano e decisão suave, denominado DFC. Será apresentado então um modelo de canal com saída não-binária em que é possível representar o processo de saída do canal como uma função explícita do processo de entrada do canal e um processo de ruído independente da entrada. Este modelo servirá como representação alternativa do DFC. Então, um processo markoviano baseado em fila é apresentado, com o intuito de representar de maneira simples o processo de ruído do DFC. Diversas estatísticas deste processo são apresentadas em forma fechada.

2.1 Modelo de Clarke

O modelo isotrópico de Clarke é um modelo estatístico que caracteriza o campo eletromagnético recebido em uma estação móvel baseado em espalhamento. Assume-se que a antena do transmissor é fixa e tem polarização vertical [21]. O campo incidente no receptor é composto por ondas eletromagnéticas planas azimutais cujos ângulos de incidência são aleatórios e têm distribuição uniforme no plano

perpendicular à direção de propagação do campo elétrico. Assumindo que apenas a estação móvel está em movimento, todas as ondas incidentes na antena do receptor sofrerão um desvio Doppler dado por:

$$f_d = \frac{v}{c} f_c \cos \theta = f_D \cos \theta \quad (2.1)$$

em que f_d é o desvio Doppler, v é a velocidade da estação móvel, c é a velocidade da luz no vácuo, f_c é a frequência da portadora, f_D é a máxima frequência Doppler e θ é o ângulo entre o vetor de Poynting da onda e a direção de movimento da estação, modelado como uma variável aleatória uniforme no intervalo $[-\pi, \pi)$. A função de autocorrelação da resposta ao impulso em banda base do modelo de Clarke de variância unitária amostrado no tempo é dada por:

$$\phi_{hh}(mT) = J_0(2\pi m f_D T) \quad (2.2)$$

em que T é o período de amostragem e J_0 é a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem zero. Portanto, para quantificar o efeito do desvio Doppler, basta especificar a quantidade $f_D T$. Valores típicos do parâmetro $f_D T$ vão de 10^{-4} a 10^{-2} . Neste modelo, podem ser utilizadas diversas distribuições de probabilidade para a amplitude do sinal recebido. Uma distribuição típica que é utilizada no caso de propagação multipercuso sem componente de visada direta é a distribuição Rayleigh, dada por:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \geq 0. \quad (2.3)$$

2.2 Canal Discreto com Desvanecimento Demodulado com Decisão Suave

Neste trabalho, será usado um modelo de canal discreto com desvanecimento (DFC, do inglês *Discrete Fading Channel*) que apresenta correlação temporal. Este canal é composto por três partes: um modulador BPSK; um canal com desvanecimento plano Rayleigh com autocorrelação de Clarke e ruído

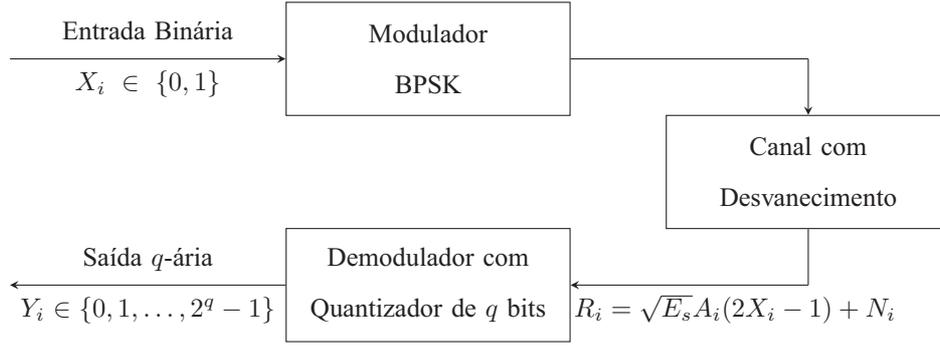


Figura 2.1: Canal Discreto com Desvanecimento (DFC).

aditivo gaussiano branco (AWGN); um demodulador coerente quantizado em q bits. O alfabeto de entrada do canal é definido como $\mathcal{X} = \{0, 1\}$, e o de saída $\mathcal{Y} = \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$. O canal DFC é apresentado na Figura 2.1.

Seja $\{X_k\}$, $X_k \in \mathcal{X}$, $k = 1, 2, \dots$ o processo de entrada do canal DFC. O símbolo recebido amostrado na saída do filtro casado da saída do canal no tempo de sinalização k pode ser escrito como:

$$R_k = \sqrt{E_s} A_k S_k + N_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

em que $\{S_k\} = \{(2X_k - 1)\}$, E_s é a energia do sinal transmitido e $\{N_k\}$ é uma sequência de símbolos de variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuídas, com média zero e variância $N_0/2$. $\{A_k\}$ é o ruído multiplicativo, constituído de um processo Rayleigh estacionário com correlação de Clarke, como definido na Seção 2.1. Os processos $\{A_k\}$ e $\{N_k\}$ são independentes entre si e do processo de entrada $\{X_k\}$. A variável aleatória amostrada R_k é então demodulada e quantizada com um quantizador de q bits que fornece a saída do canal $Y_k \in \mathcal{Y}$, de acordo com a seguinte operação:

$$Y_k = j, \quad \text{se } R_k \in (T'_{j-1}, T'_j)$$

para $j \in \mathcal{Y}$. Os limitantes T'_j são uniformemente espaçados com passo de quantização Δ , satis-

fazendo [29]:

$$T'_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } j = -1 \\ (j + 1 - 2^{q-1})\Delta, & \text{se } j = 0, 1, \dots, 2^q - 2 \\ \infty, & \text{se } j = 2^q - 1. \end{cases}$$

Definidos desta maneira, os limitantes finitos variam linearmente de $-2^{q-1}\Delta$ a $2^{q-1}\Delta$. Definem-se então $\delta \triangleq \Delta/\sqrt{E_s}$ e $T_j \triangleq T'_j/\sqrt{E_s}$ como sendo respectivamente o passo normalizado e os limitantes normalizados do quantizador. Desta forma, pode-se escrever $T_j = (j + 1 - 2^{q-1})\delta$, para $j = 0, 1, \dots, 2^q - 2$. A probabilidade condicional $q_{i,j}(a_k) \triangleq \mathbf{P}(Y_k = j \mid X_k = i, A_k = a_k)$, em que $i \in \mathcal{X}$, $j \in \mathcal{Y}$ e $a_k \in [0, \infty)$, é então determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_{i,j}(a_k) &= \mathbf{P}(T'_{j-1} < R_k < T'_j \mid X_k = i, A_k = a_k) \\ &= \mathbf{P}\left(T_{j-1} - (2i - 1)a_k < \frac{N_k}{\sqrt{E_s}} < T_j - (2i - 1)a_k\right) \\ &= Q\left(\sqrt{2\gamma}(T_{j-1} - (2i - 1)a_k)\right) - Q\left(\sqrt{2\gamma}(T_j - (2i - 1)a_k)\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que $i \in \mathcal{X}$, $j \in \mathcal{Y}$, $\gamma = E_s/N_0$ é a relação sinal ruído (SNR, do inglês *Signal-to-Noise Ratio*) do canal e a cauda da função gaussiana Q é definida como [22]:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt. \quad (2.5)$$

Devido à simetria da constelação BPSK e dos limitantes do quantizador, observa-se de (2.4) que:

$$q_{i,j}(a_k) = q_{1-i, 2^q-1-j}(a_k)$$

ou ainda

$$q_{i,j}(a_k) = q_{0, \frac{j-(2^q-1)i}{(-1)^i}}(a_k).$$

Seja $\mathbf{P}(y^n \mid x^n, a^n) \triangleq \mathbf{P}(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, A_1 = a_1, \dots, A_n = a_n)$,

para $n \geq 1$. Desta forma:

$$P(y^n | x^n, a^n) = \prod_{k=1}^n q_{x_k, y_k}(a_k) = \prod_{k=1}^n q_{0, \frac{y_k - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}}}(a_k). \quad (2.6)$$

A expressão (2.6) é válida, pois dada a sequência de ruído multiplicativo as probabilidades de transição tornam-se estatisticamente independentes. Desta maneira, a probabilidade condicional de ordem n do DFC é o valor esperado com relação à variável de desvanecimento a_k :

$$\begin{aligned} P_{\text{DFC}}^{(n)}(y^n | x^n) &\triangleq P(Y^n = y^n | X^n = x^n) \\ &= \mathbf{E}_{A_1 \dots A_n} \left[\prod_{k=1}^n q_{0, \frac{y_k - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}}}(A_k) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que $y^n = (y_1, \dots, y_n)$, $x^n = (x_1, \dots, x_n)$, e $\mathbf{E}_X[\cdot]$ é o valor esperado com respeito a uma variável

X . Para o caso específico de $n = 1$, obtém-se uma expressão fechada para $P_{\text{DFC}}^{(1)}(y|x)$ [33]:

$$P_{\text{DFC}}^{(1)}(j) = m(-T_{j-1}) - m(-T_j) \quad (2.8)$$

em que $j = \frac{y - (2^q - 1)x}{(-1)^x} \in \mathcal{Y}$,

$$m(T_j) = 1 - Q(T_j \sqrt{2\gamma}) - \frac{\left[1 - Q\left(\frac{T_j \sqrt{2\gamma}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma} + 1}}\right) \right] e^{-\frac{T_j^2}{(\frac{1}{\gamma} + 1)}}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma} + 1}}. \quad (2.9)$$

O valor esperado em (2.7) pode ser calculado analiticamente apenas para valores pequenos de n , pois a função densidade de probabilidade conjunta de variáveis aleatórias Rayleigh com correlação arbitrária é conhecida apenas para $n \leq 3$ [34, 35]; para $n > 3$, (2.7) pode ser determinado apenas por meio de simulações. Surge então a necessidade modelar o canal DFC por meio de um modelo preciso, de forma a se obterem estatísticas de ordem superior, bem como medidas de informação, com o intuito projetar esquemas de codificação de canal eficientes.

Em [27] foram calculados valores de passo δ ótimo em função da SNR, no sentido de maximizar a capacidade do canal DFC binário. Foi verificado que é possível ajustar funções exponenciais aos passos

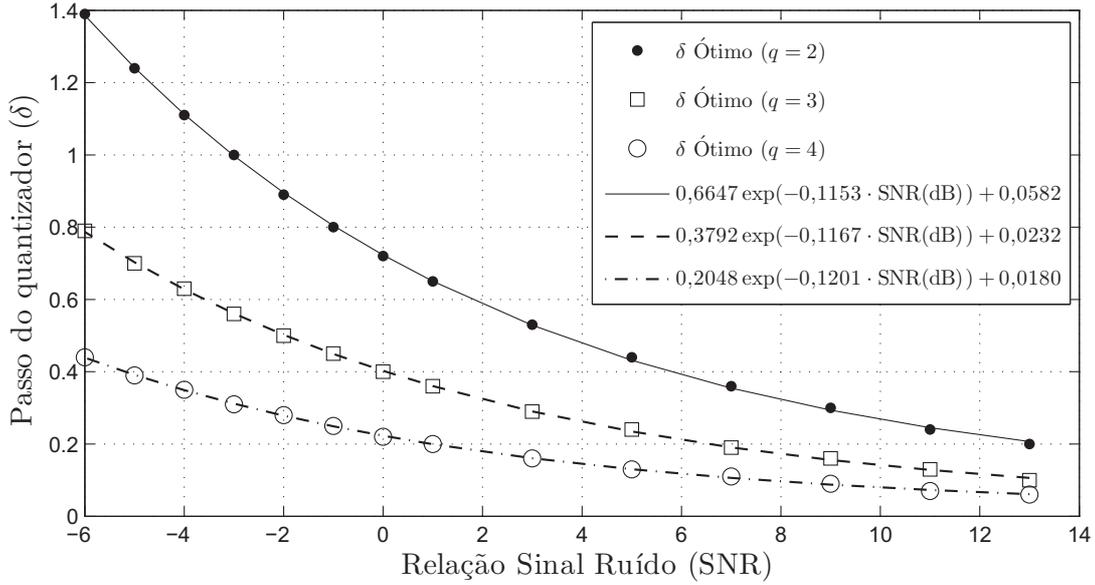


Figura 2.2: Passo de quantização normalizado ótimo em função da SNR, para $q = 2, 3, 4$, com dados ajustados a funções exponenciais.

de quantização calculados, para cada valor de q , com a SNR em dB, pelo método de minimização dos erros quadráticos. Os resultados estão dispostos na Figura 2.2.

2.3 Modelo Alternativo do DFC: O Canal Discreto de Ruído Não-Binário

É importante se ter uma expressão da saída $\{Y_k\}$ de um canal como uma função explícita do processo de entrada $\{X_k\}$ e do processo de ruído $\{Z_k\}$, em que $\{Z_k\}$ e $\{X_k\}$ são independentes entre si [36, pp. 142-144], de maneira que o ruído no canal possa ser tratado isoladamente. Neste caso, o processo de ruído pode ser modelado por um modelo markoviano de estados finitos independente da entrada do canal, o qual é uma ferramenta analítica importante para o projeto de códigos de canal e avaliação de desempenho para canais com memória. Considere-se um canal de entrada binária e saída 2^q -ária dado por:

$$Y_k = (2^q - 1)X_k + (-1)^{X_k} Z_k \quad (2.10)$$

para $k = 1, 2, \dots$. Refere-se ao canal descrito por (2.10) como o canal discreto de ruído não-binário (NBNDNC, do inglês *Non-Binary Noise Discrete Channel*), em que a saída $Y_k \in \mathcal{Y}$ é expressa explicitamente em termos da entrada $X_k \in \mathcal{X}$ e um ruído $Z_k \in \mathcal{Y}$. Assume-se que o processo de ruído $\{Z_k\}$ em (2.10) é independente da entrada $\{X_k\}$ e é governado por uma distribuição de ordem n $P_{\text{NBNDNC}}^{(n)}(z^n) \triangleq P_{\text{NBNDNC}}^{(n)}(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n)$, para $z_k \in \mathcal{Y}, k = 1, \dots, n$. Segue diretamente de (2.10) e do fato que os processos de entrada e de ruído são independentes que, para cada $n \geq 1$, a probabilidade condicional de ordem n do NBNDNC é dada por:

$$P_{\text{NBNDNC}}^{(n)}(y^n | x^n) = P_{\text{NBNDNC}}^{(n)}(z^n) \quad (2.11)$$

em que z^n é um vetor de erro cujas componentes são dadas por

$$z_k = \frac{y_k - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

Dados $x^n \in \mathcal{X}^n$ e $y^n \in \mathcal{Y}^n$, fazendo-se $P_{\text{NBNDNC}}^{(n)}(z^n)$ igual à expressão em (2.7), para todo $n \geq 1$, com cada z_k dado em (2.12), obtém-se $P_{\text{DFC}}^{(n)}(y^n | x^n) = P_{\text{NBNDNC}}^{(n)}(y^n | x^n)$, para todo $n \geq 1$. Desta maneira, o NBNDNC fornece uma representação alternativa do DFC. No caso especial em que $q = 1$ (demodulação por decisão abrupta), a expressão do DFC em (3.12) se reduz à conhecida expressão:

$$Y_k = X_k \oplus Z_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

em que \oplus denota adição módulo-2, a qual é largamente adotada para modelar canais discretos binários (entrada binária, saída binária) com memória [10, 20, 26]. Ademais, se $\{Z_k\}$ não possui memória, obtém-se o canal binário simétrico sem memória (BSC, do inglês *Binary Symmetric Channel*), que equivale ao canal DFC com decisão abrupta e entrelaçamento perfeito.

A capacidade do NBNDNC com ruído estacionário ergódico $\{Z_k\}$ será estudada na Seção 2.4.¹

¹Note-se que o ruído estacionário $\{Z_k\}$ definido em (2.11) e (2.7) é ergódico na média quando a função de covariância do processo de desvanecimento $\tilde{G}(t)$ tende a zero (tal como na função de covariância do processo Clarke).

2.4 Capacidade do Canal DFC

Considere-se o canal NBNDNC descrito por (2.10), em que o ruído $\{Z_k\}$ é estacionário e ergódico.

A capacidade de um canal estável em informação é dada por [39, 41]:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C^{(n)} = \sup_n C^{(n)} \quad (2.14)$$

em que

$$C^{(n)} \triangleq \max_{p(x^n)} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n).$$

O máximo em (2.14) é tomado com relação à distribuição de entrada $p(x^n)$ e $I(X^n; Y^n)$ é a informação mútua entre a entrada do canal X^n e sua saída Y^n , que é formulada como:

$$I(X^n; Y^n) = H(Y^n) - H(Y^n | X^n) = H(Y^n) - H(Z^n) \quad (2.15)$$

em que (2.15) segue de (2.10) e da independência de X^n e Z^n . Portanto:

$$C^{(n)} = \frac{1}{n} \left(\max_{p(x^n)} [H(Y^n)] - H(Z^n) \right). \quad (2.16)$$

Em seguida, será encontrada a distribuição de probabilidade $p(x^n)$ que maximiza $H(Y^n)$.

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{W} = \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$ e seja $\{W_k\}$, $W_k \in \mathcal{W}$ um processo com distribuição de probabilidade de ordem n dada por:*

$$P(W^n = w^n) = \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} P\left(Z^n = \frac{w^n - (2^q - 1)x^n}{(-1)^{x^n}}\right) \quad (2.17)$$

em que $Z^n = (w^n - (2^q - 1)x^n)/(-1)^{x^n}$ denota a n -upla obtida da operação em cada componente,

ou seja, $(Z_1 = (w_1 - (2^q - 1)x_1)/(-1)^{x_1}, \dots, Z_n = (w_n - (2^q - 1)x_n)/(-1)^{x_n})$.

A atribuição da probabilidade em (2.17) é válida, pois

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{z^n \in \mathcal{Y}^n} \mathbb{P}(Z^n = z^n) \\
&= \sum_{w^n \in \mathcal{W}^n} \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} \mathbb{P}\left(Z^n = \frac{w^n - (2^q - 1)x^n}{(-1)^{x^n}}\right) \\
&= \sum_{w^n \in \mathcal{W}^n} \mathbb{P}(W^n = w^n).
\end{aligned}$$

O processo $\{W_k\}$ é estacionário, uma vez que $\{Z_k\}$ é estacionário; de fato, para qualquer inteiro $m > 0$,

$w^n \in \mathcal{W}^n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_{1+m} = w_1, \dots, W_{n+m} = w_n) &= \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} \mathbb{P}\left(Z_{1+m} = \frac{w_1 - (2^q - 1)x_1}{(-1)^{x_1}}, \dots, Z_{n+m} = \frac{w_n - (2^q - 1)x_n}{(-1)^{x_n}}\right) \\
&= \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} \mathbb{P}\left(Z_1 = \frac{w_1 - (2^q - 1)x_1}{(-1)^{x_1}}, \dots, Z_n = \frac{w_n - (2^q - 1)x_n}{(-1)^{x_n}}\right) \\
&= \mathbb{P}(W_1 = w_1, \dots, W_n = w_n).
\end{aligned}$$

Segue diretamente da Definição 2.1 que as variáveis aleatórias Z_k e W_k estão relacionadas da seguinte maneira:

$$W_k = \min\{Z_k, 2^q - 1 - Z_k\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Exemplo 2.1. Seja $q = 2$, e $\alpha_j = P(Z_k = j)$. A distribuição de probabilidade de W_1 é dada por

$$(P(W_1 = 0), P(W_1 = 1)) = (\alpha_0 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2).$$

Seja $\alpha_{i,j} = P(Z_k = i, Z_{k+1} = j)$. A distribuição de probabilidade W^2 é dada por

$$\begin{aligned}
&(P(W^2 = 00), P(W^2 = 01), P(W^2 = 10), P(W^2 = 11)) \\
&= (\alpha_{0,0} + \alpha_{0,3} + \alpha_{3,0} + \alpha_{3,3}, \alpha_{0,1} + \alpha_{0,2} + \alpha_{3,1} + \alpha_{3,2}, \\
&\quad \alpha_{1,0} + \alpha_{1,3} + \alpha_{2,0} + \alpha_{2,3}, \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}).
\end{aligned}$$

Considere-se a matriz $2^n \times 2^{qn}$ de transição do canal NBNDP, dada por $\mathbf{Q}^n = [P_{\text{NBNDP}}^{(n)}(y^n | x^n)]$,

correspondente a n usos do canal, em que cada linha é indexada por uma sequência x^n e cada coluna é

indexada por uma sequência y^n . É provado no Apêndice B que \mathbf{Q}^n é simétrica, pois pode ser dividida em $2^{(q-1)n}$ sub-matrizes de dimensões $2^n \times 2^n$, com a propriedade de que suas colunas são permutações umas das outras, bem como suas linhas. Esta simetria implica que a uma distribuição de entrada uniforme em $\{0, 1\}^n$ maximiza a informação mútua de bloco $I(X^n; Y^n)$, e portanto a capacidade de canal é atingida [39, p. 94].

Proposição 2.1. *O valor de $H(Y^n)$ quando se utiliza uma entrada uniforme em $\mathcal{X}^n = \{0, 1\}^n$ é dado por:*

$$\max_{p(x^n)} [H(Y^n)] = n + H(W^n). \quad (2.19)$$

Demonstração: A entropia de Y^n é dada por

$$H(Y^n) = - \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} P(Y^n = y^n) \log_2 P(Y^n = y^n). \quad (2.20)$$

No caso de uma distribuição uniforme de X^n :

$$P(Y^n = y^n) = \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} P(X^n = x^n) P(Y^n = y^n | X^n = x^n) = \frac{1}{2^n} \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} P\left(Z^n = \frac{y^n - (2^q - 1)x^n}{(-1)^{x^n}}\right). \quad (2.21)$$

De acordo com a simetria de \mathbf{Q}^n , a probabilidade em (2.21) é a mesma para 2^n valores distintos de y^n .

Substituindo (2.21) em (2.20) e usando a Definição 2.1, tem-se:

$$\max_{p(x^n)} [H(Y^n)] = - \sum_{w^n \in \mathcal{W}^n} P(W^n = w^n) \log_2 \left(\frac{P(W^n = w^n)}{2^n} \right). \quad (2.22)$$

Desta maneira, (2.19) segue de (2.22). ■

O limitante inferior da capacidade dado em (2.16) é obtido substituindo (2.19) nesta expressão:

$$C^{(n)} = 1 + \frac{1}{n} [H(W^n) - H(Z^n)]. \quad (2.23)$$

Corolário 2.1. A capacidade de canal (2.14) é dada por:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} C^{(n)} \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [H(W^n) - H(Z^n)] \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$= 1 + \mathcal{H}(W) - \mathcal{H}(Z) \quad (2.25)$$

em bits/uso do canal, em que $\mathcal{H}(W) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)H(W^n)$ e $\mathcal{H}(Z) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)H(Z^n)$ denotam, respectivamente, as taxas de entropia de $\{W_n\}$ e $\{Z_n\}$.

Observação 2.1. No caso de demodulação com decisão abrupta ($q = 1$), a entropia $H(W^n)$ é nula para todo n , e a expressão para a capacidade de canal em (2.25) se reduz à conhecida expressão $C = 1 - \mathcal{H}(Z)$ [10].

2.5 O Ruído Markoviano Não-Binário Baseado em Fila

O canal binário baseado em fila (QBC, do inglês *Queue-Based Channel*) foi introduzido em [10] para modelar um canal binário com ruído aditivo ergódico estacionário markoviano de ordem M por meio de uma fila de comprimento finito. Será apresentada uma generalização desta fila binária para produzir um modelo de ruído markoviano não-binário a ser utilizado no NBNDC. O processo de ruído não binário baseado em fila (QB, do inglês *Queue-Based*) $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $Z_k \in \mathcal{Y}$, é gerado fazendo-se uma pequena alteração do procedimento baseado em duas parcelas apresentado em [10]:

- ▷ **A parcela 1** é uma fila de comprimento M que contém inicialmente M bolas rotuladas com variáveis $Z_k \in \mathcal{Y}$, $k = 1, 2, \dots, M$. Define-se A_{nk} como o rótulo da bola na posição k da fila após o n -ésimo experimento, como mostrado na Figura 2.3.
- ▷ **A parcela 2** é uma urna que contém um número muito grande de bolas, em que a proporção de bolas

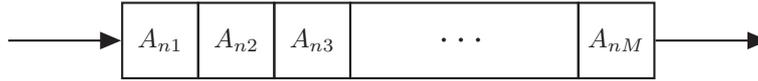


Figura 2.3: Uma fila de comprimento M .

rotuladas com uma variável z é ρ_z , em que $Z_k \in \mathcal{Y}$, $\rho > 0$ e $\sum \rho_z = 1$. Desta maneira, o número de graus de liberdade para ρ_z é $2^q - 1$.

Escolhe-se a parcela 1 (a fila) com probabilidade ε e a parcela 2 (a urna) com probabilidade $1 - \varepsilon$, em que $\varepsilon \in [0, 1)$. Em particular, se $\varepsilon = 0$, apenas a urna será escolhida e o ruído QB é um ruído 2^q -ário simétrico sem memória. O valor de $\varepsilon = 1$ é excluído, pois assim as células da fila poderiam ter todos os valores iguais, para n muito grande. Neste caso, o processo $\{S_k\}$ seria redutível, e portanto não ergódico.

O processo do ruído $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$ é então gerado da seguinte forma. Arremessa-se uma moeda viciada, em que $P(\text{cara}) = \varepsilon$, e escolhe-se a fila se a moeda der cara ou a urna se der coroa. Se a parcela 2 (a urna) for selecionada, retira-se aleatoriamente uma bola da urna e identifica-se o seu rótulo. Se a parcela 1 (a fila) for selecionada, o procedimento é determinado pelo comprimento da fila. Se $M \geq 2$, um ponteiro aponta para a bola na célula k com probabilidade $1/(M-1+\alpha)$, para $k = 1, 2, \dots, M-1$, e para a bola na célula M com probabilidade $\alpha/(M-1+\alpha)$. O rótulo da bola é então identificado pela indicação do ponteiro. Se $M = 1$, um ponteiro aponta para a bola na única célula da fila com probabilidade 1; neste caso, impõe-se $\alpha = 1$. Então, introduz-se na célula 1 da fila uma bola com o rótulo igual ao daquela selecionada de qualquer uma das duas parcelas. As bolas então deslocam-se na fila, expulsando a bola da posição M .

A Figura 2.4 ilustra a dinâmica do processo de ruído QB, em que os rótulos das bolas são também identificados pela coloração da bola, para facilitar a visualização. A bola preta representa o rótulo $z = 0$

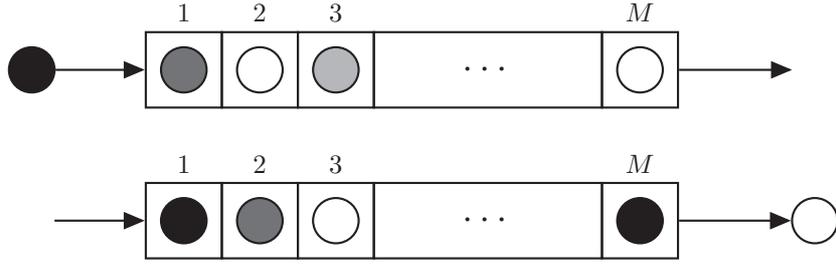


Figura 2.4: Ilustração do processo de geração de ruído do modelo QBC.

e a branca o rótulo $z = 2^q - 1$, com os rótulos intermediários variando gradualmente em uma escala de cinza.

Assim o ruído $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definido pelos rótulos das bolas selecionadas no n -ésimo experimento. O estado do canal no tempo n é definido por $\mathbf{S}_n \triangleq (Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{n-M+1})$, que é a M -upla 2^q -ária contida na fila após concluído o n -ésimo experimento, para $n \geq M$, de forma que o espaço de estado tem tamanho 2^{qM} . Pode-se verificar que o processo de geração do ruído QB é uma cadeia de Markov.

Seja $p_{\underline{i}\underline{j}}$ a probabilidade condicional de que $S_k = \underline{j}$, dado que $S_{k-1} = \underline{i}$, em que $\underline{i} = (i_0, \dots, i_{M-1})$, $\underline{j} = (j_0, \dots, j_{M-1})$, para $i_\ell, j_\ell \in \mathcal{Y}$, $\ell \in \{0, 1, \dots, M-1\}$. Se as linhas e colunas da matriz de probabilidade de transição $\mathbf{P} = [p_{\underline{i}\underline{j}}]$ são indexadas pelos vetores \underline{i} e \underline{j} , respectivamente, a entrada $(\underline{i}, \underline{j})$ desta matriz é dada por:

▷ Para $M = 1$,

$$p_{\underline{i}\underline{j}} = p_{i_0 j_0} = \varepsilon \delta_{j_0, i_0} + (1 - \varepsilon) \rho_{j_0}$$

em que

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

▷ Para $M \geq 2$,

$$p_{\underline{i}\underline{j}} = \begin{cases} \left(\sum_{\ell=0}^{M-2} \delta_{j_0, i_\ell} + \alpha \delta_{j_0, i_{M-1}} \right) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_{j_0}, & \text{se } j_{\ell+1} = i_\ell, \text{ para } \ell = 0, \dots, M-2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pode-se mostrar que a i -ésima componente do vetor de distribuição estacionária $\mathbf{\Pi} = [\pi_i]$ de estados do processo é dada por:

$$\pi_i = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \prod_{m=0}^{\xi_\ell-1} \left((1-\varepsilon)\rho_\ell + m \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^{M-1} \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)} \quad (2.26)$$

em que $\prod_{k=0}^{-1}(\cdot) \triangleq 1$ e $\xi_\ell \triangleq \sum_{k=0}^{M-1} \delta_{i_k, \ell}$. A probabilidade de bloco do ruído gerado pelo QB

$P_{\text{QB}}^{(n)}(z^n) \triangleq \mathbf{P}(Z^n = z^n)$ é então dada por:

▷ Para comprimento de bloco $n \leq M$

$$P_{\text{QB}}^{(n)}(z^n) = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \prod_{m=0}^{\xi'_\ell-1} \left((1-\varepsilon)\rho_\ell + m \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^{n-1} \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)} \quad (2.27)$$

em que $\xi'_\ell = \sum_{k=1}^n \delta_{z_k, \ell}$.

▷ Para comprimento de bloco $n \geq M+1$

$$P_{\text{QB}}^{(n)}(z^n) = \prod_{i=M+1}^n \left[\left(\sum_{\ell=i-M+1}^{i-1} \delta_{z_i, z_\ell} + \alpha \delta_{z_i, z_{i-M}} \right) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_{z_i} \right] \pi_{(z_1, \dots, z_M)} \quad (2.28)$$

em que a expressão de $\pi_{(z_1, \dots, z_M)}$ é dada por (2.26).

O coeficiente de correlação do ruído QB é uma quantidade não-negativa deduzida diretamente de (2.27),

que é dada por:

$$\text{Cor}_{\text{QB}} = \frac{\mathbf{E}[Z_k Z_{k+1}] - \mathbf{E}[Z_k]^2}{\text{Var}(Z_k)} = \frac{\frac{\varepsilon}{M-1+\alpha}}{1 - (M-2+\alpha) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha}} \quad (2.29)$$

em que $\text{Var}(Z_k)$ denota a variância de Z_k . No Apêndice A, mostra-se que a expressão para a função de autocorrelação do ruído QB, definida por $R[m] = \mathbf{E}[Z_k Z_{k+m}]$, satisfaz:

$$R_{\text{QB}}[m] = \begin{cases} \mathbf{E}[Z_k^2], & \text{se } m = 0 \\ \frac{1}{1 - \frac{(M-2+\alpha)\varepsilon}{M-1+\alpha}} \left[\frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \mathbf{E}[Z_k^2] + (1-\varepsilon)\mathbf{E}[Z_k]^2 \right], & \text{se } 1 \leq m \leq M-1 \\ (1-\varepsilon)\mathbf{E}[Z_k]^2 + \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \left[\sum_{i=1}^{M-1} R_{\text{QB}}[m-1] + \alpha R_{\text{QB}}[m-M] \right], & \text{se } m \geq M. \end{cases} \quad (2.30)$$

Sejam $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2^q-1}$ inteiros não negativos tais que $\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{2^q-1} = M-1$ e uma distribuição de probabilidades Γ_i , com $i = 0, \dots, 2^q-1$, dada por:

$$\Gamma_i = \left(\frac{\omega_0 \varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_0, \dots, \frac{(\omega_i + \alpha)\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_i, \dots, \frac{\omega_{2^q-1} \varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_{2^q-1} \right). \quad (2.31)$$

Para o caso com decisão abrupta, ou seja, com $q = 1$ a capacidade do canal NBNDQ-QB tem uma fórmula exata dada por [37]:

$$C_{\text{QBC}} = 1 - \mathcal{H}_{\text{QBC}}(Z) \quad (2.32)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{QBC}}(Z) &= \sum_{\omega_0}^{M-1} \cdots \sum_{\omega_{2^q-1}}^{M-1} \binom{M-1}{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2^q-1}} \times \\ &\times \left[L_{(\omega_0+1, \omega_1, \dots, \omega_{2^q-1})} H(\Gamma_0) + L_{(\omega_0, \omega_1+1, \dots, \omega_{2^q-1})} H(\Gamma_1) + \cdots + \right. \\ &\left. + L_{(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2^q-1}+1)} H(\Gamma_{2^q-1}) \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

e

$$L_{(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2^q-1})} = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \left(\prod_{m=0}^{\omega_\ell-1} (1-\varepsilon)\rho_\ell + m \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^{M-1} \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}. \quad (2.34)$$

É possível definir um canal com entrada X_k binária e saída Y_k 2^q -ária relacionadas pela equação (2.10), em que o ruído Z_k é definido pelo processo QB. Este canal é denominado NBNDQ-QB.

2.6 O Canal com Ruído Markoviano de Bloco

Define-se o canal com ruído markoviano de bloco (BMNC, do inglês *Block-Markov Noise Channel*) como um canal markoviano discreto em que as magnitudes de erro que ocorrem no tempo n têm dependência estatística das magnitudes dos erros que afetaram os últimos M símbolos recebidos. O processo de erro neste canal é markoviano de ordem M com estados dados por $s_n = (z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_{n-M})$. Por simplicidade, suprime-se a variável n da especificação do estado e este será denotado por $z^M = (z_1, z_2, \dots, z_M)$. As probabilidades de transição do BMNC podem ser calculadas das suas probabilidades conjuntas de ordem $M + 1$ da seguinte maneira:

$$P_{BMNC}(s_{n+1} = z^M | s_n = v^M) = \begin{cases} \frac{P_{BMNC}(z_1, \dots, z_M, v_M)}{P_{BMNC}(v^M)}, & \text{se } z_{i+1} = v_i, i = 1, \dots, M - 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.35)$$

Note-se que a distribuição de probabilidade conjunta de ordem M do BMNC pode ser calculada através da marginalização em relação a z_{M+1} da sua distribuição de probabilidade de ordem $(M + 1)$. A partir de (2.35), pode-se também calcular a probabilidade de erro em um dado estado, uma vez que a sequência de estados é definida pelas magnitudes de erro que ocorrem no canal:

$$P_{BMNC}(z_n = i | s_n = z^M) = P_{BMNC}(s_{n+1} = (i, z_1, \dots, z_{M-1}) | s_n = z^M). \quad (2.36)$$

O vetor estacionário $\Pi = [\pi_{z^M}]$ é também calculado diretamente através desta marginalização:

$$\pi_{z^M} = P_{BMNC}(Z^M = z^M), \quad \text{para todo } z^M \in \mathcal{Y}^M \quad (2.37)$$

o que significa que toda a informação necessária para especificar um BMNC é sua distribuição de probabilidade de ordem $(M + 1)$.

Se for imposto que $P_{BMNC}(z^M) = P_{DFC}(z^M)$, tem-se uma aproximação de memória finita do DFC. Neste caso, todas as probabilidades conjuntas do BMNC até a ordem M são iguais às do DFC. É razoável assumir-se que esta é a melhor aproximação que se pode ter do DFC através de um BMNC. Além disso, espera-se que o modelamento do NBNDQ para aproximar o DFC deverá ser menos preciso em relação à abordagem do BMNC. No entanto, o NBNDQ tem a vantagem de que é necessário que se armazenem apenas $2^q + 2$ parâmetros para representar um dado DFC, enquanto no modelo BMNC, 2^{qM} probabilidades conjuntas têm que ser armazenadas.

CAPÍTULO 3

MODELAMENTO DO CANAL DFC POR MEIO DO NBNDC-QB

Neste capítulo, o ruído gerado pelo DFC será modelado pelo uso do ruído tipo QB apresentado na Seção 2.5. Inicialmente, serão feitos cálculos de capacidade de canais DFC para duas frequências Doppler normalizadas do canal e três valores de SNR. Será feito então um modelamento baseado na minimização de divergência entre distribuições de probabilidade dos modelos DFC e QB. Serão comparadas as curvas de autocorrelação do canal DFC e dos respectivos modelos QB, bem como os valores de capacidade de canal, como mais uma forma de apoio aos modelos escolhidos.

3.1 Cálculos de Capacidade de Canais DFC

Uma vez que não há expressão analítica fechada para a capacidade do canal DFC apresentado na Seção 2.2, foi feito um estudo de limitantes inferiores da capacidade destes canais por meio de simulação. Para tanto, é necessária a geração de uma sequência de ruído $\{Z_k\}$, para o cálculo de probabilidades conjuntas desta sequência para o DFC. Tal sequência é gerada por um método semi-analítico, no qual uma sequência de desvanecimento Rayleigh é gerada pelo método de soma de senóides [23] e

quantizada em níveis com distribuição de probabilidade dada por (2.9). A probabilidade conjunta de um bloco de ruído é estimada de acordo com (2.7), em que o valor esperado é calculado de acordo com a frequência relativa de ocorrência de blocos de ruído na simulação.

Uma vez que se tem as probabilidades conjuntas de $\{Z_k\}$ para o DFC, calculam-se as probabilidades conjuntas da sequência associada $\{W_k\}$ pelo uso de (2.18). Os limitantes inferiores $C^{(n)}$ para a capacidade do DFC são então calculados pelo uso de (2.23).

Foram feitos cálculos de $C^{(n)}$ para canais com $f_{DT} = 0,01$ e $f_{DT} = 0,005$, com SNR valendo 2 dB, 5 dB e 10 dB, em todos os casos com quatro níveis de quantização, ou seja, $q = 2$. Para cada frequência normalizada e SNR fixados, a capacidade foi calculada variando-se o passo normalizado do quantizador δ , a fim de se verificar qual valor maximiza a capacidade de cada canal DFC. Foram obtidas curvas de $C^{(n)}$ para vários valores de n e observou-se que há um ganho de capacidade conforme n aumenta. Este resultado está condizente com o resultado teórico de que a capacidade de canal cresce com o aumento da memória do canal [2], se todos os parâmetros do canal são fixados. Um exemplo de um destes gráficos é mostrado na Figura 3.1.

A partir dos resultados obtidos para $C^{(n)}$, foram verificados valores de n a partir dos quais os valores de capacidade têm incrementos menores ou da ordem de 5×10^{-3} , pois o ganho que se tem no valor do limitante sobre capacidade passa a ser pouco representativo para valores inferiores a este. O valor de n que satisfaz este critério é denominado n^* . Pode-se também obter a partir dos gráficos os valores de capacidade para canais com decisão abrupta ($q = 1$), pois este canal equivale a um canal com decisão suave com $\delta = 0$. Além disso, têm-se também valores da capacidade para o canal DFC sem memória, ou DMC (do inglês, *Discrete Memoryless Channel*), extraídos de $C^{(1)}$. Os resultados para o canal DMC estão resumidos na Tabela 3.1, com valores de capacidade que aproximam bem os

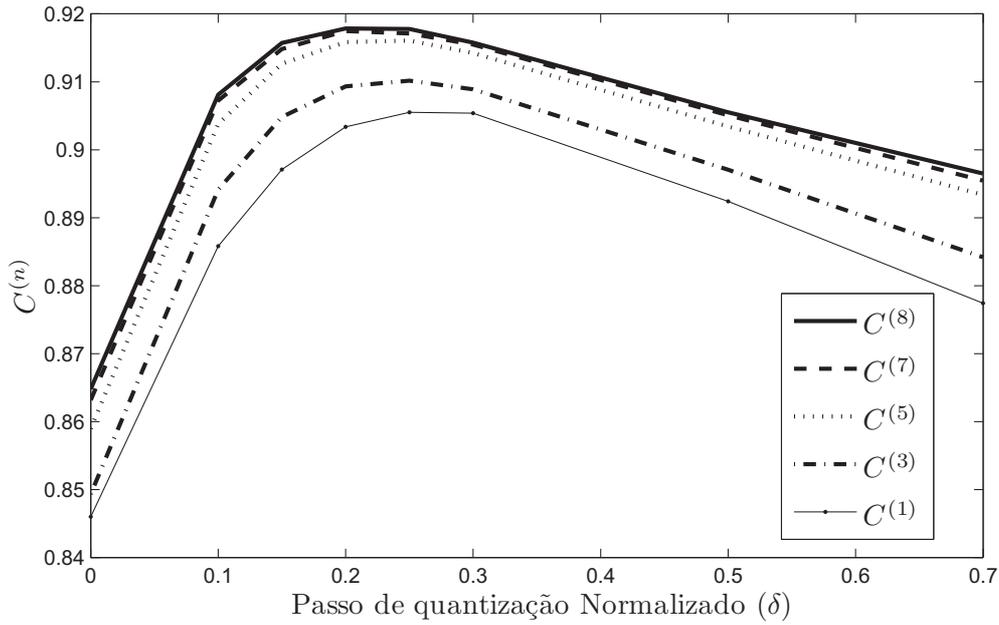


Figura 3.1: $C^{(n)}$ em função do passo de quantização δ para diferentes valores de n ; DFC com $q = 2$, $f_D T = 0,005$, SNR = 10 dB.

Tabela 3.1: Capacidades do canal DMC em (bits/uso do canal) com decisão abrupta ($q = 1$) e suave com $q = 2$.

SNR	$q = 1$	$q = 2$	
	C	C	δ ótimo
2 dB	0,5125	0,6113	0,5
5 dB	0,6643	0,7564	0,4
10 dB	0,8457	0,9057	0,2
15 dB	0,9348	0,9649	0,12

valores obtidos teoricamente em [29]. Também são mostrados os valores de $C^{(n)}$ para $f_D T = 0,01$ na Tabela 3.2 e para $f_D T = 0,005$ na Tabela 3.3. Nos dois casos são observados um ganho de capacidade e uma diminuição do valor do δ ótimo com relação ao canal DMC. Novamente, o ganho de capacidade se justifica devido ao aumento de memória do canal, que cresce conforme a frequência Doppler do canal é reduzida, devido ao decaimento mais lento da função autocorrelação do processo de desvanecimento.

Tabela 3.2: Limitantes inferiores para a capacidade de canal, $C^{(n)}$, em (bits/uso do canal) para canais DFC com $f_D T = 0,01$.

SNR	n^*	$q = 1$	$q = 2$	
		$C^{(n^*)}$	$C^{(n^*)}$	δ ótimo
2 dB	7	0,5331	0,6458	0,5
5 dB	5	0,6813	0,7749	0,4
10 dB	5	0,8585	0,9150	0,2
15 dB	2	0,9371	0,9676	0,12

Tabela 3.3: Limitantes inferiores para a capacidade de canal, $C^{(n)}$, em (bits/uso do canal) para canais DFC com $f_D T = 0,005$.

SNR	n^*	$q = 1$	$q = 2$	
		$C^{(n^*)}$	$C^{(n^*)}$	δ ótimo
2 dB	11	0,54	0,64	0,5
5 dB	10	0,689	0,78	0,4
10 dB	7	0,86	0,915	0,2
15 dB	3	0,939	0,969	0,12

3.2 Modelamento do DFC por meio do QB

Dadas duas distribuições de probabilidade, estabelece-se uma medida denominada Distância de Kullback-Leibler [2], ou simplesmente divergência, definida como:

$$D(p||q) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{X^n} p(X^n) \log \frac{p(X^n)}{q(X^n)}. \quad (3.1)$$

Pode-se demonstrar que esta é uma quantidade não-negativa e se anula apenas se $p(X^n) = q(X^n)$, $\forall n$.

No entanto, esta medida não é de fato uma distância, pois não é simétrica e não satisfaz a desigualdade triangular. Ainda assim, a divergência mede o quão bem a distribuição $q(X^n)$ aproxima a distribuição $p(X^n)$. Pode-se mostrar que, como o processo de erro do DFC é estacionário e o ruído QB é um

processo markoviano de memória M , (3.1) pode ser reescrita como [42]:

$$D(P_{\text{DFC}}||P_{\text{QB}}) = -\mathcal{H}(P_{\text{DFC}}) - \sum_{z^{M+1}} P_{\text{DFC}}^{(M+1)}(z^{M+1}) \log_2 P_{\text{QB}}(z_{M+1} | z^M) \quad (3.2)$$

em que $\mathcal{H}(P_{\text{DFC}}) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} H(P_{\text{DFC}}^n)$ é a taxa de entropia do processo P_{DFC} . Portanto, para que o modelo NBNDC-QB represente bem o canal DFC, foi minimizada a quantidade em (3.2). Foram utilizados processos de ruído QB variando-se o tamanho da fila M , e em cada caso determinando-se uma tripla (M, ε, α) . Estes parâmetros devem satisfazer as seguintes restrições:

$$\rho_j = P_{\text{DFC}}^{(1)}(j) \quad (3.3)$$

$$\text{Cor}_{\text{NBNDC}} = \text{Cor}_{\text{DFC}}. \quad (3.4)$$

Os valores das probabilidades de primeira ordem em (3.3) são calculados diretamente utilizando-se (2.8). A partir da expressão para o coeficiente de correlação em (2.29) e de (3.4), pode-se obter o parâmetro α em função de ε :

$$\alpha(\varepsilon, M) = \frac{\varepsilon + \text{Cor}_{\text{DFC}}(1 - M) + \text{Cor}_{\text{DFC}}(M - 2)\varepsilon}{\text{Cor}_{\text{DFC}}(1 - \varepsilon)}. \quad (3.5)$$

O valor de ε é determinado minimizando-se a divergência para cada valor de M , com a restrição do parâmetro α dada em (3.5). As probabilidades de ordem $M + 1$ do DFC são obtidas por simulação, usando-se o mesmo método utilizado para o cálculo de probabilidades de ordem n no cálculo da capacidade do canal DFC descrito na Seção 3.1. Como $\mathcal{H}(P_{\text{DFC}})$ é independente dos parâmetros do QB, é necessário apenas minimizar a segunda parcela de (3.2), que é dada por:

$$D_2^M(P_{\text{DFC}}||P_{\text{QB}}) \triangleq - \sum_{z^{M+1}} P_{\text{DFC}}^{(M+1)}(z^{M+1}) \log_2 P_{\text{QB}}(z_{M+1} | z^M) \quad (3.6)$$

em que

$$P_{\text{QB}}(z_{M+1} | z^M) = \frac{P_{\text{QB}}(z_{M+1})}{P_{\text{QB}}(z^M)} \left(\sum_{\ell=2}^M \delta_{z_{M+1}, z_\ell} + \alpha \delta_{z_{M+1}, z_1} \right) \frac{\varepsilon}{M - 1 + \alpha} + (1 - \varepsilon) \rho_{z_{M+1}}. \quad (3.7)$$

Um problema é ainda determinar o valor do comprimento da fila M que melhor aproxime o DFC. Em simulações, observa-se que $D_2^M(P_{\text{DFC}}||P_{\text{QB}})$ em geral tem um mínimo local com relação a M . Observa-se também que o parâmetro α tende a valer zero para valores de M acima de um determinado limiar. Seleciona-se, portanto, o valor M^* para melhor representar o modelo DFC como aquele que satisfaz:

$$M = \min_{M^*} \{M^* : \alpha = 0 \forall M > M^* \text{ ou } D_2^{M^*+1} > D_2^{M^*}\}. \quad (3.8)$$

Os resultados dos modelamentos mostram que frequentemente tanto o critério de $\alpha = 0$ e o mínimo local de D_2^M ocorrem para o mesmo valor de M , o que corrobora a validade do critério proposto. Além disto, o valor de α se anular significa que o valor de M é maior que o necessário, pois neste caso apenas estarão envolvidas $M - 1$ células na fila. As Tabelas 3.4 e 3.5 indicam os parâmetros dos modelos QB que representam os canais DFC estudados, obtidos pelo uso do critério em 3.8. A Figura 3.2 ilustra o critério do anulamento do parâmetro α em função de M para o caso $f_D T = 0,005$ e $\text{SNR} = 10$ dB. Na Figura 3.3, são mostrados exemplos de gráficos obtidos para $D_2^M(P_{\text{DFC}}||P_{\text{QB}})$ em função do comprimento do fila M . Observe, por exemplo, que para $f_D T = 0,005$, o valor de α cai a zero para $M \geq 7$, e segundo este critério, o valor selecionado é $M = 6$ (este resultado é mostrado na Tabela 3.4).

Observa-se que os valores de M obtidos para modelar os canais DFC decrescem com o aumento da SNR, bem como com o crescimento da frequência normalizada do canal. Isto se justifica pelo fato de o canal apresentar uma menor memória nestes casos.

As Figuras 3.4 e 3.5 apresentam curvas da função autocorrelação dos canais DFC simulados dos modelos NBND-FC-QB que minimizam a divergência entre os dois canais para diversos valores de M , para os casos $\text{SNR} = 5\text{dB}$ e $\text{SNR} = 10\text{dB}$, respectivamente, com $f_D T = 0,005$, $q = 2$. Os gráficos de autocorrelação do ruído QB foram obtidos a partir de (2.30). De acordo com a Tabela 3.5, o modelo

Tabela 3.4: Parâmetros do modelo QB para representar o DFC com $q = 1$.

SNR	ρ_0	ρ_1	$f_D T = 0,001$	$f_D T = 0,005$	$f_D T = 0,01$
2 dB	0,8915	0,1085	$M = 20$ $\varepsilon = 0,7401$ $\alpha = 0,8824$	$M = 17$ $\varepsilon = 0,7032$ $\alpha = 0,5480$	$M = 11$ $\varepsilon = 0,5996$ $\alpha = 0,4730$
5 dB	0,9358	0,0642	$M = 20$ $\varepsilon = 0,7746$ $\alpha = 0,7415$	$M = 12$ $\varepsilon = 0,6663$ $\alpha = 0,5536$	$M = 9$ $\varepsilon = 0,5920$ $\alpha = 0,4249$
10 dB	0,9267	0,0233	$M = 11$ $\varepsilon = 0,6848$ $\alpha = 0,7046$	$M = 6$ $\varepsilon = 0,5317$ $\alpha = 0,5903$	$M = 4$ $\varepsilon = 0,4127$ $\alpha = 0,5413$
15 dB	0,9923	0,0077	$M = 8$ $\varepsilon = 0,6210$ $\alpha = 0,6656$	$M = 4$ $\varepsilon = 0,4296$ $\alpha = 0,5359$	$M = 3$ $\varepsilon = 0,3302$ $\alpha = 0,4491$

Tabela 3.5: Parâmetros do modelo QB para representar o DFC com $q = 2$.

SNR	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	$f_D T = 0,001$	$f_D T = 0,005$	$f_D T = 0,01$
2 dB ($\delta = 0,5$)	0,6953	0,1962	0,0850	0,0235	$M > 14$	$M = 13$ $\varepsilon = 0,7845$ $\alpha = 0,6106$	$M = 10$ $\varepsilon = 0,7315$ $\alpha = 0,4775$
5 dB ($\delta = 0,4$)	0,7822	0,1536	0,0538	0,0103	$M > 14$	$M = 12$ $\varepsilon = 0,8261$ $\alpha = 0,5758$	$M = 9$ $\varepsilon = 0,7735$ $\alpha = 0,4359$
10 dB ($\delta = 0,2$)	0,9239	0,0528	0,0187	0,0045	$M = 12$ $\varepsilon = 0,8469$ $\alpha = 0,6330$	$M = 7$ $\varepsilon = 0,7543$ $\alpha = 0,4927$	$M = 6$ $\varepsilon = 0,7155$ $\alpha = 0,4066$
15 dB ($\delta = 0,12$)	0,9722	0,0201	0,0064	0,0013	$M = 10$ $\varepsilon = 0,8396$ $\alpha = 0,5940$	$M = 5$ $\varepsilon = 0,7037$ $\alpha = 0,4283$	$M = 4$ $\varepsilon = 0,6354$ $\alpha = 0,3461$

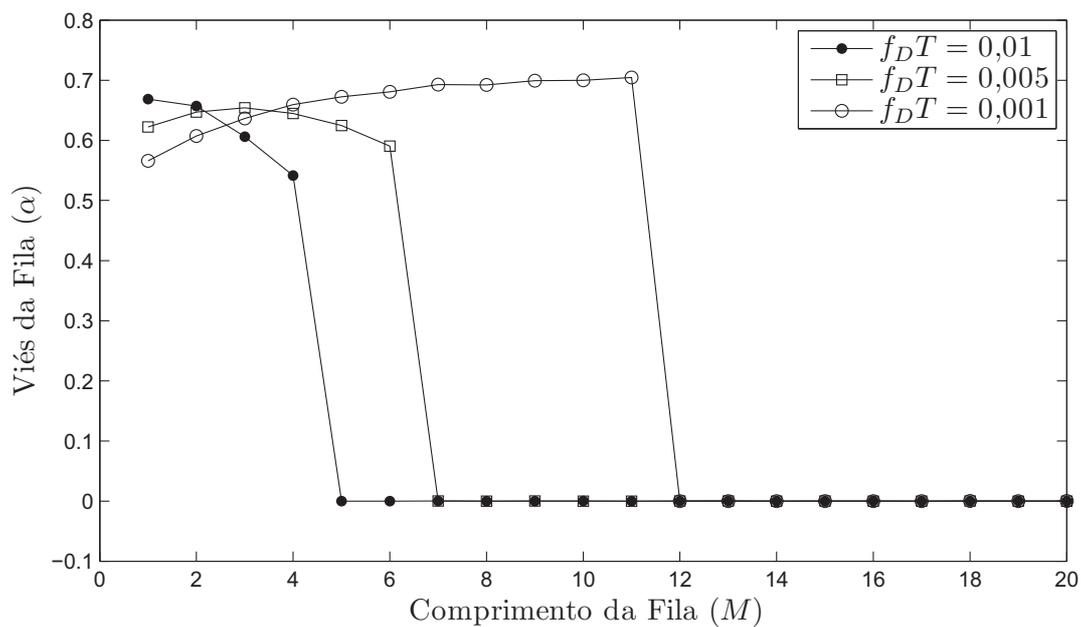


Figura 3.2: Valores de α para o modelo QB usado para representar o DFC com SNR=10 dB, $q = 1$.

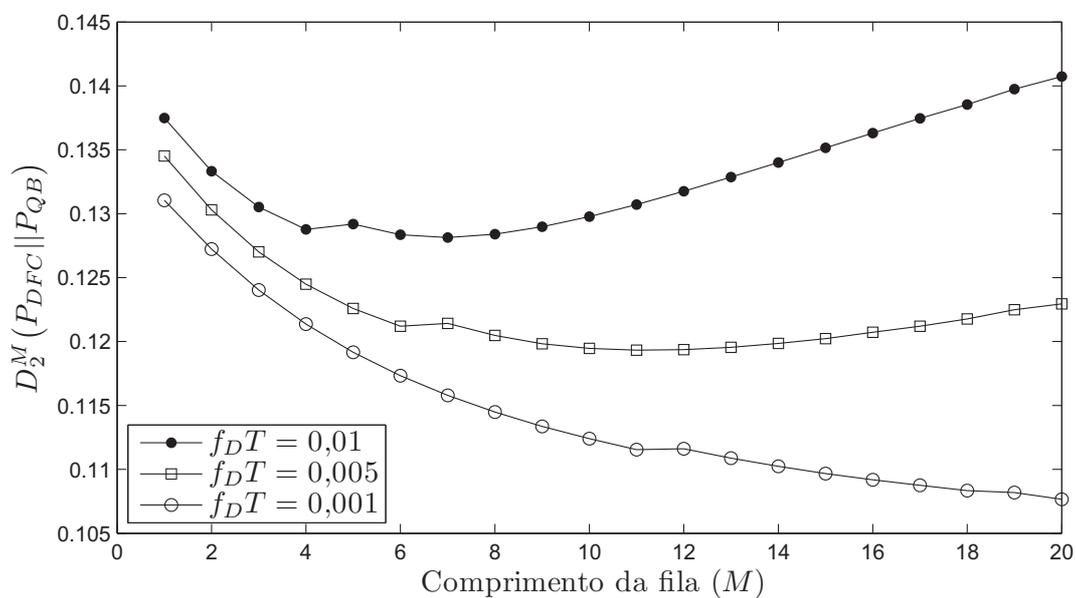


Figura 3.3: Segunda parcela da KLDR para modelos QB usados para representar o DFC com SNR=10 dB e $q = 1$.

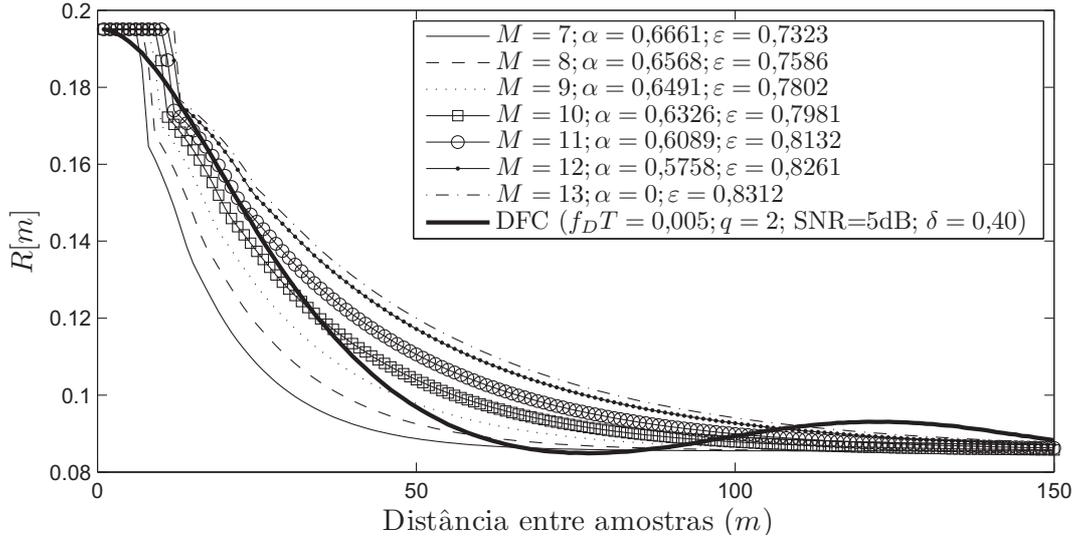


Figura 3.4: Comparação das funções de autocorrelação: DFC com $f_D T = 0,005$, $q = 2$, $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$ e $\delta = 0,4$, sobreposta às curvas do modelo NBNDC-QB.

escolhido para representar o DFC com $\text{SNR} = 10\text{dB}$ é aquele com $M = 7$. Para este valor de M , a Figura 3.5 mostra uma proximidade da curva de autocorrelação do DFC e do NBNDC-QB. Portanto, observa-se que a função de autocorrelação do ruído QB, quando comparada à do DFC, pode ser usada como mais um parâmetro de suporte à decisão pelo modelo escolhido. Por sua vez, na Figura 3.4, observa-se que a função de autocorrelação do DFC apresenta oscilações de maior amplitude em relação à Figura 3.5, devido ao seu menor valor de SNR. Neste caso, o modelo selecionado pelo critério em (3.8) é aquele com $M = 12$. O modelo não consegue capturar tais oscilações, devido ao seu decaimento seguir uma tendência exponencial.

A Figura 3.6 apresenta um comparativo entre as capacidades dos canais DFC e os respectivos modelos NBNDC-QB escolhidos. Os limitantes inferiores das capacidades do NBNDC-QB são calculados teoricamente pelo uso de (2.23) com as probabilidades conjuntas dadas em (2.27) e (2.28). Os valores de capacidade estão relativamente próximos, estando sempre as capacidades do QB acima das do DFC.

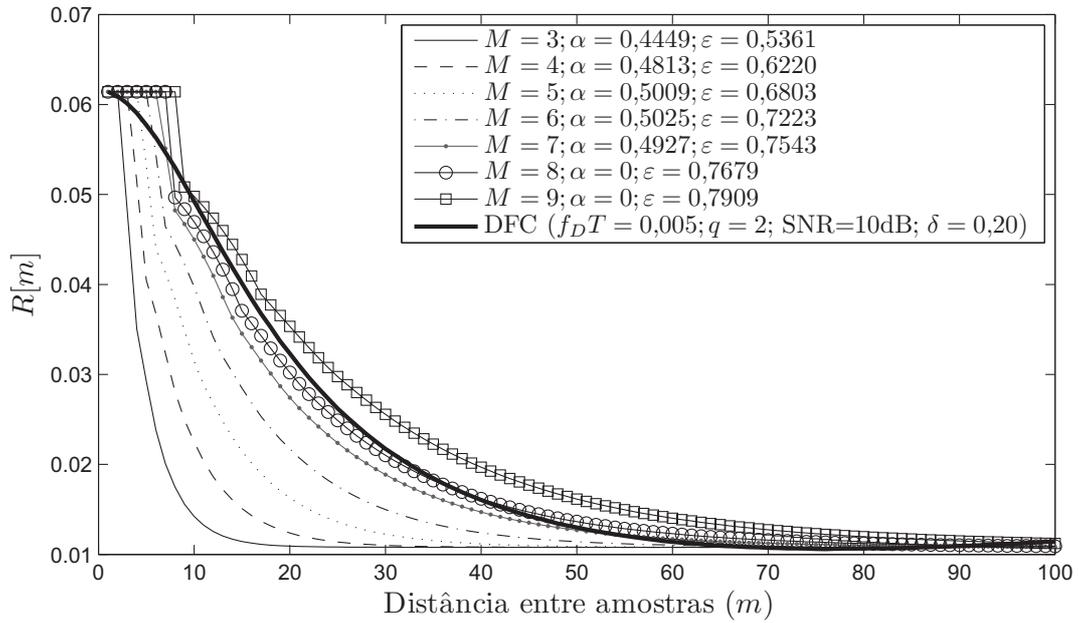


Figura 3.5: Comparação das funções de autocorrelação: DFC com $f_D T = 0,005$, $q = 2$, $\text{SNR} = 10$ dB e $\delta = 0,2$, sobreposta às curvas do modelo NBND-CQB.

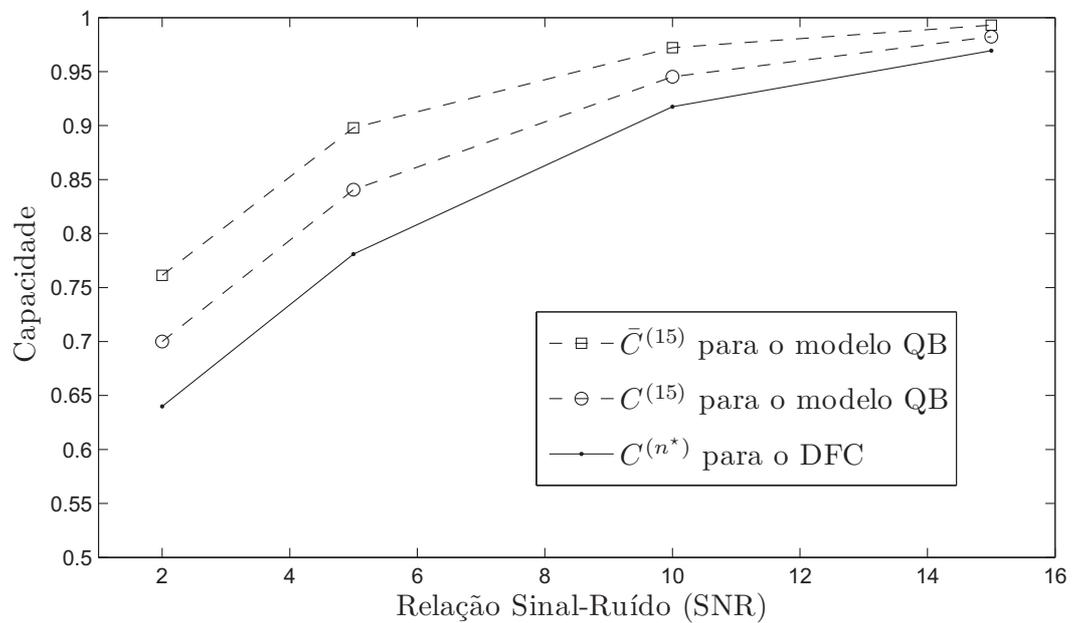


Figura 3.6: Limitantes de capacidade: limitantes inferiores do DFC comparados aos limitantes inferiores e superiores do NBND-CQB (com $n = 15$), para $q = 2$.

CAPÍTULO 4

CÓDIGOS LDPC APLICADOS A CANAIS MARKOVIANOS

Neste capítulo, serão apresentados o conceito de grafos de fatores e o algoritmo soma-produto (ASP), bem como sua aplicação na decodificação da classe de códigos corretores de erro LDPC.

O ASP é um algoritmo de passagem de mensagens, que é executado em um grafo de fatores com o objetivo de calcular funções marginais associadas a uma função global. Apesar da ideia por trás deste algoritmo ser simples, sua aplicação é bastante extensa, passando por áreas como inteligência artificial, processamento de sinais e comunicação digital.

Será apresentado primeiramente o ASP para decodificação de canais markovianos e em seguida a versão no domínio logarítmico.

4.1 Códigos LDPC

Os códigos LDPC são uma classe de códigos de bloco lineares que operam próximo ao limite estabelecido por Shannon [13] em um vasto conjunto de canais de transmissão e sistemas de armazenamento de dados, notadamente em canais sem memória.

Um código LDPC é formado pelo espaço nulo de uma matriz de verificação de paridade \mathbf{H} , de dimensões $m \times n$, cuja densidade de 1s é baixa. Esta propriedade desta classe de códigos permite que seja possível executar algoritmos iterativos de decodificação com complexidade linear com o comprimento do código, conforme será visto na Seção 4.3. Também a distância mínima do código cresce linearmente com o comprimento do código. Estas propriedades permitem que se possam empregar códigos LDPC longos¹, condição na qual métodos ótimos de decodificação – que podem ser aplicados a um código linear qualquer – tornam-se demasiadamente complexos.

Um código LDPC é dito *regular* se sua matriz \mathbf{H} tem peso de colunas d_v e peso de linhas d_c , em que $d_c = d_v(n/m)$ e $d_c \ll m$. A taxa desta classe de códigos satisfaz $r \geq 1 - d_v/d_c$ (com igualdade se e somente se as linhas de \mathbf{H} são linearmente independentes). A densidade de um código LDPC regular é dada por $\rho = d_c/n = d_v/m$, e portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho = 0$.

4.2 Grafos de Tanner

Uma função $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dita fatorável se pode ser decomposta como um produtos de n funções $f_j(X_j)$, em que $X_j \subset \{x_1, \dots, x_n\}$. Neste contexto, a função $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é denominada *função global*, e os fatores $f_j(X_j)$ são *funções locais*. Esta decomposição é representada a seguir:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_j(X_j). \quad (4.1)$$

É possível representar graficamente de forma simples a relação entre essas funções pelo uso de um *grafo de fatores*.

Definição 4.1. Um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ é dito um grafo biparticionado se o seu conjunto de vértices \mathcal{V}

¹Observe que o teorema de Shannon para a capacidade de canais ruidosos, requer-se que $n \rightarrow \infty$ para que a capacidade de canal possa ser atingida.

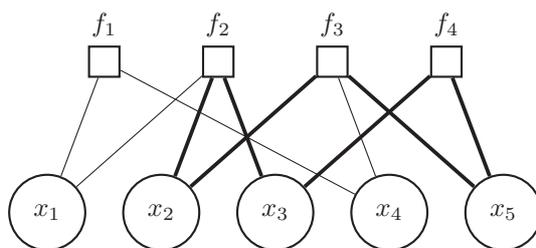


Figura 4.1: Grafo de Fatores.

pode ser decomposto em dois conjuntos disjuntos \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 tais que cada ramo no conjunto de ramos \mathcal{E} une um vértice em \mathcal{V}_1 a um vértice em \mathcal{V}_2 .

Em um grafo, um caminho é denominado um caminho fechado, ou um *ciclo*, se o nó inicial do primeiro ramo da sequência é igual ao nó terminal do último ramo. O comprimento do ciclo é o número de ramos que formam o ciclo. O menor entre esses comprimentos é chamado *cintura*. Um exemplo de ciclo em um grafo é exibido na Figura 4.1, em que um ciclo é formado pelos ramos destacados.

Um grafo de fatores é um grafo composto da seguinte maneira: a cada variável x_j associa-se um nó no grafo, chamado *nó de variável*, e a cada fator $f_j(X_j)$ um nó, chamado *nó de função*. Um nó de variável será conectado por um ramo a um nó de função se e somente se esta variável aparecer neste fator. Esta construção implica que um grafo de fatores é um grafo biparticionado, ou seja, seus nós podem ser divididos em dois conjuntos, em que os ramos têm sempre como extremidades um nó de variável e um nó de função.

Exemplo 4.1. A função a seguir é um exemplo de uma função fatorável:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_1(x_1, x_4) f_2(x_1, x_2, x_3) f_3(x_2, x_4, x_5) f_4(x_3, x_5).$$

Sua representação em um grafo de fatores está exibida na Figura 4.1.

Será visto a seguir que pode-se utilizar uma função fatorável para determinar se um determinado vetor é uma palavra de um código \mathcal{C} .

Definição 4.2. A função característica $h(\mathbf{x})$ de um código corretor de erros é uma função que mapeia o domínio \mathcal{X} em uma imagem $\{0, 1\}$, e assume o valor 0 se pelo menos uma equação de paridade não for satisfeita e 1 se todas as equações de paridade forem satisfeitas, isto é:

$$h(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x}\mathbf{H}^T = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2)$$

A função característica pode ser fatorada em um produto de $m = n - k$ funções, em que k é o número de bits de informação, em que cada uma das funções corresponde a uma equação de verificação de paridade:

$$h(\mathbf{x}) = \prod_{\ell=1}^{n-k} h_{\ell}(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

em que $h_{\ell}(\mathbf{x}) = \delta(x_{\ell_1} \oplus x_{\ell_2} \oplus \dots \oplus x_{\ell_{d_{\ell}}})$ e $\delta(\cdot)$ é a função delta de Kronecker, ℓ_j indica os índices das entradas não nulas da ℓ -ésima linha de \mathbf{H} e \oplus indica adição módulo-2.

Como a função característica é uma função fatorável, ela pode ser representada como um grafo de fatores. Neste caso, o grafo é denominado de *grafo de Tanner* e os nós de variável passam a ser chamados de *nós de bit* e os nós de função de *nós de checagem*. Um grafo de Tanner de um código tem um nó de bit i conectado a um nó de checagem j sempre que um elemento h_{ij} da matriz de verificação \mathbf{H} for igual a 1. Conclui-se, portanto, que um grafo de Tanner tem m nós de checagem, sendo um para cada equação de verificação de paridade, e n nós de bit, sendo um para cada bit do código. Desta forma, cada uma das m linhas da matriz \mathbf{H} especifica as conexões de cada nó de checagem e cada uma das n colunas especifica as conexões de cada nó de variável.

A vantagem da representação gráfica de um código LDPC por meio de um grafo de Tanner é que este serve como um guia em algoritmos de trocas de mensagem. Neste tipo de algoritmo, objetiva-se

calcular probabilidades associadas a cada símbolo recebido fazendo uso de troca de informações entre nós de variável e nós de função. Sendo assim, cada nó do grafo atua como um processador que calcula uma determinada função e os ramos do grafo indicam entre quais nós ocorre troca de informação. Para um grafo com ciclos, cada iteração ocorre em duas etapas: em uma delas os nós de variável enviam mensagens para os nós de função e na outra ocorre o inverso. As iterações são executadas até que uma palavra-código tenha sido encontrada ou um número máximo de iterações tenha sido atingido.

4.3 Algoritmo Soma-Produto

O algoritmo soma-produto (ASP) é um algoritmo de decodificação sub-ótimo introduzido por Gallager em 1960 [38]. Este algoritmo tem estreitas relações com o algoritmo *belief propagation* (BPA) da literatura sobre inferência Bayesiana, que foi proposto de forma independente por Pearl [40]. Apesar de ser sub-ótimo, seu desempenho é próximo ao desempenho ótimo para as taxas de erro de interesse.

O objetivo de ASP é marginalizar uma função com relação a todas as variáveis envolvidas nela. Este algoritmo calcula iterativamente uma aproximação desta marginalização para cada uma das variáveis. No entanto, a marginalização calculada pelo ASP apenas será exata se o grafo não contiver ciclos. Ainda assim, a decodificação pode ser efetiva se o grafo de Tanner associado ao código não contiver ciclos curtos. Este é um dos motivos pelos quais requer-se que um código LDPC tenha uma matriz de verificação com baixa densidade, pois assim os ciclos do grafo de Tanner tendem a ficar mais longos.

Como exposto anteriormente, a operação do ASP é baseada na passagem de mensagens ao longo de ramos de um grafo de fatores. Em cada nó, mensagens são recebidas e processadas de acordo com as regras do ASP, a depender do nó ser de variável ou de função. A mensagem é então passada para os nós vizinhos ao longo dos ramos ligados a este nó.

Frequentemente, ocorrerão na apresentação do ASP somas em que se exclui um grupo de variáveis.

É introduzida a seguir uma notação em que se enfatiza as variáveis em que a soma *não* ocorre:

$$\sum_{\sim x_i} h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \triangleq \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n). \quad (4.4)$$

Desta forma, a marginalização de uma função $g(x_1, \dots, x_n)$ com relação à variável x_i é dada por:

$$g_i(x_i) \triangleq \sum_{\sim x_i} g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n). \quad (4.5)$$

Para se efetuar o cálculo da função marginal $g_i(x_i)$ para todos os possíveis valores de $x_i \in \mathcal{X}$ são necessárias $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^n)$ operações, se for assumido por simplicidade que todas as operações (soma, adição, etc.) têm o mesmo custo. O ASP se utiliza da fatoração da função a ser marginalizada, juntamente com a propriedade de distributividade da multiplicação, para reduzir consideravelmente este esforço computacional.

O conjunto de variáveis que participam da função f serão denotados por $\mathcal{N}(f)$, e os conjuntos de funções das quais a variável x participa por $\mathcal{M}(x)$. Também será denotado por $\mathcal{N}(f) \setminus x$ o conjunto $\mathcal{N}(f)$ com a variável x excluída e $\mathcal{M}(x) \setminus f$ o conjunto $\mathcal{M}(x)$ com a função f excluída. As equações de atualização do ASP são dadas por:

▷ Mensagem de um nó de variável para um nó de função:

$$\mu_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in \mathcal{M}(x) \setminus \{f\}} \mu_{h \rightarrow x}(x). \quad (4.6)$$

▷ Mensagem de um nó de função para um nó de variável:

$$\mu_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\sim \{x\}} \left(f(\mathcal{N}(f)) \prod_{y \in \mathcal{N}(f) \setminus \{x\}} \mu_{y \rightarrow f}(x) \right). \quad (4.7)$$

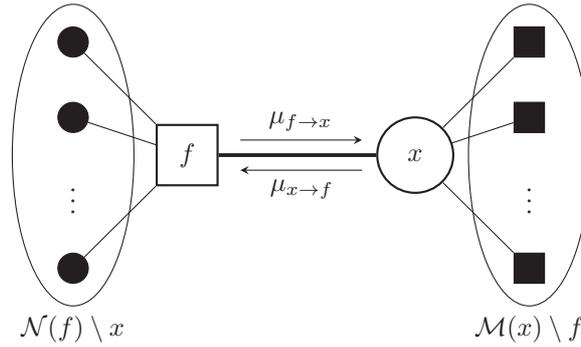


Figura 4.2: Mensagens passadas em um grafo de fatores.

4.4 O ASP Aplicado a Mensagens em Razão de Verossimilhança

Para o caso em que as mensagens trocadas entre os nós do grafo de fatores no ASP são vetores binários, é possível expressar a mensagem em termos de um único parâmetro. Este parâmetro pode ser a razão entre as componentes do vetor, a qual é denominada razão de verossimilhança. No entanto, esta quantidade tem uma faixa dinâmica muito ampla, e pode provocar instabilidades no algoritmo. Para circunvir este inconveniente, comumente é utilizado na prática o logaritmo desta quantidade, ao qual se refere como logaritmo de razão de verossimilhança (LLR, do inglês *Log-Likelihood Ratio*). Este tipo de mensagem é expressa em termos das componentes da mensagem em forma vetorial da seguinte maneira:

$$P(x) \triangleq \ln \left(\frac{1 - p(x=0)}{p(x=0)} \right) = \ln \left(\frac{p(x=1)}{p(x=0)} \right). \quad (4.8)$$

A transformação inversa da LLR pode ser obtida diretamente de (4.8):

$$p(x=0) = \frac{1}{1 + e^{P(x)}}. \quad (4.9)$$

As mensagens passadas pelo ASP em LLR modificam-se para as formas a seguir:

- ▷ As mensagens originadas em nós de variável são transformadas para a soma das mensagens que chegam ao nó, pelo fato das mensagens estarem em forma logarítmica:

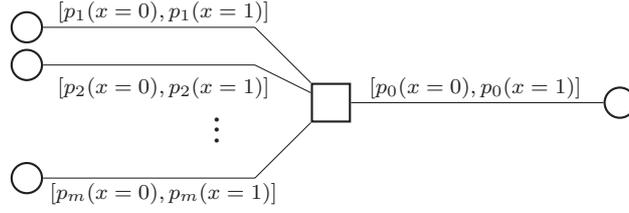


Figura 4.3: Mensagem enviada a partir de um nó de função.

$$M_{x \rightarrow f}(x) = \sum_{h \in \mathcal{N}(f) \setminus x} M_{h \rightarrow x}(x). \quad (4.10)$$

▷ Para as mensagens originadas em nós de função, observa-se primeiramente a seguinte identidade nas componentes da mensagem em forma vetorial, a qual será provada no Apêndice C:

Lema 4.1. *Dado um nó de função de variáveis binárias em um grafo de fatores, em que as mensagens incidentes são $[p_j(x=0), 1 - p_j(x=0)]$, com $j = 1, \dots, m$, e a mensagem de saída é $[p_0(x=0), 1 - p_0(x=0)]$, estando $p_j(x=0)$ associado ao nível de confiabilidade de x_j valer 0, conforme ilustrado na Figura 4.3, a seguinte relação é válida:*

$$1 - 2p_0(x=0) = \prod_{i=1}^m (1 - 2p_i(x=0)). \quad (4.11)$$

A partir de (4.9), obtém-se:

$$1 - 2p_0(x=0) = \frac{1 - e^{P_0(x)}}{1 + e^{P_0(x)}} = \tanh\left(\frac{P_0(x)}{2}\right). \quad (4.12)$$

Obtém-se então a expressão para as mensagens enviadas dos nós de função aos nós de variável em forma de LLR substituindo-se (4.12) em (4.11):

$$M_{f \rightarrow x}(x) = 2 \tanh^{-1} \left(\prod_{y \in \mathcal{M}(x) \setminus f} \tanh\left(\frac{M_{x \rightarrow y}(x)}{2}\right) \right). \quad (4.13)$$

A expressão em (4.13) é conhecida como a regra da tangente hiperbólica. Em sistemas práticos, esta regra é utilizada pelo uso de aproximações numéricas de (4.7) ou de variantes desta [43].

Na próxima seção, será visto um esquema de decodificação de códigos LDPC em canais cujos estados são representados por uma cadeia de Markov pelo uso do ASP.

4.5 Um Grafo de Fatores para um Código LDPC em um Canal Markoviano de Estados Finitos

Admitindo-se a transmissão de palavras-código binárias codificadas por um código LDPC (n, k) , cada vetor de informação $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$, com $u_i \in \mathcal{X}$, é codificado em uma palavra código $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, com $x_i \in \mathcal{X}$. Esta palavra código é transmitida em um FSMC e o vetor recebido é denotado por $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, com $y_i \in \mathcal{Y}$.

O decodificador de máxima probabilidade *a posteriori* maximiza a probabilidade de um símbolo de informação x_i dado o vetor recebido \mathbf{y} , calculada pela regra MAP (do inglês, *maximum a posteriori probability*):

$$\hat{x}_i^{\text{MAP}} = \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} P_{X_i|Y}(x_i|\mathbf{y}) = \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} P_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x})h(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

$$= \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} \sum_{\mathbf{s}} P_{Y,S|X}(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{x})h(\mathbf{x}) \quad (4.15)$$

$$= \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} \sum_{\mathbf{s}} P_S(\mathbf{s})P_{Y|X,S}(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{s})h(\mathbf{x}) \quad (4.16)$$

$$= \operatorname{argmax}_{x_i \in \mathcal{X}} \sum_{\sim x_i} \sum_{\mathbf{s}} \prod_{i=2}^n P_{S_i|S_{i-1}}(s_i|s_{i-1})P_{Y_i|X_i,S_i}(y_i|x_i, s_i)h(\mathbf{x}). \quad (4.17)$$

O ASP pode então ser aplicado para estimar cada símbolo de entrada x_i utilizando-se os fatores que aparecem em (4.14). Desta expressão é possível obter o grafo de fatores da Figura 4.4. Este grafo

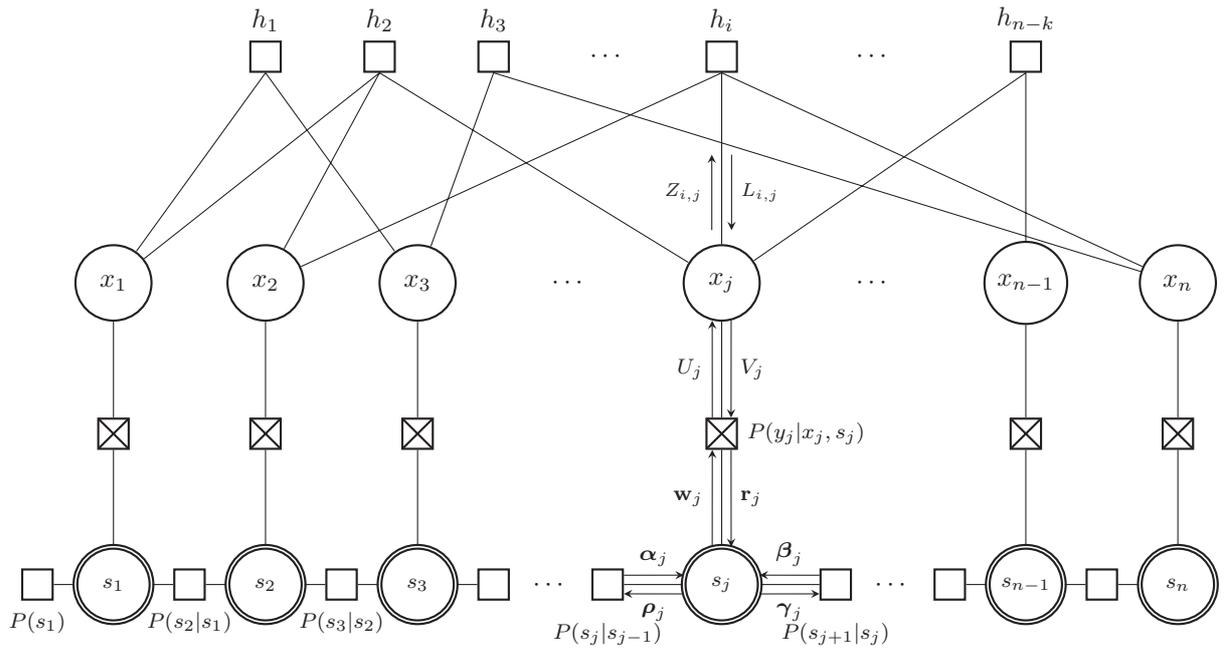


Figura 4.4: Grafo de fatores utilizado para decodificar um código LDPC em um FSMC.

pode ser decomposto em dois subgrafos, um dos quais envolve variáveis e funções relativas ao código, denominado *grafo do código*, e outro que envolve variáveis e funções relacionadas à dinâmica do canal, o *grafo do canal*. Ambos os grafos são grafos biparticionados, em que as variáveis x_1 a x_n , representam os n bits transmitidos, e h_1 a h_{n-k} representam as $n-k$ equações de paridade dadas em (4.3). Este grafo usa uma estratégia de estimação-decodificação em que as mensagens de saída do grafo de códigos V_j são combinadas de maneira a indicar estados de ocorrência mais provável, dada a mensagem recebida. De fato, o estado em que o canal se encontra poderia ser estimado como aquele de ocorrência mais provável para cada unidade de tempo, embora isto não seja realizado. Isto não se faz necessário, pois o objetivo é apenas detectar a palavra-código transmitida. No entanto, uma vez que as informações sobre os estados do canal são processadas no subgrafo de canal, os vetores probabilísticos resultantes são combinados de forma a melhorar o processo de decodificação.

A sequência de estados visitados pelo canal durante cada símbolo transmitido será denotada por

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, com $s_i \in \mathcal{Y}^m$, e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, com $y_i \in \mathcal{Y}$, representando o vetor recebido correspondente à entrada $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, com $x_i \in \mathcal{X}$. Será utilizada a seguinte notação para as mensagens passadas no grafo de fatores utilizado na decodificação em um canal markoviano:

$Z_{i,j}$	Mensagens em LLR do nó de bit j ao nó de checagem i
$L_{i,j}$	Mensagens em LLR do nó de checagem i ao nó de bit j
V_j	Mensagens em LLR do nó de bit j ao subgrafo de canal associado
U_j	Mensagens em LLR do subgrafo de canal aos nós de bit associados
$\mathbf{r}_j = [r_j(z^M)]$	Vetores probabilísticos do subgrafo de código ao nó de estado do canal no tempo j
$\mathbf{w}_j = [w_j(z^M)]$	Vetores probabilísticos do estado do canal no tempo j ao subgrafo do código
$\boldsymbol{\alpha}_j = [\alpha_j(z^M)]$	Vetores probabilísticos do nó de função $P(s_j s_{j-1})$ ao estado s_j
$\boldsymbol{\rho}_j = [\rho_j(z^M)]$	Vetores probabilísticos do estado s_j ao nó de função $P(s_j s_{j-1})$
$\boldsymbol{\beta}_j = [\beta_j(z^M)]$	Vetores probabilísticos do nó de função $P(s_{j+1} s_j)$ ao estado s_j
$\boldsymbol{\gamma}_j = [\gamma_j(z^M)]$	Vetores probabilísticos do estado s_j ao nó de função $P(s_{j+1} s_j)$.

Note-se que as mensagens passadas no subgrafo de canal são vetores de dimensão 2^{qM} .

4.5.1 Escalonamento de passagem de mensagens

Há diversas maneiras de organizar o escalonamento (*scheduling*) de passagem de mensagens na execução do algoritmo soma-produto. Por exemplo, pode-se primeiramente processar todos os nós de variável, incluindo os grafos de código e de canal, e então todos os nós de função. No decodificador a ser utilizado no Capítulo 5, escolhe-se executar uma iteração no subgrafo de código e em seguida uma iteração no subgrafo de canal, dando igual tempo de escalonamento a cada subgrafo. No subgrafo de canal, primeiramente todos os vetores $\boldsymbol{\alpha}_j$ são passados no sentido de j crescente e todas as mensagens

são armazenadas nos seus respectivos nós de estado. Quando o n -ésimo estado é atingido, todos os vetores β_j são calculados no sentido de j decrescente, fornecendo também as mensagens w_j e U_j , de maneira que β_j não precisa ser armazenado nos nós de estado.

4.6 Decodificação pelo ASP aplicada ao BMNC

Uma vez que o BMNC é um FSMC, o grafo apresentado na Figura 4.4 pode ser aplicado para executar a decodificação neste canal. As mensagens passadas na decodificação são apresentadas a seguir.

▷ **Inicialização:** Para $j = 1$ a n , computa-se $\bar{y}_j = 2^q - 1 - y_j$, e:

$$\alpha_j(z^M) = \beta_j(z^M) = \pi_{z^M} = P_{BMNC}(z^M) \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} U_j &= \ln \left(\frac{\sum_{z^M} P_{BMNC}(y_j | x_j = 1, s_j = z^M) \pi_{z^M}}{\sum_{z^M} P_{BMNC}(y_j | x_j = 0, s_j = z^M) \pi_{z^M}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\sum_{z^M} P_{BMNC}(z_j = \bar{y}_j | s_j = z^M) P_{BMNC}(z^M)}{\sum_{z^M} P_{BMNC}(z_j = y_j | s_j = z^M) P_{BMNC}(z^M)} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$Z_{i,j} = U_j, \quad \text{para } i \in \mathcal{N}(j). \quad (4.20)$$

▷ **Processamento iterativo**

- *Processamento no subgrafo de código*

1. Para $i = 1$ a m e $j \in \mathcal{N}(i)$, $\{L_{i,j}\}$ são obtidos com uso da decodificação MAP para os códigos componentes. Estas mensagens são calculadas de acordo com (4.13):

$$L_{i,j} = 2 \tanh^{-1} \left(\prod_{j' \in \mathcal{N}(i) \setminus j} \tanh \left(\frac{1}{2} Z_{i,j'} \right) \right). \quad (4.21)$$

2. Para $j = 1$ a n , a mensagem passado do subgrafo do código para o subgrafo de canal é calculada como a seguir:

$$V_j = \sum_{m \in \mathcal{M}(j)} L_{i,j}. \quad (4.22)$$

A representação probabilística de V_j é obtida de (4.9):

$$\begin{cases} v_j(0) = e^{V_j} / (1 + e^{V_j}) \\ v_j(1) = 1 / (1 + e^{V_j}). \end{cases} \quad (4.23)$$

- *Processamento no subgrafo de canal*

1. Para $j = 1$ a n :

$$\begin{aligned} r_j(z^M) &= \sum_{x_j=0}^1 P_{BMNC}(y_j|x_j, z^M) v_j(x_j) \\ &= P_{BMNC}(z_j = y_j|z^M) v_j(0) + P_{BMNC}(z_j = \bar{y}_j|z^M) v_j(1). \end{aligned} \quad (4.24)$$

2. As mensagens enviadas pelo nó de estado são:

$$\begin{cases} \gamma_j(z^M) = \alpha_j(z^M) r_j(z^M), & \text{para } j = 1 \text{ a } n-1 \\ \rho_j(z^M) = \beta_j(z^M) r_j(z^M), & \text{para } j = 2 \text{ a } n. \end{cases} \quad (4.25)$$

3. Para $j = 2$ a n :

$$\begin{aligned} \alpha_j(z^M) &= \sum_{s_{j-1}} P_{BMNC}(s_j = z^M | s_{j-1}) \gamma_{j-1}(s_{j-1}) \\ &= \sum_{v=0}^{2^q-1} \frac{P_{BMNC}(z_1, z_2, z_3, \dots, z_M, v)}{P_{BMNC}(z_2, z_3, \dots, z_M, v)} \cdot \gamma_{j-1}(z_2, z_3, \dots, z_M, v). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Para $j = 1$ a $n - 1$:

$$\begin{aligned}\beta_j(z^M) &= \sum_{s_{j+1}} P_{BMNC}(s_{j+1}|s_j = z^M) \rho_{j+1}(s_{j+1}) \\ &= \sum_{v=0}^{2^q-1} \frac{P_{BMNC}(v, z_1, z_2, \dots, z_M)}{P_{BMNC}(z^M)} \cdot \rho_{j+1}(v, z_1, z_2, \dots, z_{M-1}).\end{aligned}\quad (4.27)$$

4. Para $j = 1$ a n :

$$w_j(z^M) = \alpha_j(z^M) \beta_j(z^M). \quad (4.28)$$

5. Para $j = 1$ a n :

$$U_j = \ln \left(\frac{\sum_{z^M} P_{BMNC}(z_j = \bar{y}_j | s_j = z^M) w_j(z^M)}{\sum_{z^M} P_{BMNC}(z_j = y_j | s_j = z^M) w_j(z^M)} \right). \quad (4.29)$$

▷ Atualização dos nós de bit e decisão abrupta

1. Para $j = 1$ a n e para $i \in \mathcal{M}(j)$:

$$Z_{i,j} = U_j + \sum_{i \in \mathcal{M}(j) \setminus i} L_{i,j}. \quad (4.30)$$

2. (Decisão abrupta) Para $j = 1$ a n :

$$\begin{cases} \hat{x}_j = 0, & \text{se } U_j + \sum_{i \in \mathcal{M}(j)} L_{i,j} < 0 \\ \hat{x}_j = 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.31)$$

Se $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ satisfaz todas as equações de paridade, ou o número total de iterações é igual ao número máximo de iterações pré-estabelecido, a decodificação é interrompida. Caso contrário, executa-se uma nova iteração.

4.7 Decodificação pelo ASP aplicada ao NBNDC-QB

Nesta seção, um algoritmo para a decodificação de mensagens no NBNDC-QB é apresentado. Este algoritmo pode ser usado tanto quando o canal subjacente é o NBNDC-QB ou o DFC. A decodi-

ficção do NBNDC-QB pode ser feita utilizando-se o algoritmo apresentado na Seção 4.6, com as probabilidades estacionárias do NBNDC-QB calculadas previamente e armazenadas na memória, ou utilizando-se o algoritmo descrito em seguida, no qual as probabilidades são sempre recalculadas. Na primeira abordagem, economizam-se ciclos de instrução em relação à segunda, mas em compensação é necessária maior capacidade de armazenamento.

▷ **Inicialização:** Da equação (4.18), obtém-se para $j = 1$ a n :

$$\alpha_j(z^M) = \beta_j(z^M) = \pi_{z^M} = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \prod_{i=0}^{\xi_\ell-1} \left((1-\varepsilon)\rho_\ell + i \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^{M-1} \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)} \quad (4.32)$$

em que $\xi_\ell = \sum_{k=0}^{M-1} \delta_{z^k, \ell}$.

De (4.19), computa-se $\bar{y}_j = 2^q - 1 - y_j$, e para $j = 1$ a n :

$$U_j = \ln \left(\frac{\left((1-\varepsilon)\rho_{y_j} + \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \sum_{z^M} \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{y_j, z_\ell} + \alpha \delta_{y_j, z_0} \right) \pi_{z^M} \right)}{\left((1-\varepsilon)\rho_{\bar{y}_j} + \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \sum_{z^M} \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{\bar{y}_j, z_\ell} + \alpha \delta_{\bar{y}_j, z_0} \right) \pi_{z^M} \right)} \right). \quad (4.33)$$

A expressão em (4.20) permanece inalterada.

▷ **Processamento iterativo**

O processamento no subgrafo de código segue do desenvolvimento em (4.21) e (4.22).

- *Processamento no subgrafo de canal*

1. Para $j = 1$ a n :

$$\begin{aligned} r_n(z^M) &= \left[\left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{y_j, z_\ell} + \alpha \delta_{y_j, z_0} \right) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_{y_j} \right] v_j(0) + \\ &+ \left[\left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{\bar{y}_j, z_\ell} + \alpha \delta_{\bar{y}_j, z_0} \right) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_{\bar{y}_j} \right] v_j(1). \end{aligned} \quad (4.34)$$

2. As mensagens γ_j e ρ_j são calculadas como em (4.25).

3. Para $j = 2$ a n , tem-se de (4.26):

$$\alpha_j(z^M) = \sum_{v=0}^{2^q-1} \left[\left(\alpha \delta_{z_M, v} + \sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{z_M, z_{M-\ell}} \right) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon) \rho_{z_M} \right] \times \gamma_{j-1}(z_2, z_3, \dots, z_M, v). \quad (4.35)$$

Para $j = 1$ a $n-1$, tem-se de (4.27):

$$\beta_j(z^M) = \sum_{v=0}^{2^q-1} \left[\left(\alpha \delta_{z_0, v} + \sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{z_\ell, v} \right) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon) \rho_v \right] \times \rho_{j+1}(v, z_1, z_2, \dots, z_{M-1}). \quad (4.36)$$

4. A mensagem w_j é calculada como em (4.28).

5. Para $j = 1$ a n , de (4.29):

$$U_j = \ln \left(\frac{(1-\varepsilon) \rho_{y_j} + \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \sum_{z^M} \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{y_j, z_\ell} + \alpha \delta_{y_j, z_0} \right) w_j(z^M)}{(1-\varepsilon) \rho_{\bar{y}_j} + \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \sum_{z^M} \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \delta_{\bar{y}_j, z_\ell} + \alpha \delta_{\bar{y}_j, z_0} \right) w_j(z^M)} \right). \quad (4.37)$$

A atualização dos nós de bit e decisão abrupta são executadas como em (4.30) e (4.31).

4.8 Limite de Shannon para a Taxa de Distorção

A capacidade de um canal é o limite superior em que se pode transmitir informação tal que a probabilidade de erro possa ser feita arbitrariamente baixa [44]. Frequentemente, tem-se na prática a situação inversa. Para uma taxa $r = k/n$ fixada, deseja-se saber qual é o canal de mais baixa SNR em que se pode transmitir informação com taxa de erro tendendo a zero. Tal canal é chamado de limite de Shannon para esta taxa.

Na maioria das aplicações, pode-se tolerar um certo nível de erro. Nesta situação, deseja-se saber para um código de taxa r e uma probabilidade de erro de decodificação aceitável P_e , qual é o canal de mais baixa SNR em que se pode atingir P_e para esta taxa.

A teoria de Shannon fornece uma ferramenta chamada teoria da taxa de distorção, que é bastante utilizada no estudo de codificação de fontes com perdas [2]. Para uma fonte com distribuição de Bernoulli, a teoria da taxa de distorção fornece que para uma taxa de erro de bits P_e , é necessário transmitir em um canal sem ruído apenas $R(P_e)$ bits por bit de dados, para uma codificação de fonte ideal, em que $R(\cdot)$ é a função da taxa de distorção dada por:

$$R(P_e) = 1 - h_b(P_e) \quad (4.38)$$

$$= 1 - (-P_e \log_2(P_e) - (1 - P_e) \log_2(1 - P_e)). \quad (4.39)$$

Isto significa que apenas $R(P_e) < 1$ bits são necessários para representar cada bit de informação, e ainda ser possível recuperar a fonte original com uma probabilidade de erro de bit P_e .

Em um esquema de codificação de fonte e canal, suponha-se que se eliminem bits de uma fonte, de forma que a taxa de compressão seja fixada em r bits transmitidos para cada bit da fonte, e que os bits resultantes sejam codificados por um código corretor de erros. Para uma compressão ideal com perdas, pode-se encontrar um canal com capacidade C no qual se podem transmitir $R(P_e)$ bits de informação para cada bit da fonte, sem que haja erro de decodificação de canal. Neste caso, a taxa total de informação vale $rR(P_e)$, e a probabilidade de erro mais baixa que se pode atingir vale P_e . Isto implica que se informação é transmitida por uma fonte a uma taxa $r < C/R(P_e)$, pode-se atingir uma probabilidade de erro P_e .

O limite de Shannon para a taxa de distorção (RDSSL, do inglês *Rate-Distortion Shannon Limit*) é

definido como o pior canal para o qual um código de taxa r pode atingir uma probabilidade de erro de bit tão baixa quanto P_e . Em geral, avalia-se o RDSL em termos de um único parâmetro, como por exemplo a taxa de erro, ou SNR. O RDSL, denotado por $S_{RD}(r, P_e)$ calculada da seguinte maneira:

$$S_{RD}(r, P_e) = p^* \quad (4.40)$$

em que p^* satisfaz:

$$C(p^*) = r(1 - h_b(P_e)), \quad 0 < p^* < 0.5. \quad (4.41)$$

O RDSL será usado no Capítulo 5, para comparar o desempenho ideal de uma decodificação casada no canal NBNDC-QB com o desempenho ideal de canais sem memória.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

Com o objetivo de analisar o desempenho da decodificação de códigos LDPC em canais DFC utilizando-se modelos NBNDQ-QB, serão feitas neste capítulo análises tanto de limitantes de desempenho quanto decodificações iterativas baseadas no algoritmo soma-produto em canais NBNDQ-QB apresentado na Seção 4.7. Será aplicado o limitante de Shannon RDSL para dois casos: canais entrelaçados com decisão suave, e canais NBNDQ-QB resultantes de modelamento do DFC.

Um decodificador projetado para o canal NBNDQ-QB é implementado, e aplicado para casos em que se transmitem mensagens pelo NBNDQ-QB e pelo DFC. São então apresentadas curvas de desempenho para ambas situações. Um outro decodificador baseado no modelo BMNC também é implementado e seu desempenho é comparado ao do decodificador NBNDQ-QB.

5.1 Limite de Shannon para Taxa de Distorção do NBNDQ-QB e DMC

Como discutido na Seção 4.8, o limite de Shannon para a taxa de distorção (RDSL) mede a mínima taxa de erro que se pode ter em um dado canal, para um código de taxa fixada. Com o objetivo de analisar o desempenho que se pode obter usando-se decisão suave, em relação à decodificação com

decisão abrupta, foram medidos o limitante RDSL para estes dois casos. Também, para explicitar o potencial ganho de decodificação que se pode obter usando-se a memória presente no canal NBND-
QB com decisão abrupta, o limitante RDSL foi calculado para o esquema, caso em que o canal que se assume na decodificação é o mesmo que afeta a informação transmitida. As curvas obtidas neste caso são comparadas com a curva do RDSL para o BSC.

O canal com decisão suave sem memória utilizado para comparação é o canal com desvanecimento Rayleigh entrelaçado com quantização uniforme. Este canal é equivalente a um canal discreto sem memória com probabilidades de transição dadas em (2.9). O RDSL para este caso é calculado usando-se (4.40), em que a capacidade em (4.41) é obtida usando-se (2.24). Esta expressão pode ser obtida de maneira exata para o caso sem memória, em que a taxa de entropia $\mathcal{H}(Z^n)$ quanto $\mathcal{H}(W^n)$ são iguais às entropias $H(Z)$ e $H(W)$, respectivamente, as quais podem ser calculadas diretamente da definição de entropia e das distribuições de primeira ordem. O passo de quantização utilizado para o cálculo de capacidade é aquele que fornece a máxima capacidade para decisão suave sem memória no canal Rayleigh, que foi calculado com o ajuste exponencial exibido Figura 2.2.

Com a finalidade de se obter a curva de RDSL para o DMC, é necessário primeiramente conhecer, para uma taxa de código fixada, o menor valor de SNR para o qual é possível realizar decodificação com taxa de erro arbitrariamente pequena. Isto equivale a encontrar a SNR para a qual a capacidade de canal do DMC é igual à taxa do código utilizada. Isto pode ser realizado utilizando-se um método iterativo, como por exemplo o método da bisseção [45], em que se parte de um determinado intervalo para o qual se acredita que este valor de SNR esteja e se restringe iterativamente o intervalo calculando-se numericamente a capacidade de novos limitantes do intervalo. Isto feito, calcula-se a capacidade de canal para canais com SNR inferiores a esta SNR encontrada e então determina-se a probabilidade de

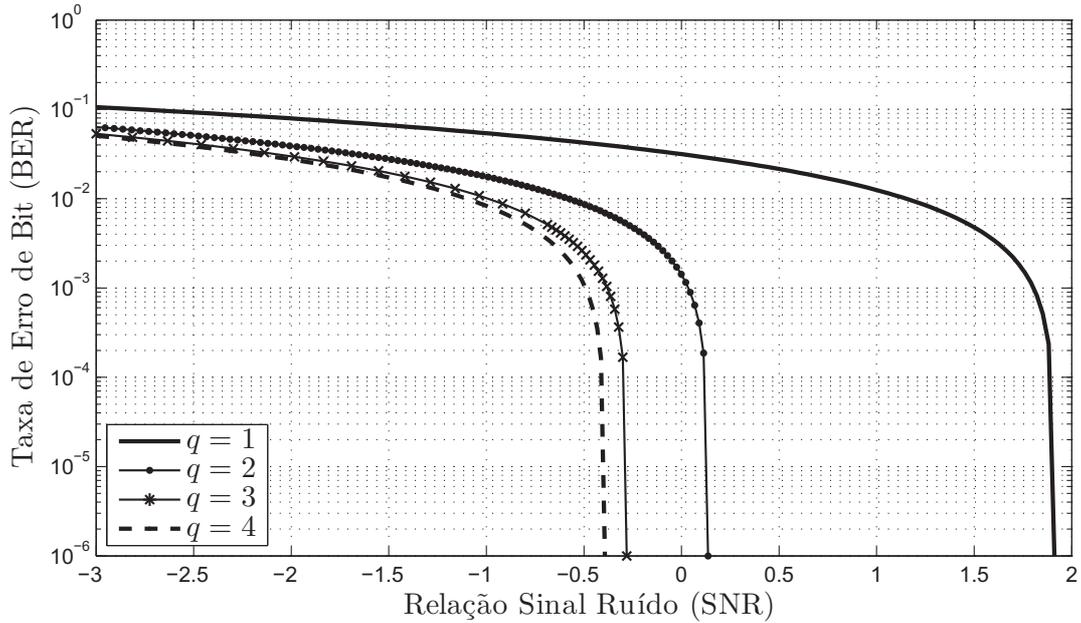


Figura 5.1: RDSL para o canal com desvanecimento Rayleigh com entrelaçamento perfeito (sem memória) com decisão suave, para códigos de taxa $r = \frac{1}{2}$.

erro de bit P_e que faz com que (4.41) seja satisfeita para cada valor de capacidade de canal.

As curvas de RDSL obtidas para o DMC com probabilidades de transição iguais às do desvanecimento Rayleigh encontram-se na Figura 5.1. Para BER tendendo a zero, observa-se um ganho de 1,76 dB entre o canal com decisão suave com $q = 2$, ou seja quatro níveis de quantização, e o canal com decisão abrupta ($q = 1$). Os ganhos se tornam cada vez menores conforme se aumenta o valor de q . O ganho entre o caso $q = 2$ e $q = 3$ é de 0,42 dB e entre $q = 3$ e $q = 4$ vale 0,11 dB. Este resultado indica que não se deve usar grandes valores de q para a decisão suave, pois o número de níveis aumenta exponencialmente com q e os ganhos de codificação tendem a ser marginais.

Para canais NBNDC-QB, para $q = 1$, o RDSL é obtido de forma análoga ao método para se obter este limitante para o DMC. Para este caso, primeiramente é fixado o parâmetro ρ como sendo a probabilidade de primeira ordem do DFC com decisão abrupta obtida de (2.8) que se obtém para cada valor de SNR. Admite-se então que todos os outros parâmetros (ε , α e M) são fixos. Da mesma maneira que

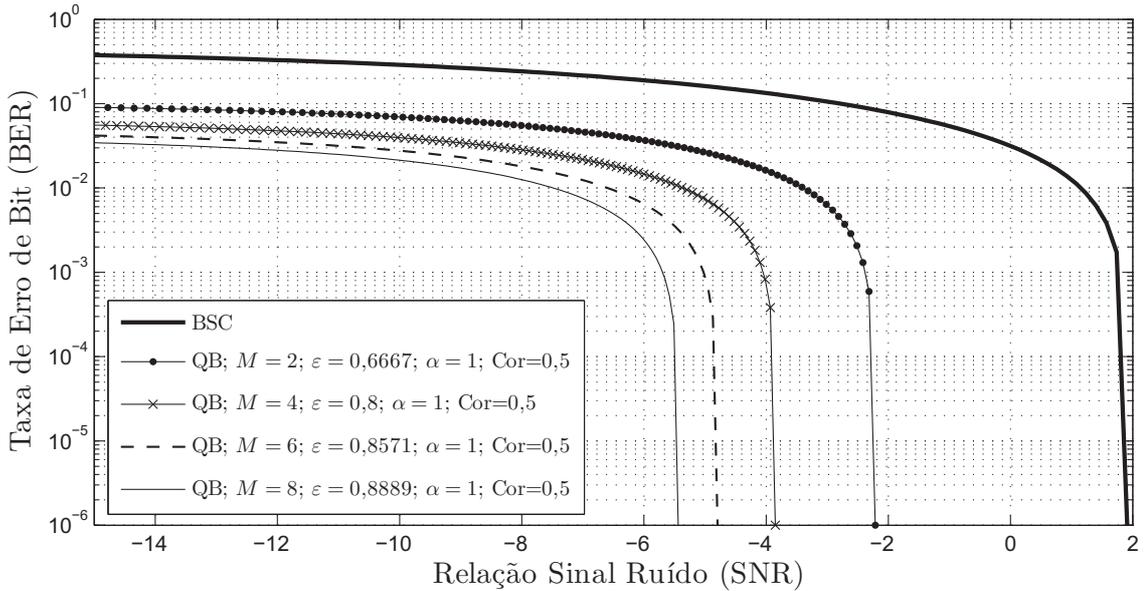


Figura 5.2: RDSL para canais NBNDQ-QB escolhidos fixando-se o coeficiente de correlação em $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,5$ $\alpha = 1$, para um código de taxa $r = \frac{1}{2}$ e $q = 1$.

para o DMC, determina-se o valor de SNR para o qual a capacidade de canal se iguala à taxa do código sendo utilizada, em que a capacidade é determinada por (2.32). Então, para cada valor de SNR inferior a este limitante, calcula-se a capacidade de canal e o RDSL é obtido pelo uso de (4.41).

Com o intuito de analisar o potencial de ganho de codificação que se pode obter utilizando-se o NBNDQ-QB, será feita uma análise da RDSL para modelos QB com coeficiente de correlação fixado. Por simplicidade, fixa-se $\alpha = 1$, e escolhem-se valores relativamente altos para o coeficiente de correlação, $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,5$ e $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,6$. Fazendo-se $M = 2, 4, 6, 8$, o valor de ε é obtido resolvendo-se (2.29) para este parâmetro. As curvas de RDSL para os modelos obtidos são apresentadas nas Figuras 5.2 e 5.3. Nestas figuras são observados ganhos expressivos de codificação, mesmo para valores de M não muito altos. Por exemplo, para o modelo mais simples apresentado, com $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,5$ e $M = 2$ obtém-se um ganho superior a 4 dB em relação ao RDSL do BSC. Este ganho chega a 16 dB se o modelo com $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,6$ e $M = 8$ for comparado ao limitante do BSC.

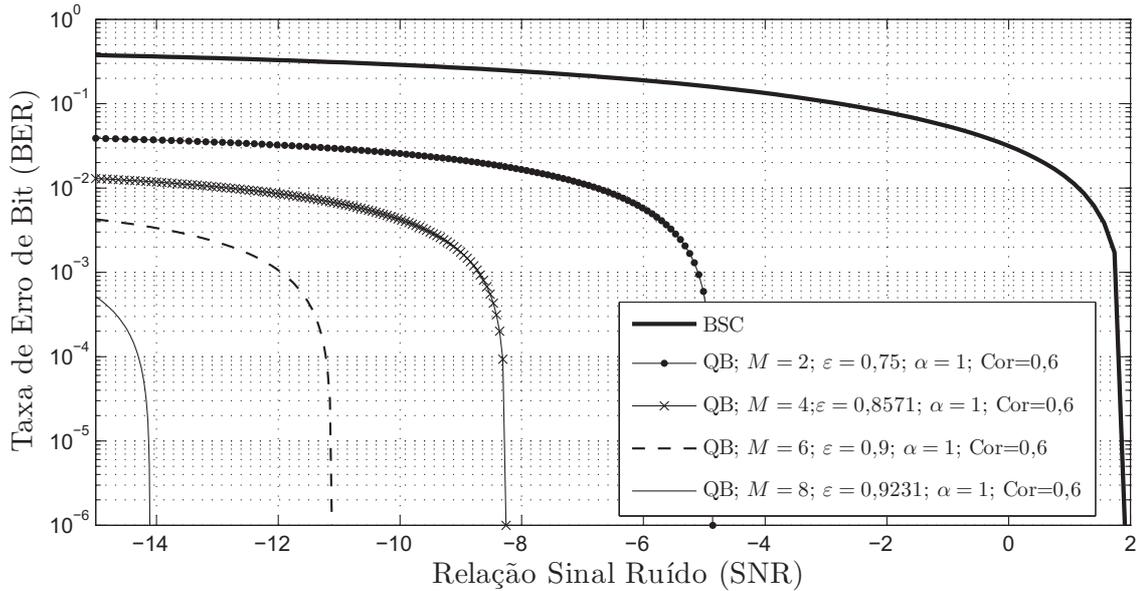


Figura 5.3: RDSL para canais NBNDQ-QB escolhidos fixando-se o coeficiente de correlação em $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,6$ $\alpha = 1$, para um código de taxa $r = \frac{1}{2}$ e $q = 1$.

Utilizando-se a mesma abordagem realizada para canais NBNDQ-QB, é feita também uma análise de RDSL para canais NBNDQ-QB obtidos para representar canais DFC pela minimização da distância de Kullback-Leibler para valores selecionados de M . Com o intuito de simplificar análise, para cada valor de M fixado, tomam-se os parâmetros ε e α obtidos para o modelamento do DFC com um valor de SNR fixado e analisa-se o comportamento da RDSL para um faixa de SNR próxima à do valor de referência. Caso esta simplificação não fosse utilizada, um modelo QB teria que ser obtido para cada valor de SNR analisado dentro da faixa, o que foge do objetivo da análise. As curvas obtidas para os modelos que representam um DFC com $f_D T = 0,005$ e $\text{SNR}=1\text{dB}$ são exibidas na Figura 5.4 para uma faixa de SNR de $-0,5\text{ dB}$ a 2 dB . Observa-se um ganho de codificação de até $1,07\text{ dB}$, para o caso $M = 22$. Na figura, observa-se um redução de magnitude decrescente no valor da RDSL conforme se aumenta o valor de M .

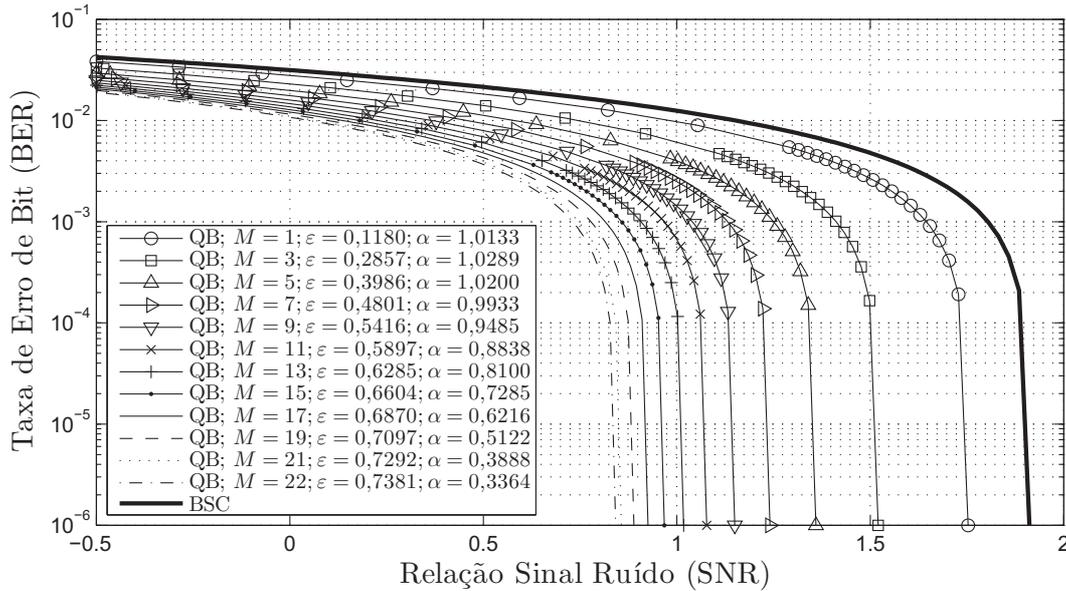


Figura 5.4: RDSL para os canais NBNDQ-QB binários selecionados para representar o canal com desvanecimento Rayleigh, com $f_D T = 0,005$ e $\text{SNR}=1$ dB, para um código de taxa $r = \frac{1}{2}$.

5.2 Desempenho da Decodificação LDPC do canal NBNDQ-QB

Como ponto de partida para análise de desempenho de decodificação de códigos LDPC em canais NBNDQ-QB, definem-se primeiramente dois esquemas de codificação e decodificação de canal. Em um deles, a mensagem é codificada por meio de um código LDPC, passa por um canal NBNDQ-QB e então é decodificado por um esquema de decodificação projetado para o canal NBNDQ-QB, fazendo uso do algoritmo apresentado na Seção 4.7. Neste esquema, assume-se que o receptor tem conhecimento dos parâmetros que definem o canal através do qual a mensagem é transmitida. Define-se desta maneira o esquema QB-QB.

No segundo esquema, a mensagem codificada é transmitida em um canal DFC e decodificada por um decodificador projetado para o canal NBNDQ-QB. Neste caso, assume-se que o decodificador conhece a frequência Doppler e SNR do canal e utiliza para decodificação os parâmetros um modelo QB que represente bem este canal. Este sistema é denominado esquema DFC-QB. Os esquemas QB-QB e DFC-

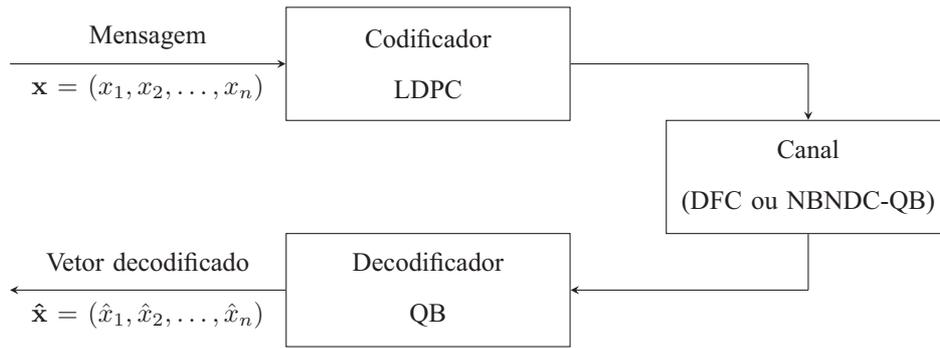


Figura 5.5: Diagrama em blocos da codificação LDPC e decodificação NBNDQ-QB. Caso o canal seja o NBNDQ-QB, tem-se o esquema QB-QB, e caso seja o DFC, tem-se o DFC-QB.

QB estão ilustrados na Figura 5.5. Será feita a seguir uma análise de desempenho de decodificação do esquema DFC-QB utilizando-se os parâmetros encontrados pelo método descrito no Capítulo 3. O esquema QB-QB também é analisado para efeito de comparação.

Para executar a decodificação, será utilizado um código LDPC regular ($n = 15000, k = 7500$), portanto de taxa $r = 1/2$ com grau de coluna $d_v = 3$. A matriz de verificação de paridade deste código foi gerada utilizando o algoritmo PEG [46]. Os valores da BER foram obtidos transmitindo-se palavras código nulas através do NBNDQ-QB e o decodificador é aquele projetado para o NBNDQ-QB, apresentado na Seção 4.7.

Os canais NBNDQ-QB utilizados são selecionados com $M = 2, \alpha = 1$ e $\text{Cor}_{\text{QB}} = 0,5$. O valor de ε é obtido a partir de (2.29). A decodificação é realizada tanto para decisão abrupta, quanto para decisão suave com $q = 2$. Os desempenhos em termos da taxa de erro de bit obtidos para estes canais são exibidos na Figura 5.6. Nesta figura, observa-se que o ganho de decodificação devido apenas à decisão suave é de cerca de 2,1 dB para uma BER de 10^{-4} , quando se compara a curva do BSC com a do DMC com $q = 2$, que são canais NBNDQ-QB com entrelaçamento perfeito. Também, o ganho devido à memória para decisão abrupta para o modelo QB apresentado é de cerca de 3 dB. Para a mesma BER, tem-se um ganho de 3,6 dB quando se compara o DMC com o NBNDQ-QB, ambos com $q = 2$. O

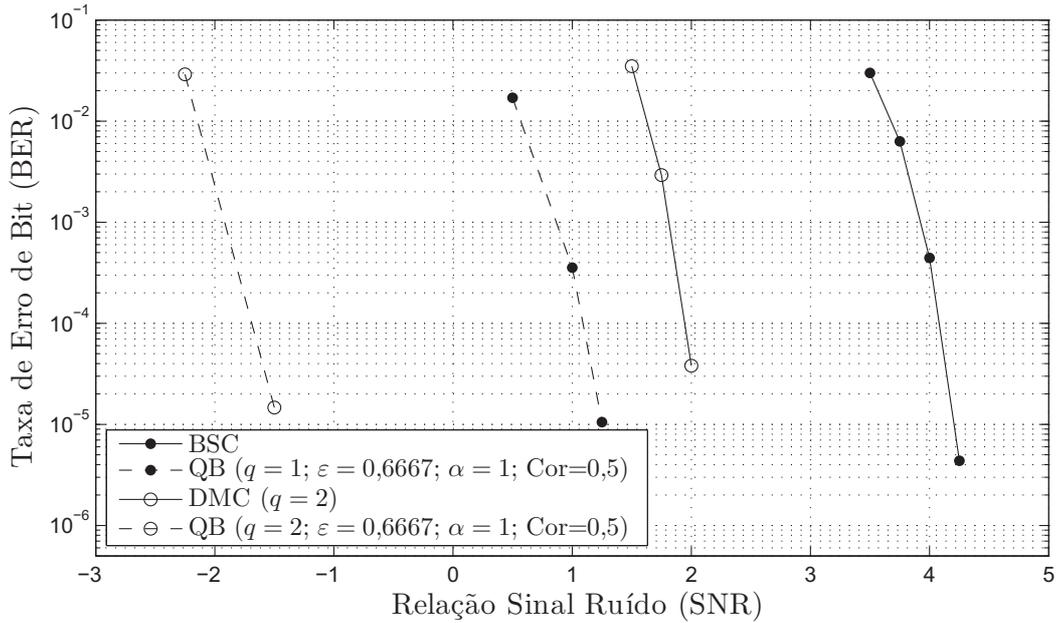


Figura 5.6: Desempenho obtido para a decodificação de um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$) nos canais BSC e DMC com $q = 2$ e modelos QB arbitrários com coeficiente de correlação fixado em 0,5, para $q = 1$ e $q = 2$ ($M = 2$ e $\alpha = 1$).

ganho total no uso do NBNDQ-QB com decisão suave com relação ao BSC é de 5,8 dB.

5.3 Desempenho da Decodificação LDPC dos esquemas DFC-QB e DFC-BMNC

Tendo em vista que os modelos NBNDQ-QB obtidos para representar canais DFC são escolhidos de forma a minimizar a divergência entre o canal modelado e seu modelo, espera-se que se tenha uma boa aproximação da dinâmica do DFC por meio do modelo encontrado. Pelo fato do modelo utilizado ser markoviano, a probabilidade condicional do vetor recebido é uma função fatorável, e pode-se usar um decodificador baseado no ASP, como é exposto na Seção 4.7. Nesta seção serão usados os parâmetros de modelos NBNDQ-QB obtidos para aproximar o DFC, para vários valores do comprimento de fila M .

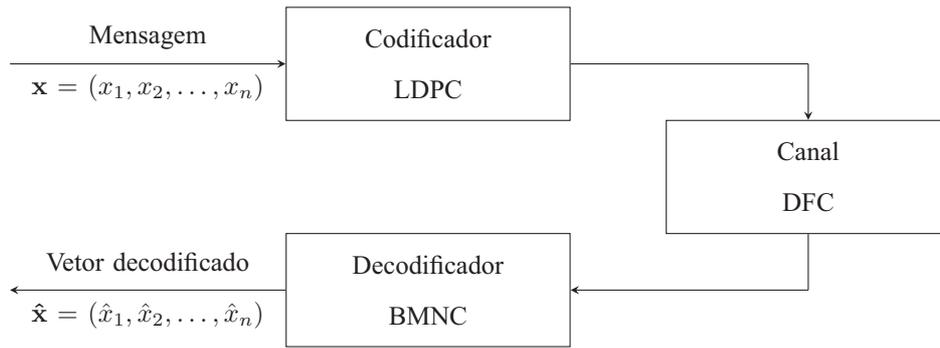


Figura 5.7: Diagrama em blocos do esquema DFC-BMNC.

Também é implementada a decodificação dos mesmos canais DFC usados na decodificação do NBNDC-QB assumindo-se no receptor o modelo BMNC apresentado na Seção 4.6, utilizando-se o esquema denominado DFC-BMNC apresentado na Figura 5.7. Este modelo tem a desvantagem de ter uma dependência exponencial no comprimento do modelo utilizado, o que leva a um grande número de parâmetros para representar um dado canal. No entanto, espera-se que este modelo represente o DFC com maior precisão, uma vez que as probabilidades de transição de estado e a distribuição do símbolo de ruído são igualadas às do DFC. Para obter este modelo, as probabilidades de ordem $M + 1$ do DFC têm que ser previamente estimadas. Estas probabilidades são obtidas pelo uso do método de soma de senóides [23] e calculando-se a frequência relativa de cada bloco de erros de comprimento $M + 1$. As amostras do canal são simuladas até que o estado menos provável ocorra 500 vezes, ou um número máximo de simulações seja atingido. Com estas estimativas, as probabilidades estacionárias do BMNC são calculadas pelo uso de (2.37), e a probabilidade de transição de bloco utilizando-se (2.35). Para um dado DFC, espera-se que a decodificação do BMNC tenha um desempenho não inferior ao obtido pela decodificação do NBNDC-QB, pois este é um canal do tipo BMNC em que as probabilidades de ordem M não são feitas iguais às do canal.

Os modelos utilizados para obtenção do desempenho dos esquemas DFC-QB e QB-QB para valores

fixados de M ($M = 4$ e 8) são apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2 para um DFC com $f_D T = 0,01$; $0,005$ e $0,001$. As curvas de BER obtidas estão apresentadas nas Figuras 5.8 a 5.11. Nestas figuras, também são apresentadas as curvas do BSC e DMC com probabilidades de transição iguais às do DFC, conforme o caso, para fins de comparação.

Primeiramente, vê-se na Figura 5.8 um comparativo do desempenho obtido para o esquema QB-QB, em que se usa tanto no canal quanto no decodificador o modelo NBNDQ-QB obtido para modelar o DFC com $f_D T = 0,005$ e $q = 1$, para comprimentos de fila $M = 4$ e $M = 8$. São exibidas também curvas para o esquema DFC-QB utilizando-se o mesmo modelo, em que o canal que afeta a informação é o DFC e o receptor assume a aproximação pelo respectivo canal NBNDQ-QB. Nota-se na figura que o desempenho do esquema QB-QB é melhor o do DFC-QB, pois no primeiro caso o cálculo no receptor de probabilidades referentes aos estados do canal é melhor representativo da dinâmica do canal. Para comprimento de fila $M = 4$, a curva obtida para o esquema DFC-QB cruza a curva de desempenho do BSC, o que significa que o ganho de codificação neste caso não é satisfatório. No entanto, um ganho de codificação de aproximadamente $0,55$ dB é observado para comprimento de fila $M = 8$, para uma taxa de erro de 10^{-4} . Portanto, nota-se que um maior comprimento de bloco deve ser utilizado para que se possa explicitar o ganho de memória potencial do canal com desvanecimento.

Na Figura 5.9, as curvas de desempenho obtidas para o esquema DFC-QB são comparadas com o desempenho obtido para a decodificação do DFC por meio de seu modelo BMNC, para os comprimentos de fila $M = 4$ e $M = 8$. Para ambos os casos, observa-se uma diferença aproximadamente constante da ordem de $0,1$ dB entre as curvas do DFC decodificado pelo seus modelos NBNDQ-QB e BMNC. Isto indica que o modelo QB é adequado para os comprimentos de bloco em questão, pois há uma perda de desempenho pequena em se usar o modelo NBNDQ-QB, e por outro lado, pode-se representar o canal

com um menor número de parâmetros.

Nas curvas apresentadas na Figura 5.10 é fixado o comprimento da fila do modelo NBNDQ-QB em $M = 8$ e varia-se a frequência normalizada $f_D T$ do canal. É possível se observar desta figura que a taxa de erro se reduz conforme se aumenta a frequência normalizada do canal. Isto se justifica pelo fato de, apesar de haver uma menor correlação temporal em canais de mais alta frequência, o modelo com M fixado está mais próximo do modelo ótimo, conforme o critério em (3.8).

Por fim, na Figura 5.11, as curvas de BER dos canais com decisão suave e abrupta são exibidas. Para obter os desempenhos com decisão abrupta, pode-se utilizar o decodificador apresentado na Seção 4.7, excluindo-se o grafo de canal. Comparando-se as Figuras 5.10 e 5.11, observa-se um ganho de codificação da ordem de 2,1 dB entre a decodificação do DMC com $q = 2$ e o BSC, para $BER = 10^{-4}$. A Figura 5.11 também mostra o desempenho da decodificação do DFC com $f_D T = 0,005$ por meio de seus modelos NBNDQ-QB e BMNC, com $M = 4$. Para os valores de SNR considerados, a BER da decodificação QB permanece estritamente maior que aquela obtida para o DMC. É possível notar que algum ganho é obtido para o modelo BMNC para SNR abaixo de 1,8 dB. Um ganho da ordem de 0,6 dB entre os modelos QB e BMNC é observado neste caso para $BER = 2 \times 10^{-3}$, o qual é maior que o ganho obtido para o caso binário. Também se pode observar que o DFC com $f_D T = 0,01$ tem melhor desempenho que o canal com $f_D T = 0,005$, novamente devido ao fato que o canal com maior frequência encontra-se mais próximo ao seu modelo ótimo para M fixado.

Tabela 5.1: Modelos QB para o DFC com $f_D T = 0,01, 0,005, \text{ e } 0,001$, com decisão abrupta ($q = 1$).

SNR	$f_D T = 0,01$				$f_D T = 0,005$				$f_D T = 0,001$			
	$M = 4$		$M = 8$		$M = 4$		$M = 8$		$M = 4$		$M = 8$	
	ε	α	ε	α	ε	α	ε	α	ε	α	ε	α
2,5	0,361	0,801	0,530	0,580	0,370	0,914	0,541	0,850	0,364	0,805	0,541	0,843
2,75	0,363	0,783	0,533	0,559	0,373	0,895	0,545	0,837	0,366	0,798	0,544	0,843
3	0,367	0,764	0,538	0,541	0,376	0,873	0,549	0,817	0,370	0,783	0,549	0,820
3,25	0,368	0,722	0,540	0,504	0,378	0,838	0,552	0,783	0,374	0,773	0,551	0,811
3,5	0,372	0,704	0,545	0,487	0,380	0,825	0,555	0,767	0,378	0,758	0,558	0,796
3,75	0,373	0,697	0,546	0,472	0,383	0,812	0,558	0,750	0,381	0,751	0,561	0,788
4	0,377	0,680	0,551	0,459	0,386	0,799	0,561	0,736	0,382	0,741	0,563	0,785
4,25	0,379	0,674	0,552	0,440	0,385	0,774	0,562	0,715	0,381	0,730	0,562	0,764

Tabela 5.2: Modelos QB para um DFC com $f_D T = 0,005$, e decisão suave ($q = 2$).

SNR	$M = 4$		
	δ	ε	α
1,5	0,5	0,4840	0,5431
1,75	0,5	0,4944	0,5529
2	0,5	0,5055	0,5609
2,25	0,5	0,5160	0,5714
2,5	0,45	0,5118	0,5578
3	0,45	0,5328	0,5761
3,5	0,45	0,5559	0,5929
4	0,45	0,5759	0,6145

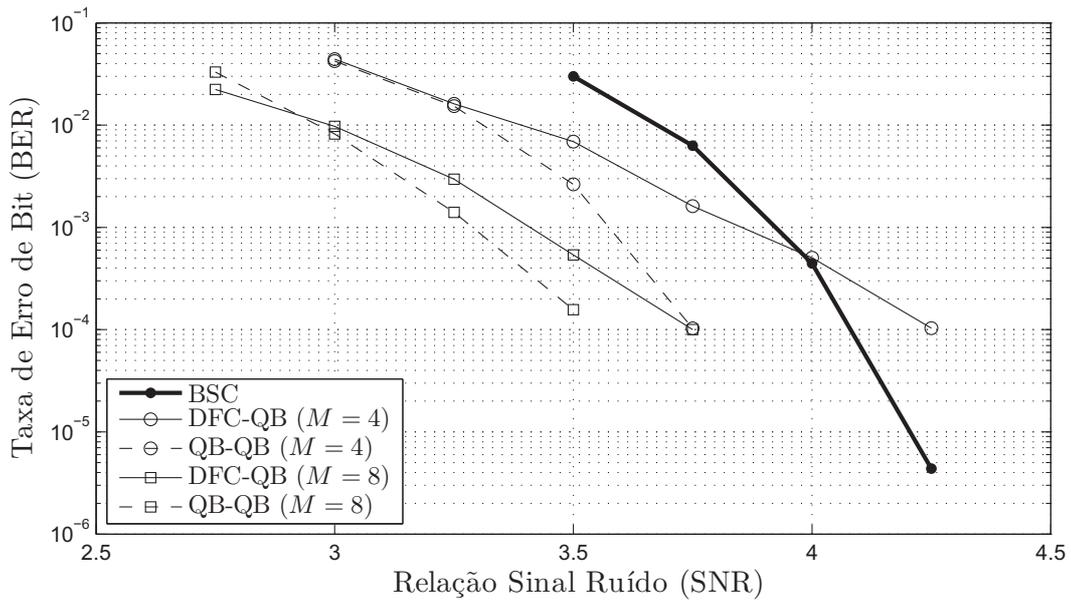


Figura 5.8: Comparação entre as curvas de BER versus SNR obtidas para o BSC, DFC ($f_D T = 0,005$, $q = 1$) decodificado pelo esquema DFC-QB e seu esquema QB-QB equivalente, para um código LDPC ($n = 15000$, $k = 7500$).

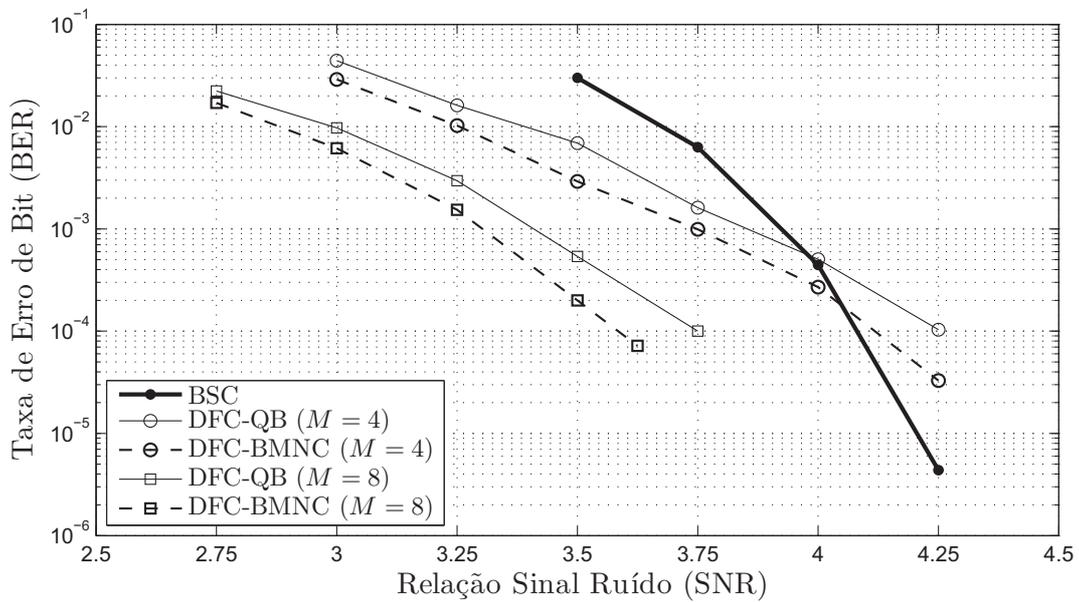


Figura 5.9: Comparação entre as curvas de BER versus SNR obtidas para o BSC, DFC ($f_D T = 0,005$, $q = 1$) decodificado por seu modelo NBNDQ-QB e BMNC, para um código LDPC ($n = 15000$, $k = 7500$).

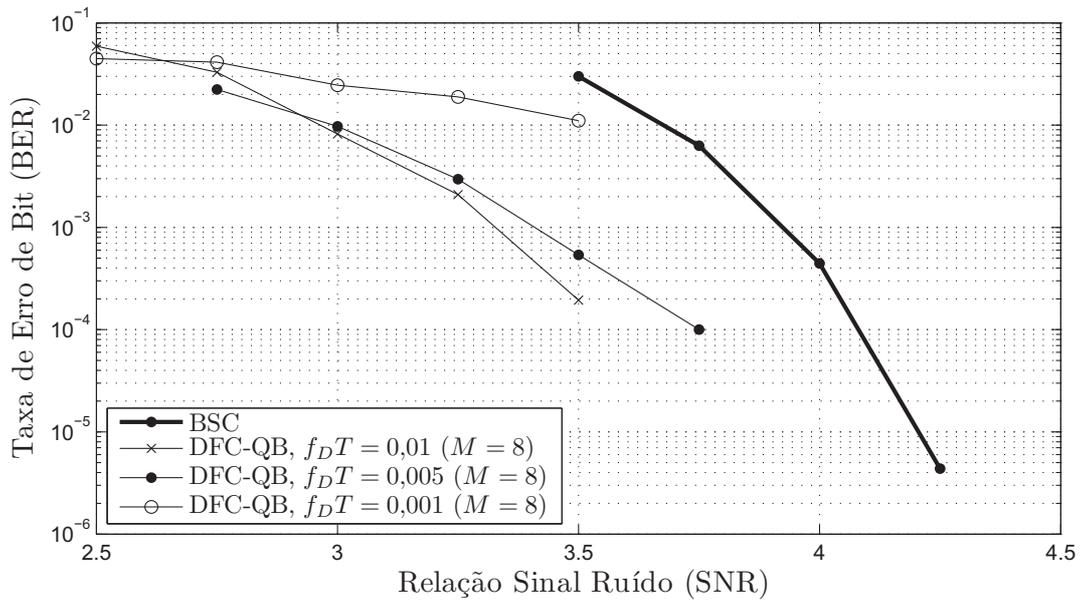


Figura 5.10: Comparação entre as curvas de BER obtidas para o BSC e para o DFC decodificado pelos modelos NBNDQ-B apresentadas na Tabela 5.1 para $f_D T = 0,01, 0,005, 0,001$, com $q = 1$, utilizando-se um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$).

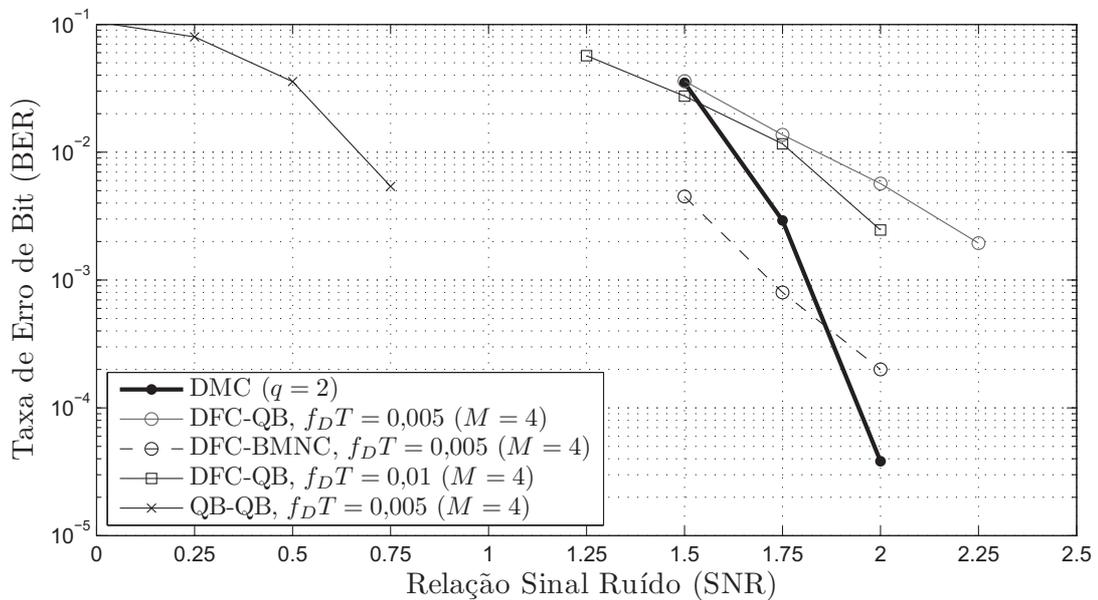


Figura 5.11: Comparação entre as curvas de BER obtidas para o BSC, um DMC com $q = 2$ e um DFC ($f_D T = 0,01; 0,005$) decodificado por seu modelo NBNDQ-B, com um código LDPC ($n = 15000, k = 7500$).

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados um modelo de canal discreto com desvanecimento Rayleigh denominado DFC e um modelo de canal com entrada binária e decisão suave, o NBNDC. Foram realizados cálculos de capacidade de canal para o canal DFC por meio de simulação semi-analítica utilizando-se um método de geração do canal Rayleigh realizado por soma de senóides. Então, foi apresentado um modelo markoviano gerado de um processo baseado em uma fila, o modelo QB. Este modelo foi aplicado para aproximar o comportamento estatístico do canal DFC. Um outro modelo de canal markoviano, denominado BMNC foi apresentado com o objetivo de se ter um modelo cujas probabilidades conjuntas de ordem menor ou igual a M são idênticas às de um modelo qualquer de memória infinita. Foi visto que este canal é uma generalização do modelo NBNDC-QB.

Foram estudadas capacidades do DFC para $f_D T = 0,01$, $f_D T = 0,005$ e $f_D T = 0,005$ e valores de SNR 2 dB, 5 dB, 10 dB e 15 dB em função passo normalizado do quantizador. Foi observado um mesmo padrão de comportamento da capacidade de canal do DFC e de canais sem memória com decisão suave estudados anteriormente. Observou-se, como já era esperado, que o canal com desvanecimento Rayleigh tem uma capacidade de canal superior a um canal sem memória com mesma probabilidade

de erro de primeira ordem, uma vez que é um resultado conhecido da teoria da informação que canais com memória apresentam capacidade de canal superior a canais sem memória em que o ruído tem uma mesma distribuição marginal. Também foi observado que o passo ótimo do quantizador é menor para o DFC que para canais DMC.

Foi então feito um modelamento do canal DFC através do NBNDC com ruído QB (ou NBNDC-QB) baseado na minimização da Distância de Kullback-Leibler. Os canais DFC estudados foram novamente aqueles com $f_D T = 0,01$, $f_D T = 0,005$ e $f_D T = 0,001$ e valores de SNR 2 dB, 5 dB, 10 dB e 15 dB. Foram calculadas divergências entre os canais DFC e os modelos QB para diversos valores do tamanho da fila M . Observou-se que o parâmetro α tende a valer zero a partir de um dado valor de M e também que geralmente há um mínimo local na divergência entre o NBNDC-QB e DFC para um certo valor de M . Estes dois fatos foram utilizados para definir um critério de seleção de um valor de M que represente bem o canal DFC, sem que este seja arbitrariamente elevado. Deve-se restringir o valor de M , pois este parâmetro é crucial na complexidade do receptor, uma vez que o número de estados cresce exponencialmente com M . Após determinar este valor, foram comparadas as curvas de autocorrelação entre o canal DFC e o modelo QB selecionado. As curvas apresentaram uma consonância satisfatória. Observou-se também que as funções autocorrelação $R[m]$ do modelo QB também divergem das do DFC para pequenos valores de m devido à própria formulação da autocorrelação do QB.

As capacidades de canal obtidas para o canal DFC e o canal NBNDC-QB foram então comparadas. Observou-se que as capacidades obtidas para o NBNDC-QB tiveram sempre valores superiores aos valores obtidos para o DFC. Porém, os valores não divergem em mais de 7%, e o comportamento das capacidades em função da SNR é o mesmo para o DFC e o QB.

O Algoritmo Soma-Produto (ASP) foi apresentado e aplicado para a decodificação de um canal

FSMC. Este procedimento foi então aplicado aos casos específicos do BMNC e NBNDQ-QB. Estes algoritmos de decodificação foram aplicados para analisar o desempenho da decodificação de palavras-código transmitidas através de um canal DFC. Para isto, foi definido o esquema DFC-QB e os parâmetros do modelo QB utilizados para representar o DFC neste caso foram obtidos pela minimização da distância de Kullback-Leibler. Estes mesmos modelos foram utilizados para se analisar o desempenho no esquema QB-QB, em que o canal é o NBNDQ-QB e a decodificação é realizada por um algoritmo de decodificação do NBNDQ-QB. Também foram realizadas decodificações no esquema DFC-BMNC, em que o canal é o DFC e o modelo utilizado para decodificação é o BMNC.

As curvas de BER obtidas para estes esquemas de decodificação mostram que é possível obter ganhos em um canal com desvanecimento modelando-o como um canal com ruído QB. Esta estratégia tem a vantagem que o modelo de canal é especificado por apenas $2^q + 2$ parâmetros. No entanto, para obter ganhos de codificação é necessário utilizarem-se códigos relativamente longos, pois os ganhos obtidos foram observados para códigos com comprimento $n = 15000$, enquanto que ganhos pouco significativos foram obtidos com comprimentos menores, em resultados omitidos deste trabalho.

Foi visto também que o modelo QB é um bom modelo markoviano para representar o DFC, uma vez que há apenas um pequeno ganho entre as curvas de BER obtidas entre os esquemas DFC-BMNC e DFC-QB. Um ganho de codificação considerável foi observado entre a decodificação com decisão abrupta e decisão suave, com ambos os casos utilizando entrelaçamento. Embora não se tenha observado vantagem em se utilizar um modelo QB para um canal com $q = 2$ para o comprimento de código considerado, o BMNC mostra algum ganho potencial não explorado pelo modelo QB. O modelo QB não-binário deve ser investigado com o propósito de ser melhorado e aproximar-se do modelo BMNC.

Foram colocadas em anexo deduções de alguma expressões que aparecem ao longo do trabalho,

sendo a expressão da autocorrelação do canal QB 2^q -ário uma extensão da prova já existente anteriormente para o caso binário. Também é apresentada uma nova dedução para a simetria da matriz de probabilidade de transição de um canal com decisão suave e uma prova para um lema utilizado na obtenção na regra da tangente hiperbólica para passagem de mensagens de um nó de função para um nó de variável em grafo de fatores.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Alguns tópicos que podem ser abordados em pesquisas futuras são:

- ▷ Cálculos de capacidade e modelamento do DFC pelo NBNDC-QB para mais níveis de quantização (por exemplo $q = 3$).
- ▷ Estender os modelos QB para outros tipos de canal, por exemplo o canal com desvanecimento Rice, ou com correlação exponencial.
- ▷ Efetuar o modelamento do QB para mais valores de frequência do canal e de SNR, a fim de verificar algum padrão de comportamento nos parâmetros α , ε e M , de forma a simplificar a implementação em *hardware* do cálculo destes parâmetros.
- ▷ Buscar um modelo baseado em fila que se aproxime melhor do modelo BMNC para casos com decisão suave. Para isto, pode-se, por exemplo, usar um modelo semelhante ao modelo QB, com uma alteração: ao se seleccionar aleatoriamente a fila e então a célula dentro da fila, não se repete no canal necessariamente o valor da bola que se encontra nesta célula, mas qualquer valor no alfabeto 2^q -ário. Neste caso, o valor da bola seleccionada influenciaria apenas na distribuição de probabilidade com que cada um dos 2^q valores seriam escolhidos para serem o próximo valor de ruído a ocorrer no canal.
- ▷ Otimizar o código LDPC para canais NBNDC-QB baseado em algoritmos *density evolution*.

APÊNDICE A

PROVA DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO DO NBNDQ-QB

Será provada a expressão recursiva para a função autocorrelação do modelo NBNDQ-QB dada em (2.30), seguindo a ideia da prova para o caso binário apresentada em [9]. A expressão da função de autocorrelação pode ser escrita como:

$$R[m] = \sum_{i=1}^{2^q-1} \sum_{j=1}^{2^q-1} ij P_{ij}^{(m)} \quad (\text{A.1})$$

em que

$$P_{ij}^{(m)} = P(Z_n = i, Z_{n+m} = j). \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.2) pode ser reescrita na forma:

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \cdots \sum_{z_{n+m-1}=0}^{2^q-1} P(Z_n = i, Z_{n+1} = z_{n+1}, \dots, Z_{n+m-1} = z_{n+m-1}, Z_{n+m} = j). \quad (\text{A.3})$$

Serão considerados três casos para m , a saber:

▷ Quando $m = 0$:

$$R[0] = \sum_{i=1}^{2^q-1} i^2 P(Z_n = i) = \mathbf{E}[Z^2]. \quad (\text{A.4})$$

▷ Para $m \leq M - 1$:

O comprimento do vetor do qual se calcula a probabilidade em (A.3) vale $n = m + 1$. Portanto, da expressão para a probabilidade conjunta do QBC em (2.27):

$$P_{QBC}^{(m+1)}(z^{m+1}) = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \prod_{r=0}^{\xi_\ell^{m+1}-1} \left((1-\varepsilon)\rho_\ell + r \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^m \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)} \quad (\text{A.5})$$

em que

$$\xi_\ell^{m+1} = \sum_{k=n}^{n+m} \delta_{z_k, \ell}. \quad (\text{A.6})$$

Define-se uma extensão de (A.6) em que se excluem algumas componentes de z^n da contagem do peso de ℓ :

$$\xi_\ell^r = \sum_{k=n}^{n+r-2} \delta_{z_k, \ell} + \delta_{z_{n+m}, \ell}. \quad (\text{A.7})$$

Será avaliada a soma na variável z_{n+m-1} em (A.3), observando que, para cada ℓ , existe uma sequência

z^n na qual o número de ocorrências de ℓ é $\xi_\ell^m + 1$:

$$\sum_{z_{n+m-1}=0}^{2^q-1} P(Z_n = i, Z_{n+1} = z_{n+1}, \dots, Z_{n+m} = j) = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \prod_{r=0}^{\xi_\ell^m-1} \left((1-\varepsilon)\rho_\ell + r \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right) \sum_{\ell=0}^{2^q-1} \left[(1-\varepsilon)\rho_\ell + ((\xi_\ell^m + 1) - 1) \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right]}{\prod_{k=0}^m \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}. \quad (\text{A.8})$$

O somatório na variável ℓ em (A.8) pode então ser avaliado como:

$$\sum_{\ell=0}^{2^q-1} \left[(1-\varepsilon)\rho_\ell + \xi_\ell^m \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right] = (1-\varepsilon) + m \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo-se (A.9) em (A.8), cancela-se o fator em m no denominador:

$$\sum_{z_{n+m-1}=0}^{2^q-1} P(Z_n = i, Z_{n+1} = z_{n+1}, \dots, Z_{n+m} = j) = \frac{\prod_{\ell=0}^{2^q-1} \prod_{r=0}^{\xi_\ell^m-1} \left((1-\varepsilon)\rho_\ell + r \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^{m-1} \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}.$$

O procedimento deve então ser repetido para todos os somatórios em (A.3), sempre cancelando fatores do denominador de (A.5) com fatores do seu numerador. Como são $m-1$ somas, ao final a variável k do produtório no denominador varia de 0 até 1 e o produtório em r varia de 0 a ξ_ℓ^2 . Se $i = j$, $\xi_\ell^2 = 2$ e a equação (A.5) pode ser reescrita como:

$$P_{ii}^{(m)} = \frac{\prod_{r=0}^1 \left((1-\varepsilon)\rho_i + r \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)}{\prod_{k=0}^1 \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)} = \frac{\frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} + (1-\varepsilon)\rho_i}{1 - \frac{M-2+\alpha}{M-1+\alpha}\varepsilon} \rho_i. \quad (\text{A.10})$$

Se $i \neq j$, $\xi_i^2 = 1$ e $\xi_j^2 = 1$, e (A.5) é simplificada da seguinte forma:

$$P_{ij}^{(m)} = \frac{(1-\varepsilon)\rho_i(1-\varepsilon)\rho_j}{\prod_{k=0}^1 \left((1-\varepsilon) + k \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \right)} = \frac{1-\varepsilon}{1 - \frac{M-2+\alpha}{M-1+\alpha}\varepsilon} \rho_i \rho_j. \quad (\text{A.11})$$

Portanto, substituindo-se (A.10) e (A.11) em (A.1):

$$\begin{aligned} R[m] &= \frac{1}{1 - \frac{M-2+\alpha}{M-1+\alpha}\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{2^q-1} i^2 \left(\frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \rho_i + (1-\varepsilon)\rho_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{2^q-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{2^q-1} ij(1-\varepsilon)\rho_i \rho_j \right] \\ &= \frac{1}{1 - \frac{M-2+\alpha}{M-1+\alpha}\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{2^q-1} \frac{i^2 \varepsilon \rho_i}{M-1+\alpha} + \sum_{i=1}^{2^q-1} \sum_{j=1}^{2^q-1} ij(1-\varepsilon)\rho_i \rho_j \right] \\ R[m] &= \frac{1}{1 - \frac{M-2+\alpha}{M-1+\alpha}\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \mathbf{E}[Z^2] + (1-\varepsilon)\mathbf{E}^2[Z] \right], \quad \text{para } m \leq M-1. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

▷ Para $m \geq M$, reescreve-se (A.3) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(m)} &= \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \cdots \sum_{z_{n+m-1}=0}^{2^q-1} P(Z_n^{n+m-M-1} = z_n^{n+m-M-1}) \times \\
&\quad \prod_{k=n+m-M}^{n+m-1} P(Z_k = z_k | Z_{k-1} = z_{k-1}, \dots, Z_{k-M} = z_{k-M}) \times \\
&\quad P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = z_{n+m-1}, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M})
\end{aligned} \tag{A.13}$$

em que $Z_n^{n+m-M-1}$ denota $(Z_n = i, \dots, Z_{n+m-M-1})$. Faz-se agora a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(m)} &= \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \cdots \sum_{z_{n+m-2}=0}^{2^q-1} P(Z_n^{n+m-M-1} = z_n^{n+m-M-1}) \times \\
&\quad \prod_{k=n+m-M}^{n+m-2} P(Z_k = z_k | Z_{k-1} = z_{k-1}, \dots, Z_{k-M} = z_{k-M}) \times \\
&\quad \sum_{\ell=0}^{2^q-1} [P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = \ell, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) \times \\
&\quad P(Z_{n+m-1} = \ell | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1})].
\end{aligned} \tag{A.14}$$

A probabilidade condicional de Z_{n+m-1} para $\ell = 0$ em (A.14) é dada por:

$$\begin{aligned}
&P(Z_{n+m-1} = 0 | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1}) = \\
&1 - \sum_{r=1}^{2^q-1} P(Z_{n+m-1} = r | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1}).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Defina-se uma variável S como sendo o somatório em ℓ de (A.14):

$$\begin{aligned}
S &\triangleq \sum_{\ell=0}^{2^q-1} [P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = \ell, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) \times \\
&P(Z_{n+m-1} = \ell | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1})].
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Substituindo (A.15) em (A.16), obtém-se:

$$\begin{aligned}
S = & P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) \times \\
& \left(1 - \sum_{r=1}^{2^q-1} P(Z_{n+m-1} = r | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1}) \right) + \\
& \sum_{\ell=1}^{2^q-1} [P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = \ell, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) \times \\
& P(Z_{n+m-1} = \ell | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S = & P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) + \\
& \sum_{\ell=1}^{2^q-1} [P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = \ell, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) - \\
& P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M})] \times \\
& P(Z_{n+m-1} = \ell | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1}). \tag{A.17}
\end{aligned}$$

O único valor de ℓ no somatório em (A.17) em que a diferença é não-nula é $\ell = j$, caso em que a diferença é a probabilidade de escolher a fila na primeira posição, $\varepsilon / (M - 1 + \alpha)$. Portanto:

$$\begin{aligned}
S = & P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) + \\
& \frac{\varepsilon}{M - 1 + \alpha} P(Z_{n+m-1} = j | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1}). \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão de S de (A.18) em (A.14), obtém-se:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(m)} = & \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \dots \sum_{z_{n+m-2}=0}^{2^q-1} P(Z_n^{n+m-M-1} = z_n^{n+m-M-1}) \times \\
& \prod_{k=n+m-M}^{n+m-2} P(Z_k = z_k | Z_{k-1} = z_{k-1}, \dots, Z_{k-M} = z_{k-M}) \times \\
& [P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) + \\
& \frac{\varepsilon}{M - 1 + \alpha} P(Z_{n+m-1} = j | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1})]
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(m)} &= \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \cdots \sum_{z_{n+m-2}=0}^{2^q-1} P(Z_n^{n+m-M-1} = z_n^{n+m-M-1}) \times \\
&\quad \prod_{k=n+m-M}^{n+m-2} P(Z_k = z_k | Z_{k-1} = z_{k-1}, \dots, Z_{k-M} = z_{k-M}) \times \\
&\quad P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = z_{n+m-M}) + \\
&\quad \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \cdots \sum_{z_{n+m-2}=0}^{2^q-1} P(Z_n^{n+m-M-1} = z_n^{n+m-M-1}) \times \\
&\quad \prod_{k=n+m-M}^{n+m-2} P(Z_k = z_k | Z_{k-1} = z_{k-1}, \dots, Z_{k-M} = z_{k-M}) \times \\
&\quad P(Z_{n+m-1} = j | Z_{n+m-2} = z_{n+m-2}, \dots, Z_{n+m-M-1} = z_{n+m-M-1}).
\end{aligned}$$

Comparando-se a segundo termo da última equação com (A.13), verifica-se que esse pode ser expresso como $P_{ij}^{(m-1)}$. Repetindo o procedimento descrito para a primeira parcela da última equação M vezes,

tem-se:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(m)} &= \sum_{z_{n+1}=0}^{2^q-1} \cdots \sum_{z_{n+m-M-1}=0}^{2^q-1} P(Z_n^{n+m-M-1} = z_n^{n+m-M-1}) \times \\
&\quad P(Z_{n+m} = j | Z_{n+m-1} = 0, \dots, Z_{n+m-M} = 0) + \\
&\quad \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \left(\sum_{k=1}^{M-1} P_{ij}^{(m-k)} + \alpha P_{ij}^{(m-M)} \right). \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Na primeira parcela de (A.19), o somatório é a probabilidade marginal de Z_n com relação a Z_{n+1} até $Z_{n+m-M-1}$, que resulta em ρ_i , a probabilidade de primeira ordem de i no QBC. A probabilidade condicional de Z_{n+m} da primeira parcela resulta em $(1-\varepsilon)\rho_j$, pois, se o estado da fila é o vetor nulo, um erro $Z_{n+m} = j$, com $j \neq 0$, somente poderá ser retirado da urna.

$$P_{ij}^{(m)} = (1-\varepsilon)\rho_i\rho_j + \frac{\varepsilon}{M-1+\alpha} \left(\sum_{k=1}^{M-1} P_{ij}^{(m-k)} + \alpha P_{ij}^{(m-M)} \right). \tag{A.20}$$

Portanto, substituindo-se (A.20) em (A.1):

$$R[m] = (1 - \varepsilon)\mathbf{E}^2[Z] + \frac{\varepsilon}{M - 1 + \alpha} \left(\sum_{k=1}^{M-1} R[m - k] + \alpha R[m - M] \right), \text{ para } m > M. \quad (\text{A.21})$$

APÊNDICE B

PROVA DA SIMETRIA DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO DO NBNDC

No Capítulo 2 foi proposto que, num canal com decisão suave com entrada binária e saída 2^q -ária, a matriz de transição $\mathbf{Q}^n = [P_{\text{NBNDC}}^{(n)}(y^n|x^n)]$ pode ser dividida em $2^{n(q-1)}$ sub-matrizes de tamanho $2^n \times 2^n$ em que as colunas são permutações umas das outras, bem como suas linhas, e portanto \mathbf{Q}^n é simétrica [39]. A prova é apresentada a seguir. Definam-se primeiramente os alfabetos $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ e $\mathcal{W} = \{0, 1, \dots, 2^q - 1\}$. Em seguida, dividam-se as colunas da matriz \mathbf{Q}^n em $2^{n(q-1)}$ classes $C_{w^n}, w^n \in \mathcal{W}^n$, definidas da seguinte forma:

$$C_{w^n} = \left\{ y^n \in \mathcal{Y}^n \mid y^n = \frac{w^n - (2^q - 1)v^n}{(-1)^{v^n}}, v^n \in \mathcal{X}^n \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Desta forma, cada y^n pode ser associado a um único w^n e a um único v^n cujas componentes são dadas por:

$$w_k = \min\{y_k, 2^q - 1 - y_k\} \quad (\text{B.2})$$

e

$$v_k = \begin{cases} 0, & \text{se } y_k \leq 2^{q-1} - 1 \\ 1, & \text{se } y_k > 2^{q-1} - 1. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

A partir de (2.11), nota-se que a probabilidade condicional de ordem n satisfaz:

$$P_{\text{NBND C}}^{(n)}(y^n | x^n) = P_{\text{NBND C}}^{(n)}(z^n(x^n, y^n)) \quad (\text{B.4})$$

em que

$$z_k(x_k, y_k) = \frac{y_k - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}}. \quad (\text{B.5})$$

Será provado a seguir que, dentro de uma classe C_{w^n} , as linhas e colunas de \mathbf{Q}^n são formadas por permutações de $P_{\text{NBND C}}^{(n)}(y^n | x^n) = P_{\text{NBND C}}^{(n)}(z^n(x^n, y^n))$, para $y^n \in C_{w^n}$. Para isto, basta provar que $z^n(x^n, y^n)$ é permutado dentro das linhas e colunas da sub-matriz formada por $y^n \in C_{w^n}$, ou seja:

1. Dentro de uma classe, existem apenas 2^n possibilidades para $z^n(x^n, y^n)$.
2. Se $x_1^n \neq x_2^n$, com y^n fixado, então $z^n(x_1^n, y^n) \neq z^n(x_2^n, y^n)$.
3. Se $y_1^n \neq y_2^n$, com x^n fixado, então $z^n(x^n, y_1^n) \neq z^n(x^n, y_2^n)$.

1) Associa-se inicialmente y^n a uma classe C_{w^n} a partir de (B.2) e a um vetor v^n usando-se de (B.3).

Substituem-se então as componentes do vetor $y^n \in C_{w^n}$ definido em (B.1) em (B.5):

$$z_k(x_k, y_k) = \frac{\frac{w_k - (2^q - 1)v_k}{(-1)^{v_k}} - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}} = (-1)^{x_k + v_k} w_k - (2^q - 1) \frac{(-1)^{v_k} v_k + x_k}{(-1)^{x_k}}. \quad (\text{B.6})$$

Uma vez que $x_k, v_k \in \mathcal{X}$, tem-se a partir de (B.6), que dentro de uma classe C_{w^n} , existem apenas duas possibilidades para $z_k(x_k, y_k)$, para cada k :

$$z_k(x_k, y_k) = \begin{cases} w_k, & \text{se } v_k = x_k \\ (2^q - 1) - w_k, & \text{se } v_k \neq x_k. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Portanto, em uma classe C_w^n há apenas 2^n possibilidades para $z^n(x^n, y^n)$. Desta maneira, o item 1 é satisfeito.

2) Suponha que, para $y^n \in \mathcal{Y}^n$ fixado e $x_1^n \neq x_2^n$, pode ocorrer $z_k(x_{1,k}, y_k) = z_k(x_{2,k}, y_k)$, para todo

k . Portanto:

$$\frac{y_k - (2^q - 1)x_{1,k}}{(-1)^{x_{1,k}}} = \frac{y_k - (2^q - 1)x_{2,k}}{(-1)^{x_{2,k}}}. \quad (\text{B.8})$$

A partir de (B.8), $x_1^n = x_2^n$, o que é uma contradição. Portanto o item 2 é satisfeito.

3) Suponha agora que, para $x^n \in \mathcal{X}^n$ fixado e $y_1^n \neq y_2^n$, $z_k(x_k, y_{1,k}) = z_k(x_k, y_{2,k})$, para todo k .

Portanto:

$$\frac{y_{1,k} - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}} = \frac{y_{2,k} - (2^q - 1)x_k}{(-1)^{x_k}}. \quad (\text{B.9})$$

Conclui-se a partir de (B.9) que $x_1^n = x_2^n$, o que novamente é uma contradição. Portanto, o item 3 é

satisfeito, o que completa a prova da proposição.

APÊNDICE C

PROVA DO LEMA 4.1

Conforme foi proposto no Capítulo 4, será provado que, dado um nó de função de variáveis binárias em um grafo de fatores, em que as mensagens incidentes são $[p_j(x=0), 1 - p_j(x=0)]$, com $j = 1, \dots, m$, e a mensagem de saída é $[p_0(x=0), 1 - p_0(x=0)]$, estando $p_j(x=0)$ associado ao nível de confiabilidade de x_j valer 0, a seguinte identidade é válida:

$$1 - 2p_0(x=0) = \prod_{i=1}^m (1 - 2p_i(x=0)). \quad (4.11)$$

A prova será feita por indução matemática. Para $m = 1$, a mensagem enviada deverá ser, de acordo com (4.7):

$$\begin{aligned} p_0(x=0) &= \sum_{x_1} f(x_0=1, x_1) \mu_{x_1 \rightarrow f} = \\ &= \delta(1 \oplus 0) (1 - p_1(x=0)) + \delta(1 \oplus 1) p_1(x=0) = p_1(x=0). \end{aligned} \quad (C.1)$$

Utilizando (C.1), a mensagem enviada deverá ser, para $m = 1$:

$$p_0(x=0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2p_1(x=0)) = p_1(x=0). \quad (C.2)$$

Portanto, como se obteve o mesmo resultado em (C.1) e em (C.2), o passo inicial da indução está provado. Será provado agora o passo indutivo. Assumir-se-á, pela hipótese indutiva, que a seguinte

igualdade é verdadeira:

$$\sum_{\sim x_0} f^{(m-1)}(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{m-1} (1 - 2p_i(x=0)) \quad (\text{C.3})$$

em que

$$f^{(m-1)}(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \triangleq \delta(x_0 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_{m-1}). \quad (\text{C.4})$$

Se m ramos de entrada são utilizados, a mensagem enviada é dada por:

$$\begin{aligned} p_0(x=0) &= \sum_{\sim x_0} f(x_0 = 1, x_1, \dots, x_m) \prod_{i=1}^m \mu_{x_i \rightarrow f} \\ &= (1 - p_m(x=0)) \sum_{\sim \{x_0, x_m\}} f(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = 0) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f} \\ &+ p_m(x=0) \sum_{\sim \{x_0, x_m\}} f(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = 1) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Utilizando a definição da função do nó de checagem em (C.5):

$$\begin{aligned} p_0(x=0) &= (1 - p_m(x=0)) \sum_{\sim x_0} \delta(1 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus 0) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f} \\ &+ p_m(x=0) \sum_{\sim x_0} \delta(1 \oplus x_1 \oplus \dots \oplus x_{m-1} \oplus 1) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Substituindo (C.4) em (C.6):

$$\begin{aligned} p_0(x=0) &= (1 - p_m(x=0)) \sum_{\sim x_0} f^{(m-1)}(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f_j} \\ &+ p_m(x=0) \sum_{\sim x_0} \left(1 - f_1^{(m-1)}(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1})\right) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f_j} \\ &= (1 - 2p_m(x=0)) \sum_{\sim x_0} f_1^{(m-1)}(x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1}) \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f_j} \\ &+ p_m(x=0) \sum_{\sim x_0} \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f_j}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Na segunda parcela do último membro de (C.7), está sendo somada uma distribuição de probabilidade

em todas as suas variáveis, e, portanto:

$$\sum_{\sim x_0} \prod_{i=1}^{m-1} \mu_{x_i \rightarrow f_j} = 1. \quad (\text{C.8})$$

Utilizando (C.8) e (C.3) em (C.7):

$$\begin{aligned} p_0(x=0) &= (1 - 2p_m(x=0)) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{m-1} (1 - 2p_i(x=0)) \right] + p_m(x=0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \prod_{i=1}^m (1 - 2p_i(x=0)) \end{aligned} \tag{C.9}$$

Rearranjando-se (C.9) fica provada, a igualdade em (4.11).

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Lin e D. Costello, *Error Control Coding*, Prentice Hall, 2^a ed., New Jersey, 2004.
- [2] T. M. Cover e J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2^a Ed., New York: Wiley, 2006.
- [3] E. N. Gilbert, “Capacity of a burst-noise channel”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 39, pp. 1253-1266, Set. 1960.
- [4] E. O. Elliot, “Estimates of error rates for codes on burst-noise channel”, *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 42, pp. 1977-1997, Set. 1963.
- [5] P. Sadeghi, R. A. Kennedy, P. B. Rapajic, e R. Shams, “Finite-state Markov modeling of fading channels,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 57-80, Set. 2008.
- [6] B. D. Fritchman, “A binary channel characterization using partitioned Markov chains”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 221-227, Abr. 1967.
- [7] F. Alajaji e T. Fuja, “A communication channel modeled on contagion”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 40, no. 6, pp. 2035-2041, Nov. 1994.
- [8] C. Pimentel, F. Alajaji, P. Melo, “A discrete queue-based model for capturing memory and soft-decision information in correlated fading channels”, *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 60, no. 6, pp. 1702-1711, Jun. 2012.

- [9] L. Zhong, "A binary burst-noise communication channel modeled by a finite queue: Information theoretic properties and applications to wireless communications". Kingston, Canadá, 2005. Tese de Doutorado - Queen's University.
- [10] L. Zhong, F. Alajaji and G. Takahara, "A binary communication channel with memory based on a finite queue," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 53, pp. 2815-2840, Ago. 2007.
- [11] L. Zhong, F. Alajaji, and G. Takahara, "A model for correlated Rician fading channels based on a finite queue," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 79-89, Jan. 2008.
- [12] C. Pimentel, T. H. Falk, e L. Lisbôa, "Finite-state Markov modeling of correlated Rician-fading Channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, pp. 1491-1501, Set. 2004.
- [13] S.-Y. Chung, G. Forney, T. J. Richardson, e R. Urbanke "On the design of Low-Density Parity-Check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit", *IEEE Comm. Letters*, vol. 5, no. 2, pp. 58-60, Fev. 2001.
- [14] J. Garcia-Frias e J. D. Villasenor, "Turbo decoding of Gilbert-Elliott channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, pp. 357-363, Mar. 2002.
- [15] J. Garcia-Frias, "Decoding of low-density parity-check codes over finite-state binary Markov channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, pp. 1840-1843, Nov. 2004.
- [16] A. W. Eckford, F. R. Kschischang, e S. Pasupathy, "Analysis of low-density parity check codes for the Gilbert-Elliott channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, pp. 3872-3889, Nov. 2005.
- [17] C. Nicola, F. Alajaji, e T. Linder, "Decoding LDPC codes over binary channels with additive

- Markov noise,” in *Proc. 9th Canadian Workshop Inform. Theory*, Montreal, Canada, Jun. 2005, pp. 187-190.
- [18] R. L. Dobrushin e M. S. Pinsker, “Memory increases transmission capacity”, *Probl. Pered. Inform.*, vol. 5, no. 1, pp. 94-95, 1969.
- [19] W. Kumwilaisak, C.-C. J. Kuo, e D. Wu, “Fading channel modeling via variable-length Markov chain technique,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 1338-1358, Maio 2008.
- [20] F. Babich, O. Kelly, e G. Lombardi, “Generalized Markov modeling for flat fading,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 547-551, Abr. 2000.
- [21] T. S. Rappaport, *Wireless Communications - Principles and Practice*: IEEE Press, New York and Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [22] C. Pimentel, *Comunicação Digital*, Brasport, Rio de Janeiro, 2007.
- [23] Y. R. Zheng e C. Xiao, “Improved models for the generation of multiple uncorrelated Rayleigh fading waveforms,” *IEEE Commun. Letters*, vol. 6, pp. 256-258, Jun. 2002.
- [24] L. Wilhelmsson e L. B. Milstein, “On the effect of imperfect interleaving for the Gilbert-Elliott channel”, *IEEE Trans. Commun.* , vol. 47, pp. 681-688, Maio 1999.
- [25] P. Sadeghi e P. Rapajic, “Capacity analysis for finite-state Markov mapping of Markov channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, pp. 833-840, Maio 2005.
- [26] C. Pimentel e I. F. Blake, “Modeling burst channels using partitioned Fritchman’s Markov models,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 47, no. 3, pp. 885-899, Ago. 1998.

- [27] N. Phamdo e F. Alajaji, "Soft-decision demodulation design for COVQ over white, colored, and ISI Gaussian channels," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 48, pp. 1499-1506, Set. 2000.
- [28] J. Singh, O. Dabeer, e U. Madhow, "On the limits of communication with low-precision analog-to-digital conversion at the receiver," *IEEE Trans. Comm.*, vol. 57, pp. 3629-3639, Dez. 2009.
- [29] F. Alajaji e N. Phamdo, "Soft-decision COVQ for Rayleigh-fading channels," *IEEE Commun. Letters*, vol. 2, pp. 162-164, Jun. 1998.
- [30] F. Swarts e H. C. Ferreira, "Markov characterization of channels with soft decision outputs," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 41, pp. 678-682, Maio 1993.
- [31] P. Kuczynski, A. Rigollé, W. H. Gerstacker, e J. B. Huber, "Hidden Markov modeling of error patterns and soft outputs for simulation of wideband CDMA transmission systems," *Int. J. Electron. Commun.*, vol. 58, pp. 256-267, 2004.
- [32] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile radio reception," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957-1000, 1968.
- [33] G. Taricco, "On the capacity of the binary input Gaussian and Rayleigh fading channel," *Eur. Trans. Telecommun.*, vol. 7, pp. 201-208, Mar.-Abr. 1996.
- [34] Y. Chen e C. Tellambura, "Infinite series representations of the trivariate and quadrivariate Rayleigh distribution and their applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, pp. 2092-2101, Dez. 2005.
- [35] P. Dharmawansa, N. Rajatheva e C. Tellambura, "On the trivariate Rician distribution," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 56, pp. 1993-1997, Dez. 2008.

- [36] R. W. Yeung, *Information Theory and Network Coding*, New York: Springer-Verlag, 2008.
- [37] C. Pimentel e F. Alajaji, “A Discrete Channel Model for Capturing Memory and Soft-Decision Information: A Capacity Study”, *Proc. of the Comm. Th. Symp.*, IEEE International Conference on Communications, Dresden, Jun. 2009.
- [38] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*, M.I.T. Press, 1963.
- [39] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, New York: Wiley, 1968.
- [40] J. Pearl, *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*, Morgan Kaufmann Publishers: San Mateo, CA, 1988.
- [41] S. Verdú e T. S. Han, “A general formula for channel capacity,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 40, pp. 1147-1157, Jul. 1994.
- [42] R. M. Gray, *Entropy and Information Theory*, New York: Springer-Verlag, 1990.
- [43] W. E. Ryan e S. Lin, *Channel Codes: Classical and Modern*, Cambridge University Press, 2009.
- [44] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication”, *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423 e 623 656, Jul. e Out. 1948.
- [45] F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Toronto: McGraw Hill, 1974.
- [46] X. Y. Hu, E. Eleftheriou, D. M. Arnold, “Regular and irregular progressive edge growth Tanner graphs,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 1, pp. 386-398, Jan. 2005.
- [47] S. Shahidi, F. Alajaji e T. Linder, “Exploiting memory and soft-decision information in channel optimized quantization for correlated fading channels,” in *Proc. 12th Canadian Workshop Inform. Theory*, Kelowna, BC, Maio 2011.