

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



RAFAEL FERREIRA DA COSTA COELHO



O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER
APLICADO NA SOLUÇÃO DE UM
CONTROLADOR PI EM PROCESSOS
INDUSTRIAIS

VIRTUS IMPAVIDA

RECIFE, DEZEMBRO DE 2010.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER
APLICADO NA SOLUÇÃO DE UM
CONTROLADOR PI EM PROCESSOS
INDUSTRIAIS

RAFAEL FERREIRA DA COSTA COELHO

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de
Mestre em Engenharia Elétrica

ORIENTADOR: RONALDO RIBEIRO BARBOSA DE AQUINO, D.Sc..

Recife, Dezembro de 2010.

Catálogo na fonte
Bibliotecário Marcos Aurélio Soares da Silva, CRB-4 / 1175

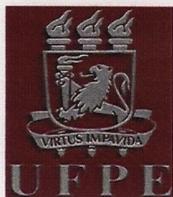
C672t Coelho, Rafael Ferreira da Costa.
O teorema de Hermite Biehler aplicado na solução de um controlador PI em processos industriais / Rafael Ferreira da Costa Coelho. - Recife: O Autor, 2010.
xiv, 85 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Ribeiro Barbosa de Aquino.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2010.
Inclui Referências e Apêndice.

I. Engenharia Elétrica. 2. Sistemas de Controle. 3. Automação Industrial. 4. Sistema Motrizes. 5. Teorema de Hermite Biehler. 6. Sistema com Retardo. I. Aquino, Ronaldo Ribeiro Barbosa de (Orientador). II. Título.

621.3 CDD (22. ed.)

UFPE
BCTG/2011-068



Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DO MESTRADO ACADÊMICO DE

RAFAEL FERREIRA DA COSTA COELHO

TÍTULO

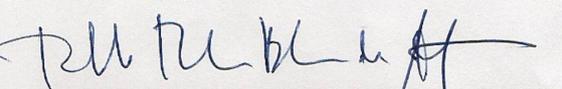
**“O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER APLICADO NA SOLUÇÃO DE
UM CONTROLADOR PI EM PROCESSOS INDUSTRIAIS”**

A comissão examinadora composta pelos professores: RONALDO RIBEIRO BARBOSA DE AQUINO, DEESP/UFPE, FRANCISCO DE ASSIS DOS SANTOS NEVES, DEESP/UFPE e ZANONI DUEIRE LINS, DEESP/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **RAFAEL FERREIRA DA COSTA COELHO APROVADO.**

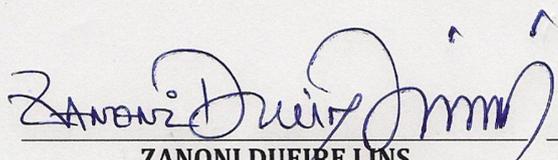
Recife, 21 de dezembro de 2010.



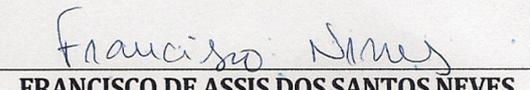
RAFAEL DUEIRE LINS
Coordenador do PPGEE



RONALDO RIBEIRO BARBOSA DE AQUINO
Orientador e Membro Titular Interno



ZANONI DUEIRE LINS
Membro Titular Externo



FRANCISCO DE ASSIS DOS SANTOS NEVES
Membro Titular Interno

*"Lucas e Pat,
Mãe, Xanda e Pai."*

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela sua presença constante em minha vida.

A minha esposa, Patrícia, por deixar conhecer o seu amor e a cada dia poder enxergar um mundo melhor. E ao meu filho, Lucas, que está no ventre da minha esposa, crescendo, crescendo e crescendo.

A minha mãe, Marinalva, por todo amor imenso e incondicional. A minha irmã, Alexandra, pelo seu carinho e compreensão em todos os momentos. Ao meu Pai, por ter me ensinado a ser paciente e a solucionar as adversidades, pacificamente.

Aos meus sogros, que participaram ativamente em todas as etapas da minha vida, me ajudando com toda calma e serenidade.

Ao professor Ronaldo Aqüino, pela orientação, paciência e confiança em mim depositada, além da amizade construída em toda a trajetória desde a graduação. Um orientador, sem dúvida, de virtudes memoráveis e indelévels. Um verdadeiro PAI.

Aos que fazem o LEEQE, em especial, a minha amiga Priscila pela solução técnica de vários problemas de automação. A Filipe e a Jorge Rafael por todo apoio inicial nesse trajeto.

A Gustavo e a Fabrício, membros do GEPAE, pela disponibilidade e solução de várias incógnitas no início do Mestrado.

A todos os professores, funcionários e amigos que contribuíram de forma direta ou indireta, principalmente, Milde Maria e Marcelo Cabral para a realização deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

RAFAEL FERREIRA DA COSTA COELHO

Universidade Federal de Pernambuco

21 de Dezembro de 2010

Sempre que você se propõe a fazer algo, você consegue. O importante é nunca dizer não, não importa o tamanho da dificuldade que existe no caminho. O homem sempre pode superar seus limites.

Cristopher Tronco

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER APLICADO NA SOLUÇÃO DE UM CONTROLADOR PI EM PROCESSOS INDUSTRIAIS

Rafael Ferreira da Costa Coelho

Dezembro/2010

Orientador: Ronaldo Ribeiro Barbosa de Aquino, D.Sc..

Área de Concentração: Processamento de Energia

Palavras-chaves: Sistemas de Controle, Automação Industrial, Sistemas Motrizes, Teorema de Hermite Biehler, Sistemas com retardo

Número de páginas: 85

Uma série de normas sobre sistemas de qualidade, denominada ISO 9000, estimularam as indústrias mundiais a garantirem padrões rígidos para se tornarem competitivos no mercado internacional. Assim, obter um controle eficiente sobre as máquinas e processos é extremamente necessário para obtenção de um desempenho satisfatório no aspecto de sistemas de controle. Nesta dissertação, apresenta-se uma sistemática para solução de um conjunto de parâmetros do controlador proporcional-integral (PI) para estabilização de determinada planta, sobretudo a sistemas com retardo onde a complexidade do sistema aumenta. Assim, é apresentado o Teorema de Hermite Biehler, onde é possível encontrar a solução através de uma sistemática, de maneira contrária aos métodos convencionais, como o critério de Routh-Hurwitz que esbarra em desigualdades polinomiais de difícil solução. É mostrada, também, a modelagem matemática apresentando o Método do Relé, e que alguns sistemas típicos industriais podem ser caracterizados em três categorias. Por fim, realizá-se um experimento prático, de maneira a consolidar toda a abordagem da dissertação.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering

**THE HERMITE BIEHLER THEOREM APPLIED TO
SOLVE A PI CONTROLLER IN INDUSTRIAL
PROCESSES**

Rafael Ferreira da Costa Coelho

December/2010

Supervisor: Ronaldo Ribeiro Barbosa de Aquino, D.Sc..

Area of Concentration: Energy processing

Keywords: Control Systems, Industrial Automation, Driving Systems, Hermite Biehler Theorem, Delayed Systems.

Number of pages: 85

A series of standards on quality systems, called ISO 9000, encouraged the world industries to ensure strict standards to become competitive in international market. Thus, to obtain an efficient control over machines and processes, it is extremely necessary to achieve a satisfactory performance in the aspect of control systems. In this work, a systematic method is presented to define a set of parameters of proportional-integral (PI) controller to stabilize a given plant, especially, the delayed systems where the system's complexity increases. Therefore, the Hermite Biehler Theorem is discussed, where one can find the solution through a systematic method, which is contrary to conventional methods such as Routh-Hurwitz stability criterion that leads to polynomial inequalities of difficult solutions. Furthermore, the mathematical model of the relay method applied to some typical industrial systems is shown, which can be characterized into three categories. Finally, a practical experiment is carried out in order to consolidate the whole approach of the dissertation.

CONTEÚDO

LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE NOMENCLATURAS E SÍMBOLOS	xiv
1 ASPECTOS GERAIS	1
1.1 Introdução	1
1.2 Motivação para o teorema de Hermite-Biehler - Sistemas com Atraso . .	3
1.3 Objetivos	4
1.4 Organização do Texto	4
2 MÉTODO DO RELÉ - ATV	6
2.1 Análise do Projeto	7
2.2 Projeto Experimental	10
2.3 Função de Transferência Aproximada: Modelagem no Domínio da Frequência	12
2.4 Formatos da Resposta do Relé	12
2.4.1 Formatos	13
2.4.2 Tipos de Função de Transferência e Método de Identificação	16
2.5 Análise de Parametrização e Eficiência do Controlador	22
2.5.1 Controlador PI	23
2.5.2 Parâmetros de Desempenho de um Controlador	24
2.5.3 Índices de Desempenho	25
3 O TEOREMA DE HERMITE-BIEHLER	27

3.1	Conceitos Básicos	27
3.2	O Teorema de Hermite-Biehler para Polinômios de Hurwitz	28
3.3	Exemplos e aplicações	28
3.4	Motivação para Generalizar o Teorema de Hermite Biehler	32
3.5	Generalização do Teorema de Hermite-Biehler	35
3.5.1	Distribuição de Raízes e Fase Acumulada Líquida	35
3.5.2	Assinaturas Reais e Imaginárias Associadas a um Polinômio Real	36
3.5.3	O Teorema de Hermite-Biehler Generalizado	37
4	INTRODUÇÃO A ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES - SEM RETARDO, UTILIZANDO O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER	38
4.1	Caracterização de Todos os Ganhos Estabilizantes	39
4.2	Exemplos e Aplicações	43
4.3	Caracterização de Todos os Controladores PI	45
4.4	Exemplos e Aplicações	48
5	INTRODUÇÃO A ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES - COM RETARDO, UTILIZANDO O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER	52
5.1	Equações Características para Sistemas com Retardo	53
5.2	Aproximação de Padè	56
5.2.1	Exemplos e Aplicações	57
5.3	"Teste" da Estabilidade de um Processo	59
5.4	Exemplos e Aplicações	62
6	RESULTADOS PRÁTICOS	64
6.1	Descrição da Bancada de Bombeamento	64
6.1.1	A Bancada de Bombeamento	65
6.2	Sistema de Supervisão e Controle	66
6.3	Aplicação - Controle de Vazão de um Sistema de Bombeamento	67
6.3.1	Modelagem Matemática	67
6.3.2	Parametrização do Controlador PI	72
7	CONCLUSÃO	77

7.1 Trabalhos Futuros	77
Apêndice A UTILIZAÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES PARA O ESTREITAMENTO DA FAIXA DE VARREDURA DE k	79
A.1 Exemplo de Aplicação	80
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82

LISTA DE FIGURAS

2.1	Elemento não linear na realimentação.	7
2.2	Relação Entrada - Saída de um relé ideal(on-off).	8
2.3	Gráfico de Nyquist da planta $G(s)$ e a função descritiva $-\frac{1}{N(a)}$	9
2.4	(A) Diagrama de bloco para um sistema com relé e (B) saída do sistema para um relé ideal.	11
2.5	Sistema para simulação no SIMULINK.	13
2.6	Saída do relé para SPOTM com variação de D/τ	14
2.7	Saída do relé para sistemas de várias ordens com variação de D/τ	15
2.8	Classificação quantitativa de modelagens diferentes(categorias de 1 a 3) baseado na integral do erro absoluto da resposta em frequência.	16
2.9	Expressões analíticas da resposta do relé a SPOTM: (A)resposta original e (B)versão alinhada.	17
2.10	Saída do método do relé com variação da razão D/τ	20
2.11	Relação entre a constante de tempo normalizada τ_G/P_u e o tempo morto pela constante de tempo($\varepsilon = D/\tau$) para processos de Segunda Ordem.	20
2.12	Especificações da resposta transitória de um sistema de controle.	25
3.1	Propriedade do entrelaçamento.	29
3.2	Entrelaçamento falha em polinômios não Hurwitz.	32
3.3	Sistema de controle com realimentação.	33
4.1	Resposta do sistema com $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.5$, para $SP = 1$	51
5.1	Representação do Tempo Morto.	53
5.2	Diagrama de blocos do sistema com retardo.	53
5.3	Múltiplos Delays.	54

5.4	Resposta do sistema com atraso e controlado com PI usando $G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}e^{-5s}$ com $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.5$	56
5.5	Resposta do sistema com atraso e controlado com PI usando $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.25$	59
6.1	Bancada de Bombeamento.	66
6.2	Bancada de Bombeamento.	66
6.3	Diagrama de Blocos do Sistema Físico(Bancada da Bomba).	67
6.4	Gráfico da vazão de saída no tempo.	68
6.5	Gráfico da variação de frequência no tempo.	68
6.6	Sistema de Blocos no SIMULINK.	69
6.7	Sinal do Inversor de Frequência - 1.	70
6.8	Vazão de saída devido a aplicação do sinal da Figura 6.7.	70
6.9	Sinal do Inversor de Frequência - 2.	71
6.10	Vazão de saída devido a aplicação do sinal da Figura 6.9	71
6.11	Gráfico de saída de vazão com quatro $SP's$ distintos a cada 120s(1800, 1600,1400 e 1200).	72
6.12	Comportamento de $W'(\omega^2)$ em função da variação de ω	74
6.13	Comportamento de $D(s)$ em função da variação de k_i no intervalo estável considerado.	75
6.14	Gráfico de saída de vazão com quatro $SP's$ distintos a cada 120s (1800, 1600,1400 e 1200).	76

LISTA DE TABELAS

6.1	Parâmetros de desempenho de Tyreus-Luyben	73
6.2	Parâmetros de desempenho médio utilizando o toolbox para entrada dos parâmetros	75

Nomenclatura

ω_u Frequência crítica

τ Constante de tempo do processo

ATV Variação da Autosintonia - *Autotuning Variation*

D Tempo morto - *Delay*

IAE Integral do erro absoluto - *Integral of Time Multiplied by Absolute Error*

ITAE Integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo - *Integral of Time Multiplied by Absolute Error*

K Ganho em regime permanente

K_c Ganho do controlador

k_i Ganho integral do controlador

k_p Ganho proporcional do controlador

M_p Sobre-Sinal Máximo

P_u Período crítico

SPOTM Sistemas de Primeira Ordem com Tempo Morto

SSOTM Sistemas de Segunda Ordem com Tempo Morto

t_d Tempo de atraso

T_i Constante de tempo do integrador

t_p Tempo de pico

t_s Tempo de acomodação

1 ASPECTOS GERAIS

1.1 Introdução

Nos processos de manufatura, o controle de produção exige parâmetros de qualidade rígidos na operação do processo. Muitos fatores contribuem para o controle ineficiente do processo, e a sintonia do controlador é bastante significativa.

É neste cenário que a série de normas sobre sistemas de qualidade denominada ISO 9000 tem conduzido as ações industriais mundiais para melhoria e garantia da qualidade. Esta série, composta por cinco normas numeradas de 9000 a 9004, apresenta condições bastante exigentes que permitem à indústria apresentar produtos e serviços competitivos em nível internacional, trazendo ao ambiente industrial a necessidade de um controle quase que total sobre máquinas e processos. Isto dá à engenharia de controle a obrigação de fornecer soluções teóricas e práticas para atender as exigências das normas industriais nacionais e internacionais [1].

Em processos industriais, mais que 97% dos controladores são de algoritmo tipo PID [2], porém, na grande maioria, são controladores PI. Após 60 anos da publicação das regras de Ziegler-Nichols [3], numerosos artigos publicados sobre métodos de sintonia e vários livros de textos com 600 a 1200 páginas [4], provavelmente, seria esperado que os controladores PID tivessem alcançado as expectativas dos usuários.

Infelizmente, isto não é o caso. As pesquisas de Bialkowski [5], Ender [6], McMillan [7], Hersh and Johnson [8], e Desborough e Miller [2] mostram que:

1. Levantamento de 2000 malhas industriais [5].
 - Somente 20% das malhas de controle trabalham bem;
 - 50% têm uma performance indesejável devido a sintonia do controlador e problemas de válvulas de controle;
 - 30% também têm uma baixa performance devido a projeto de sistema de controle do processo;
2. Processos Industriais [6]
 - 30% das malhas de controle operam no modo manual;
 - 20% dos controladores usam parâmetros de fábrica;
 - 30% têm baixa performance devido aos sensores e problemas com válvulas de controle;
3. Processos Químicos Industriais [7]
 - 50% das malhas de controle apresentam problemas com válvulas de controle e parametrização do controlador;
4. Manufatura e processos industriais [8]
 - Engenheiros e gerentes citaram a sintonia de um controlador PID como um problema complexo;
5. Refinarias e artigos industriais sobre 26000 controladores [2]
 - 32% das malhas são classificadas como excelente ou aceitável;
 - 32% dos controladores foram classificados como péssimos, indicando que a resposta do processo é lenta ou oscilatória;

Pesquisas mostram que a eficiência do controle do processo é, realmente, "não tão boa quanto você pensa"[6], e a situação permanece praticamente a mesma de uma década atrás [2]. Esta realidade leva-nos a reconsiderar como prioridade as pesquisas em controle de processos. Assim, solucionar esta dificuldade, é conseguir estreitar a lacuna entre a prática e

a teoria da engenharia de controle.

1.2 Motivação para o teorema de Hermite-Biehler - Sistemas com Atraso

Encontrar o conjunto PI estabilizante de um malha de controle é considerada uma árdua tarefa. Mesmo existindo um grande número de pesquisas e uma extensa literatura sobre controladores PID, a enorme quantidade de regras e de suposições com relação a parametrização é muitas vezes ineficiente.

Além disso, os métodos clássicos como a Técnica do Lugar das Raízes, o critério de estabilidade de Nyquist e o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, não fornecem uma caracterização analítica da solução ou uma resolução simples. Na realidade, os dois primeiros métodos apresentam uma abordagem gráfica da solução. E o último método apresenta uma solução analítica, porém esbarra em desigualdades polinômiais que se tornam cada vez mais complexas com a ordem do problema.

Uma linha de pesquisa direcionada à resolução desse problema tomou como ponto de partida a utilização do teorema de Hermite-Biehler como critério de estabilidade [9]. O teorema verifica a existência ou não de zeros com parte real positiva em um polinômio $\delta(s)$ através da verificação de uma condição de entrelaçamento. Uma generalização do teorema de Hermite-Biehler [10] permite não só determinar a estabilidade, mas também, a assinatura (diferença entre o número de zeros no semiplano esquerdo e o semiplano direito). Este resultado pode ser obtido através de um somatório de sinais da parte real de $\delta(j\omega)$ calculada nos zeros da parte imaginária, ou através de um somatório de sinais da parte imaginária de $\delta(j\omega)$ calculada nos zeros da sua parte real.

Quando a planta a ser estabilizada possui atrasos de transporte, surgem funções características do tipo quase-polinomial, isto é, aparecem termos do tipo e^{Ds} , sendo D uma constante real. Pontryagin desenvolveu uma extensão do teorema de Hermite-Biehler aplicável a quase-polinômios [11] onde é possível determinar a estabilidade do sistema.

1.3 Objetivos

Dentre os principais objetivos desse trabalho, pode-se enumerar:

1. Uma sistemática para modelagem matemática de processos típicos industriais, utilizando técnicas modernas baseada na identificação do sistema;
2. Apresentação do teorema de Hermite-Biehler para solução de sistemas com atraso;
3. A solução de um conjunto de parâmetros PI para estabilização do processo industrial;
4. Os resultados práticos e experimentais de um sistema físico (sistema de bombeamento);

1.4 Organização do Texto

Este trabalho está dividido em 7 capítulos. O primeiro capítulo consta de uma introdução sobre controladores industriais, enfatizando a abordagem de um novo teorema para encontrar os parâmetros de um controlador PI.

No segundo capítulo é realizada a modelagem matemática de processos típicos utilizando a sistemática do método do relé e a identificação da função de transferência baseada na observação.

No terceiro capítulo é apresentado o Teorema de Hermite-Biehler e sua generalização, com algumas definições, lemas e teoremas.

No quarto capítulo é feita uma aplicação do teorema de Hermite-Biehler, onde é descrito como encontrar a solução de um sistema sem retardo ao inserir um controlador proporcional. Esse capítulo é de suma importância, pois os resultados são utilizados para solução completa de um controlador proporcional integral, aplicado a sistemas com retardo.

No quinto capítulo é feita uma introdução à estabilização de sistemas com atraso, sendo apresentada uma abordagem teórica sobre sistemas com retardo, bem como, o "teste da estabilidade" de um processo.

No sexto capítulo é realizado um teste prático utilizando as definições apresentadas em

capítulos anteriores. Este experimento tem notória contribuição nesta dissertação, pois o mesmo apresenta uma diretriz básica para sistemas industriais.

O capítulo 7 apresenta as principais conclusões e contribuições, além de sugerir temas para continuidade deste trabalho. O texto se encerra com a apresentação das referências bibliográficas e apêndices.

É importante enfatizar que este trabalho não apresenta demonstrações de certos teoremas, bem como detalhes sobre algumas definições. São somente indicadas as referências bibliográficas, dando-se ênfase a uma sistemática de novos métodos profundamente pesquisados e repletos de artigos neste último século.

2

MÉTODO DO RELÉ - ATV

Astrom e Hagglund [12] sugeriram o teste do relé [13] para geração de uma oscilação sustentada, porque seria possível determinar a frequência crítica (ω_u) e o ganho crítico (P_u). Luyben [14] popularizou o método de "ATV" (autotune variation) que representa uma ferramenta útil e eficiente para a identificação do sistema.

A motivação para usar o ATV nasceu de um estudo em colunas de destilação. A coluna de destilação é de grande importância em processos químicos industriais. É extremamente difícil obter uma função de transferência para modelos de colunas não lineares. Foi tentado utilizar o teste de pulso e degrau. Porém, o sistema tem em uma constante de tempo extremamente longa, $\tau = 340h$. Além disso, muitos desvios ocorrem no modelo linear [15], quando a magnitude da variável de entrada é modificada. Luyben mostra que um simples teste do relé providencia um caminho efetivo para determinar modelos lineares para tais processos [16, 17]. Isto tornou-se um procedimento padrão em controle de processos químicos. Wang et al. [18] discutiram vários aspectos do teste do relé.

As vantagens do relé [19] são:

1. Identifica a informação do processo em torno da frequência importante, que é a frequência crítica (a frequência onde o ângulo de fase é $-\pi$).
2. É um teste de malha fechada; portanto, o processo não mudará do ponto de operação nominal.

3. Para processos com uma constante de tempo longa, é um método mais eficiente do que o teste convencional do degrau e do pulso. O tempo do experimento é, aproximadamente, de 2 a 4 vezes o período crítico.

2.1 Análise do Projeto

A autosintonia do teste do relé pode ser analisada via diagrama de blocos. Considere um sistema realimentado (Figura 6.3) onde $G(s)$ é uma função de transferência linear e N é um elemento não linear. Se o sinal de entrada $e(t)$ para o elemento não linear é uma onda senoidal, têm-se:

$$e(t) = a \text{sen}(\omega t) \quad (2.1)$$

onde a é a magnitude da onda senoidal. Portanto, o sinal de saída $u(t)$ do elemento não linear (Figura 2.2A) é uma onda quadrada (Figura 2.2). Para a análise de sistemas de controle com base na teoria linear [20], a transformada de Fourier é bastante útil. A saída do elemento não linear pode ser expressa como:

$$u(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \text{sen}(n\omega t) \quad (2.2)$$

onde,

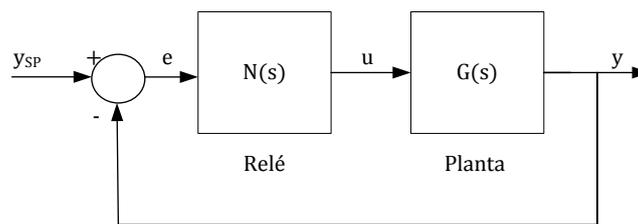


Figura 2.1: Elemento não linear na realimentação.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) d(\omega t) \quad (2.3)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.4)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \text{sen}(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.5)$$

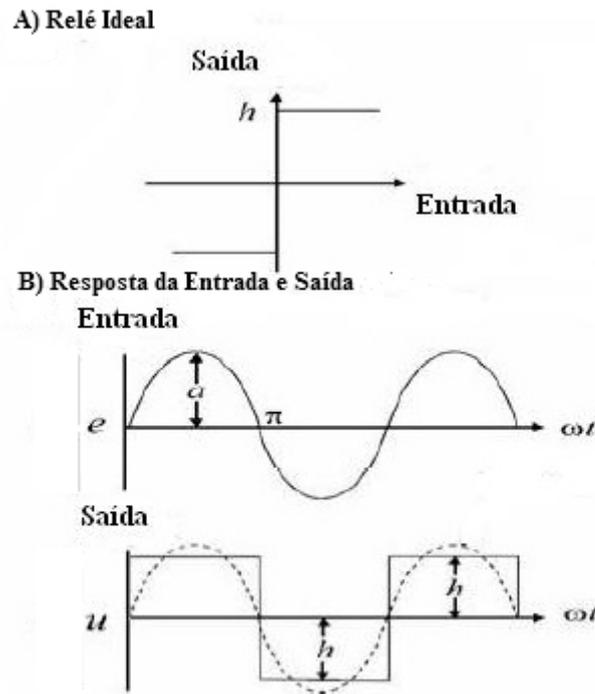


Figura 2.2: Relação Entrada - Saída de um relé ideal(on-off).

Como a saída $u(t)$ tem simetria ímpar, os coeficientes A_0 a A_n são iguais a zero (isto é, $A_0 = 0$ e $A_n = 0, \forall n$). Portanto, a equação 2.1 torna-se:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen}(n\omega t) \quad (2.6)$$

Adicionalmente, se o relé ideal é aplicado (Figura 2.2), os coeficientes de B_n tornam-se:

$$B_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{4h}{\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

A análise por função descritiva [15] é bastante útil no domínio da frequência para sistemas não lineares. Somente a harmônica principal é aplicada, porque a planta é considerada como um filtro passa baixa, filtrando as harmônicas de alta frequência. Isto significa que somente o primeiro coeficiente de Fourier é utilizado para análise no domínio da frequência. Assim, a relação entrada saída, será:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4h}{n\pi} \text{sen}(n\omega t) \\ e(t) &= a \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

Considerando $u(t) = \frac{4h}{\pi} \text{sen}(\omega t)$ somente a fundamental

$$N(a) = \frac{4h}{\pi a} \quad (2.8)$$

Como uma oscilação sustentada é gerada do método do relé, a frequência de oscilação corresponde ao limite da estabilidade, isto é:

$$1 + G(j\omega_u)N(a) = 0 \quad (2.9)$$

Esta equação pode ser calculada através do gráfico de Nyquist de $G(s)$ e a reta $-\frac{1}{N(a)}$ (Figura 2.3)

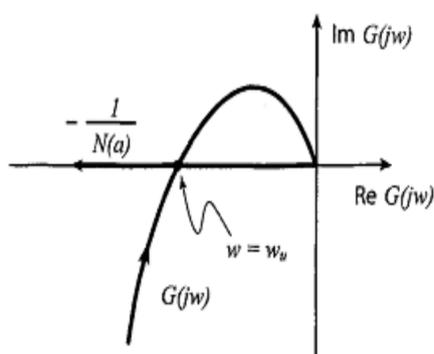


Figura 2.3: Gráfico de Nyquist da planta $G(s)$ e a função descritiva $-\frac{1}{N(a)}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} |G(j\omega_u)| &= \frac{\pi a}{4h} \\ &\triangleq \frac{1}{K_u} \\ \text{arg}G(j\omega_u) &= -\pi \end{aligned} \quad (2.10)$$

Parte do sucesso da identificação vem do fato de que K_u e ω_u podem ser computados diretamente dos resultados experimentais (Figura 2.2).

O resultado da Equação 2.10 claramente indica que o ganho crítico K_u é estimado da amplitude da razão das duas ondas senoidas em uma dada frequência ω_u . Obviamente, a saída do relé é uma onda quadrada ao invés de uma onda senoidal. Isto leva-nos a erros na estimação do ganho crítico, pois de acordo com a Figura 2.2B, a área pontilhada é justamente a harmônica principal.

2.2 Projeto Experimental

Considere um sistema a relé onde $G(s)$ é a função de transferência do processo, y é variável de saída, y_{set} é o SP, e é o erro e u a variável manipulada. Um relé on-off(ideal) é inserido na malha. O método do relé de Astrom - Hagglund é baseado na observação: quando a saída atrasa de $-\pi$ radianos, o sistema de malha fechada provavelmente oscilará com período P_u . A figura 2.4 mostra como o relé trabalha. Um relé de magnitude h é inserido na malha. Inicialmente, a entrada u é aumentada de h . Quando a saída y começa a aumentar(depois de um tempo morto D), o relé chaveia para posição oposta, $u = -h$. Como o ângulo de atraso é de $-\pi$, um ciclo limite de período P_u resultará. O período do ciclo limite é o período crítico. Portanto, a frequência deste experimento do relé é:

$$\omega_u = \frac{2\pi}{P_u} \quad (2.11)$$

Expandindo em série de Fourier, a amplitude a pode ser considerada como o resultado do primeiro harmônico da saída do relé. Portanto, o ganho crítico pode ser aproximado como [21] e [22].

$$K_u = \frac{4h}{\pi a} \quad (2.12)$$

onde h é a altura do relé e a é a amplitude da oscilação. Aqueles valores podem ser usados diretamente para encontrar os parâmetros do controlador.

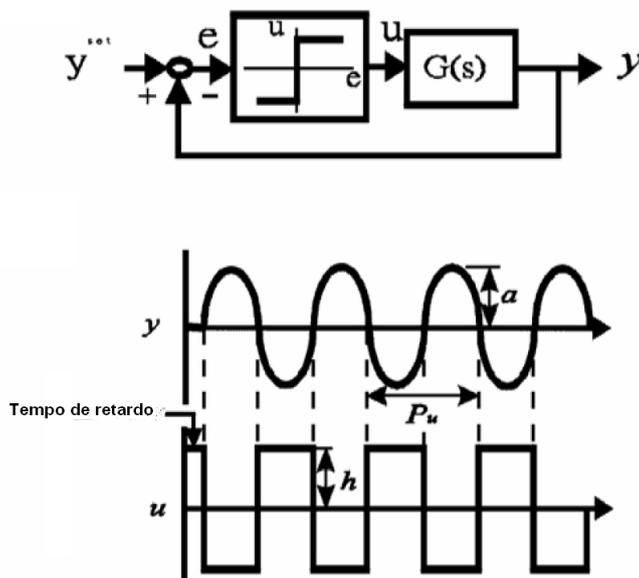


Figura 2.4: (A) Diagrama de bloco para um sistema com relé e (B) saída do sistema para um relé ideal.

Note que as equações 2.11 e 2.12 são valores aproximados de ω_u e K_u .

O método do relé pode ser realizado manualmente (sem qualquer autosintonia). O procedimento requer os seguintes passos:

1. Torne o sistema em regime permanente.
2. Faça um pequeno aumento (aproximadamente 5%) na variável manipulada, na altura h do relé. A magnitude da mudança depende da sensibilidade do processo. Valores típicos estão entre 3 a 10%.
3. Assim, logo que a saída cruza o SP , a variável manipulada muda de sinal.
4. Repita os passos de 1 a 3 até que uma oscilação sustentada é observada (Fig. 2.4)
5. Adquirir o valor de P_u do ciclo e compute o valor de K_u da equação 2.12.

Este procedimento é relativamente simples e eficiente. Fisicamente, implica movimentar a variável manipulada *contra* o processo. Considere um sistema com K (ganho do processo) positivo, em regime permanente (Fig. 2.4). Quando se incrementa h , a variável de saída tende a aumentar também. Quando a variável de saída é aumentada acima do valor do SP ,

um chaveamento é realizado na direção oposta. Isto significa que o relé age no sentido de tornar a saída abaixo do SP . Contudo, assim que a saída estiver está abaixo do SP , a entrada é novamente chaveada. Conseqüentemente, um ciclo continuo é obtido. Adicionalmente, em muitos casos, é possível obter a informação necessária para sintonia do controlador.

2.3 Função de Transferência Aproximada: Modelagem no Domínio da Frequência

Após o método do relé, calculados K_u e ω_u , é possível obter os parâmetros do controlador. Alternativamente, é possível calcular a função de transferência aproximada. Outra informação útil é o tempo morto(D) e o ganho em regime permanente(K).

Em teoria, o ganho em regime permanente pode ser obtido do processo. Um caminho simples é encontrar K e comparar os valores de entrada e saída em dois diferentes estados. Isto é:

$$K = \Delta y / \Delta u \quad (2.13)$$

onde Δy significa a mudança na variável controlada e Δu a mudança na variável manipulada. O tempo morto pode ser extraído da parte inicial do teste do relé. Assim, é simplesmente o tempo que ele leva para a resposta da saída y responder a mudança na variável manipulada(u)(Fig.2.4).

2.4 Formatos da Resposta do Relé

Conforme mencionado, o teste do relé de Åström and Hägglund é uma ferramenta útil na identificação dos sistemas, porque ele identifica dois parâmetros importantes para sintonia do controlador, ω_u e K_u . Tipicamente, a regra de sintonia de Ziegler-Nichols é aplicada porque ω_u e K_u são as informações requeridas para parametrizar um controlador PID. Infelizmente, uma performance satisfatória não é sempre garantida porque nenhuma regra de sintonia trabalha bem para toda a faixa da razão D/τ mesmo para um processo tipo SPOTM. Luyben demonstra que, para processos SPOTM, diferentes razões D/τ requerem diferentes formatos

no teste do relé e este formato pode ser utilizado para encontrar a função de transferência a partir de diferentes técnicas, conseqüentemente.

2.4.1 Formatos

Para caracterizar um modelo e identificar seus parâmetros, processos com diferentes ordens(primeira, segunda, terceira, oitava, décima quinta e vigésima ordem) e a razão do tempo morto com a constante de tempo($D/\tau = 0.001, 0.01, 0.1, 1, 10$ e 100) serão estudados. Os ganhos dos processos são assumidos unitários e um relé de altura $h = 1$ é usado para gerar oscilações sustentadas. A simulação foi realizada em software MATLAB com a ferramenta SIMULINK(Fig. 2.5)

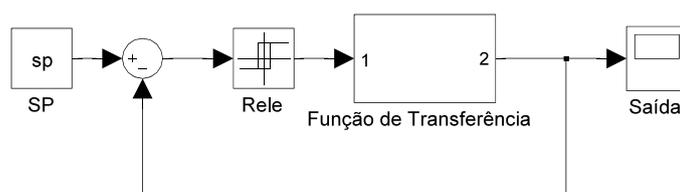


Figura 2.5: Sistema para simulação no SIMULINK.

Do formatos das figuras, muitas observações podem ser feitas imediatamente.

1. SPOTM

Se a saída do relé produz uma onda triangular, então o processo pode ser tratado como um SPOTM(Fig. 2.6 para pequenos valores D/τ). Se essa razão torna-se larga, então uma curvatura aparece (Fig. 2.6) e quando aproxima-se do infinito a resposta assemelha-se a uma onda retangular simétrica. Na verdade, SPOTM representam uma classe única em termos de resposta a saída do relé.

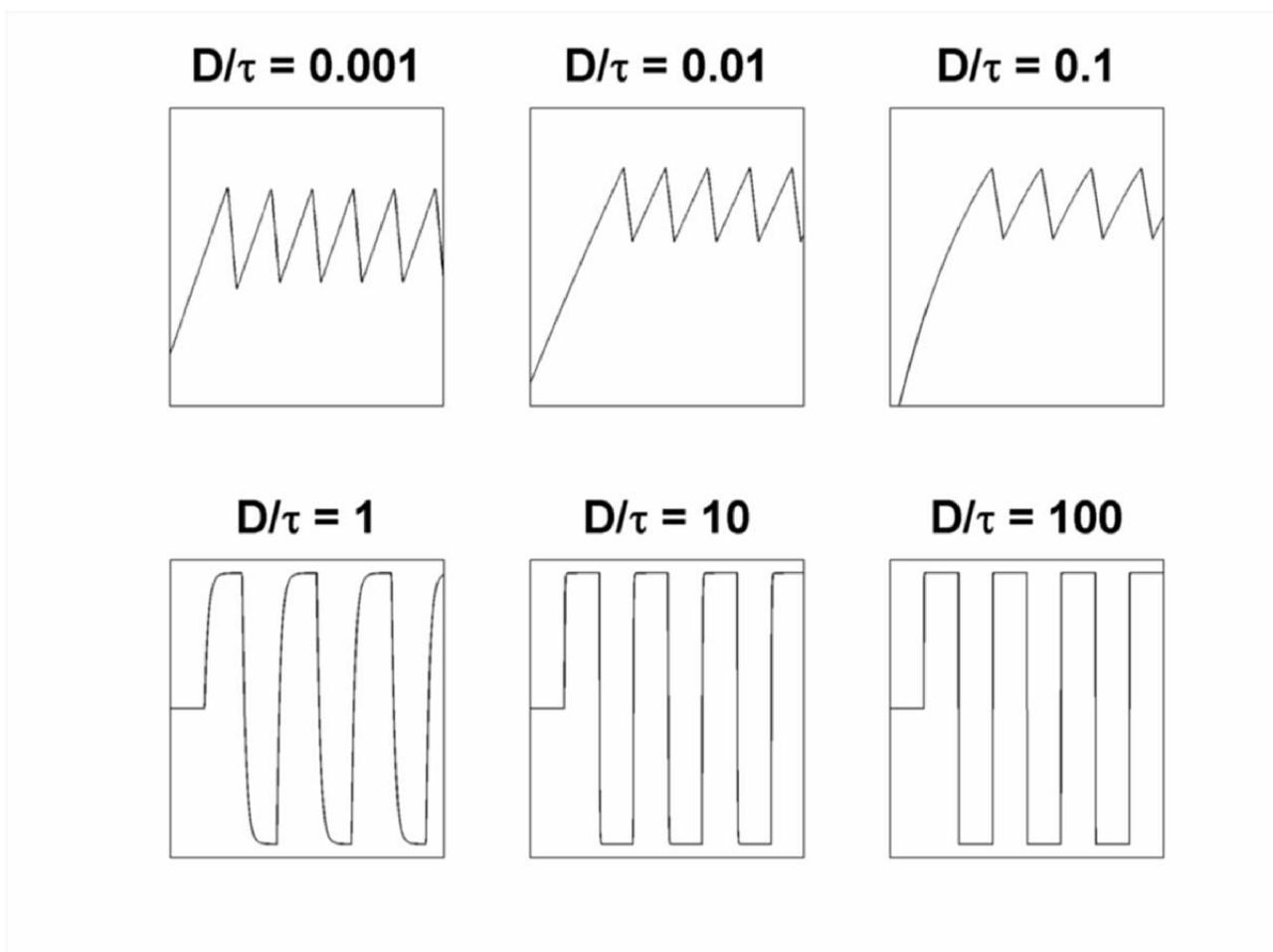


Figura 2.6: Saída do relé para SPOTM com variação de D/τ .

2. SSOTM

Se a resposta é uma oscilação senoidal com magnitude exponencialmente decrescente e alcança o regime permanente após vários ciclos, o processo pode ser considerado como segunda-ordem com pequeno valor de D/τ (Fig. 2.7). Isto também representa uma classe especial no formato da curva de saída de um sistema a relé.

3. Ordens Elevadas.

Se a ordem do processo aumenta além de 1, a curva com borda desaparece e a resposta assemelha-se a uma onda senoidal. Uma oscilação sustentada é desenvolvida nos primeiros ciclos, exceto para um processo de segunda ordem com pequenos valores de D/τ . Novamente, quando essa razão tende ao infinito, a resposta aproxima-se de uma onda retangular (Fig. 2.7).

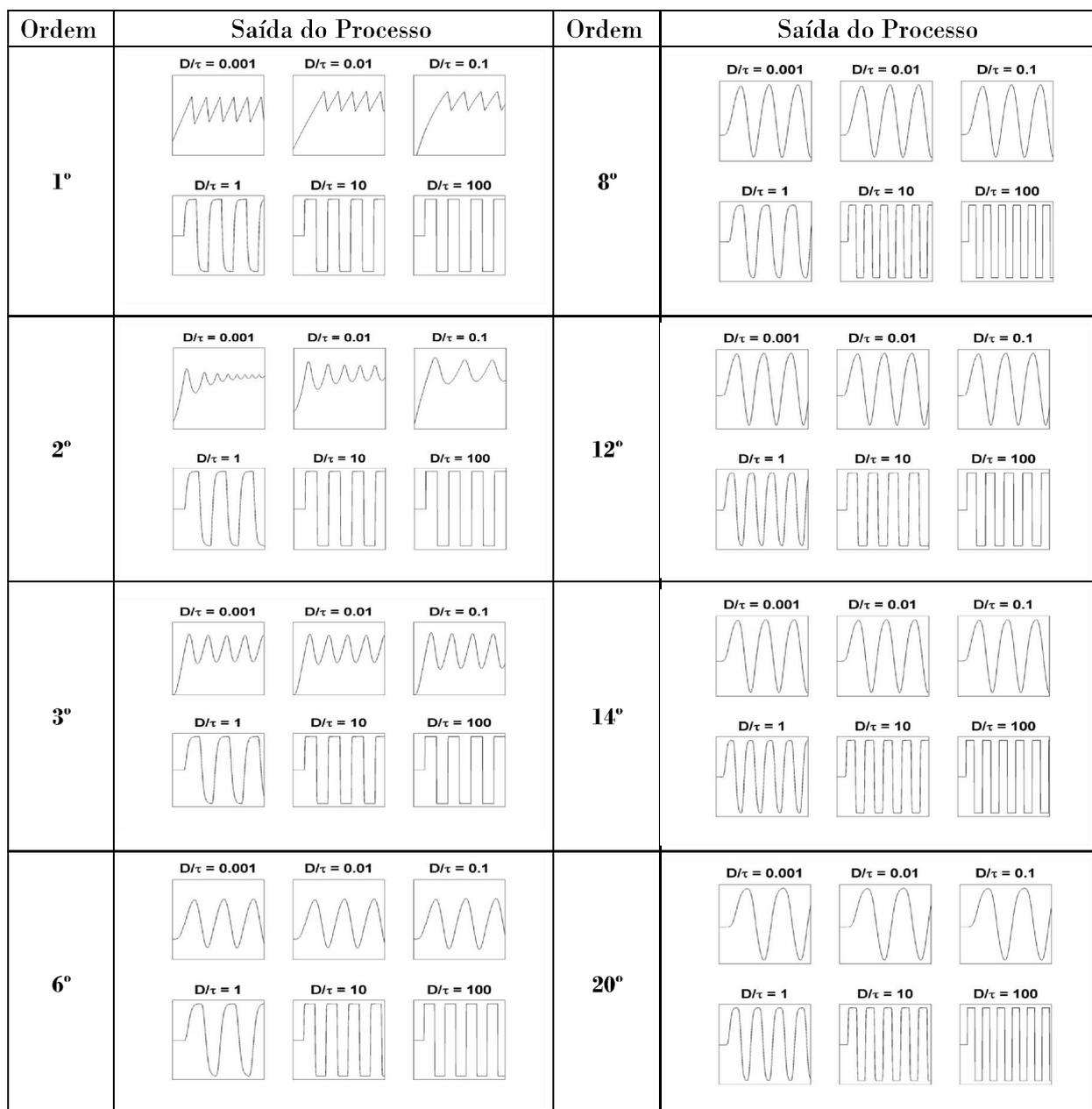


Figura 2.7: Saída do relé para sistemas de várias ordens com variação de D/τ .

Assim, é possível verificar que somente três classes podem representar sistemas do tipo

$$\frac{Ke^{-Ds}}{(\tau s+1)^n}$$

2.4.2 Tipos de Função de Transferência e Método de Identificação

As observações apresentadas acima são úteis na identificação da modelagem matemática. O princípio básico na classificação é usar o mínimo de classes de captura em todas as possíveis formatos de curva na resposta de saída. Baseado nas Figuras 2.6 e 2.7 e , três distintas classes são identificadas. Utilizaremos os procedimentos apresentados em Cheng [23].

Sistemas de Primeira Ordem Com Atraso(Sistemas Estáveis) - Categoria 1a

Duas distintas características constituem sistemas SPOTM [24] categoria 1a: (1) uma curva com bordas e (2) uma resposta alcançando uma oscilação estacionária no primeiro ciclo. Portanto, a função de transferência, que representaremos como categoria 1(1a e 1b) é:

$$G(s) = \frac{K e^{-Ds}}{\tau s + 1} \quad (2.14)$$

onde K é o ganho em regime permanente. Na Figura 2.8 [23] mostra que se o processo é verdadeiramente SPOTM, ele certamente está dentro da categoria 1. Mas, um processo de alta ordem com D/τ elevado, também poderá ser classificado nesta categoria, de acordo com a fig.2.8.

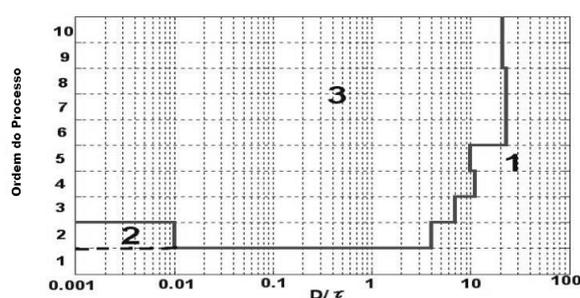


Figura 2.8: Classificação quantitativa de modelagens diferentes (categorias de 1 a 3) baseado na integral do erro absoluto da resposta em frequência.

A figura 2.9A [23] mostra o gráfico de resposta original onde o gráfico inicia após o tempo morto D . Realizando o alinhamento da saída y com a entrada u por questões de simplificação (figura 2.9B).

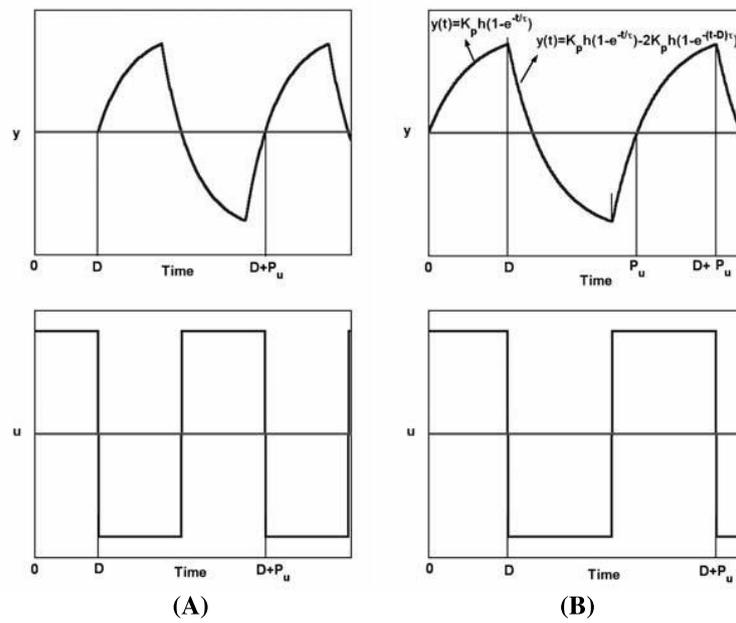


Figura 2.9: Expressões analíticas da resposta do relé a SPOTM: (A) resposta original e (B) versão alinhada.

Portanto, a expressão analítica para a primeira metade do ciclo, torna-se:

$$y(t) = Kh(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{para } 0 < t < D \quad (2.15)$$

$$y(t) = Kh(1 - e^{-t/\tau}) - 2Kh(1 - e^{-(t-D)/\tau}) \quad \text{para } D < t < P_u/2 \quad (2.16)$$

Solucionando a equação para as duas condições limites $y(D) = a$ e $y(P_u/2) = 0$, pode-se determinar os dois parâmetros do modelo, K e τ :

$$\tau = \frac{P_u/2}{\ln(2e^{D/\tau} - 1)} \quad (2.17)$$

$$K = \frac{a}{h(1 - e^{-D/\tau})} \quad (2.18)$$

Desta forma, todos os três parâmetros do modelo podem ser determinados do método do relé para sistemas SPOTM. Portanto, a identificação consiste de três passos:

1. Compute o tempo para alcançar a amplitude de pico D , o valor de saída a , e o período de oscilação P_u .
2. Fixe o tempo morto D como o tempo para alcançar o valor de pico (Figura 2.9).

3. Compute a constante de tempo τ pela equação 2.17. Note-se que a equação 2.17 é uma equação implícita para τ que requer uma solução iterativa. Pode-se utilizar a relação entre a frequência crítica e τ dada abaixo para obter uma primeira aproximação para o valor de τ :

$$\begin{aligned} \arg(G) &= -D\omega - \text{atan}(\omega\tau) \\ -\pi &= -D\omega - \text{atan}(\omega\tau) \\ \text{atan}(\omega\tau) &= \pi - D\omega \\ \omega\tau &= \tan(\pi - D\omega) \\ \tau &= \frac{\tan(\pi - D\omega_u)}{\omega_u} \end{aligned} \quad (2.19)$$

4. Calcular K , da equação 2.18.

Sistemas de Primeira Ordem Com Atraso(Sistemas Estáveis) - Categoria 1b

Esta categoria, também modelada pela equação 2.14, apresenta ciclos estacionários no primeiro ciclo, mas a borda em torno da amplitude de pico não é tão óbvio como na categoria 1a. Sistemas de segunda e terceira ordem com $D/\tau = 10$ estão nesta categoria. Utilizando a aproximação de Luyben, defini-se o tempo para alcançar o valor de pico a como t_a e o tempo para alcançar metade do valor de pico $a/2$ como $t_{a/2}$. Utilizando a expressão analítica das Equações 2.15 e 2.16, tem-se:

$$a = Kh(1 - e^{-t_a/\tau}) \quad (2.20)$$

$$\frac{a}{2} = Kh(1 - e^{-t_{a/2}/\tau}) \quad (2.21)$$

Dividindo a Equação 2.20 pela Equação 2.21, solucionaremos τ

$$2e^{-t_{a/2}/\tau} - e^{-t_a/\tau} = 1 \quad (2.22)$$

Uma vez calculado τ , pode-se solucionar os dois outros parâmetros, K e D , através das equações abaixo:

$$D = \frac{\pi - \tan^{-1}(\tau\omega_u)}{\omega_u} \quad (2.23)$$

$$K_u = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega_u)^2}} \quad (2.24)$$

Portanto, a identificação consiste de 4 etapas:

1. Compute o tempo para alcançar o valor de pico t_a , o valor de pico da saída a e o período de oscilação P_u .
2. Calcule a constante de tempo τ pela Equação 2.22.
3. Calcule o tempo morto pela Equação 2.23
4. Calcule o ganho em regime permanente K da equação 4.20.

Assim, com este procedimento pode-se calcular uma função aproximada para o modelo SPOTM.

Segunda ordem - Categoria 2

A Figura 2.7 indica a necessidade de modelar uma função de transferência para descrever um ciclo exponencialmente decrescente. Assim, pode-se representar para valores de D/τ menores que 0.01, como:

$$G(s) = \frac{K e^{-Ds}}{(\tau s + 1)^2} \quad (2.25)$$

Tipicamente, se a taxa de D/τ é menor do que 0.01, a oscilação desenvolve vagarosamente. Podemos definir a taxa $\varepsilon = 0.001$. Assim, a função de transferência pode ser expressa como:

$$G(s) = \frac{K e^{-\varepsilon \tau s}}{(\tau s + 1)^2} \quad (2.26)$$

Assim, a constante de tempo pode ser obtida da informação do ângulo de fase:

$$-\pi = -\varepsilon \tau \omega_u - 2 \tan^{-1}(\tau \omega_u) \quad (2.27)$$

e o ganho em regime permanente pode ser calculado como:

$$K = \frac{1 + \sqrt{\tau \omega_u}}{K_u} \quad (2.28)$$

Portanto, o procedimento consiste nos seguintes passos:

1. Calcule os valores de pico a e o período de oscilação P_u .
2. Calcule a constante de tempo τ através da equação 2.27.
3. Calcule o o ganho em regime permanente K pela equação 2.28.

Porém, quando se define a taxa $\varepsilon = 0.001$ os parâmetros do modelo podem não ser satisfatórios. Isto é devido ao fato de que a taxa ε depende da taxa a qual a oscilação é desenvolvida. A Figura 2.10 mostra que quando ε aumenta, a constante de tempo normalizada (razão do tempo τ_G definida pelos picos de oscilação com relação ao período de oscilação P_u) diminui. Em outras palavras, quando D/τ aumenta, o processo leva poucos ciclos para alcançar o regime estacionário. Na Figura 2.11, extraída de Cheng [23], mostra a dependência da razão D/τ com a constante de tempo normalizada. Um modelo linear é usado para calcular $\log(\varepsilon)$ com a constante de tempo normalizada τ_G/P_u :

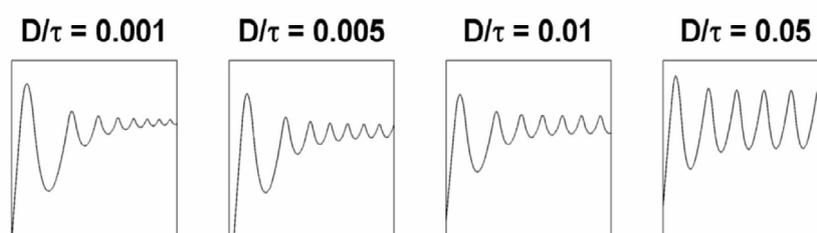


Figura 2.10: Saída do método do relé com variação da razão D/τ .

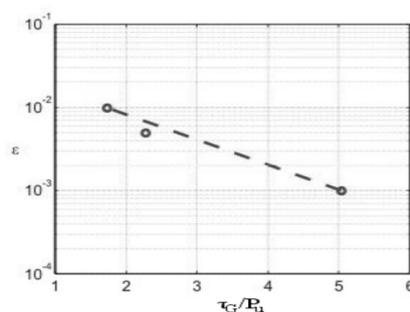


Figura 2.11: Relação entre a constante de tempo normalizada τ_G/P_u e o tempo morto pela constante de tempo ($\varepsilon = D/\tau$) para processos de Segunda Ordem.

$$\log(\varepsilon) = -0.3031 \left(\frac{\tau_G}{P_u} \right) - 1.4767 \quad (2.29)$$

Portanto, com o valor de τ_G/P_u computado pelo método do relé, pode-se calcular ε . Logo, o procedimento generalizado consiste dos seguintes passos:

1. Armazene os valores da amplitude de pico a , do período de oscilação P_u e a constante τ_G da resposta global(Figura 2.10).
2. Calcule o valor da constante de tempo normalizada τ_G/P_u .
3. Calcule o valor de ε usando a Equação 2.29.
4. Calcule a constante de tempo τ através da Equação 2.27.
5. Calcule o ganho em regime permanente K através da Equação 2.28.

Com este procedimento poderemos encontrar ε e todos os outros parâmetros da função de transferência de segunda ordem.

Ordens Elevadas

Somando as características das ordens mencionadas, a Figura 2.8 indica que todas as outras respostas apresentam uma oscilação senoidal e de ciclo estacionário que é alcançada em um ou dois ciclos. Este comportamento pode ser descrito por um processo de ordem elevada sem tempo morto, que será chamado de categoria 3. Uma função de transferência típica é:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^n} \quad (2.30)$$

Quando $n \geq 3$ observa-se que os formatos de saída do método do relé, conforme a Figura 2.8, são semelhantes. Utilizando um valor padrão de $n = 5$, leva a:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^5} \quad (2.31)$$

As Equações para calcular os parâmetros da função de transferência são:

$$\tau = \frac{\tan(\pi/n)}{\omega_u} \quad (2.32)$$

$$K_u = \frac{K}{(1 + (\tau\omega_u)^2)^{n/2}} \quad (2.33)$$

Similarmente, o procedimento de identificação será:

1. Calcule o valor de pico a e o período de oscilação P_u .
2. Calcule a constante de tempo τ a partir da equação 2.32 (com $n = 5$).
3. Calcule o o ganho em regime permanente K da equação 2.33 (com $n = 5$).

Com este procedimento, pode-se calcular os parâmetros para processos de quinta ordem. Porém, em alguns casos, os parâmetros do modelo obtidos usando o valor de $n = 5$ pode não ser satisfatório. Isto é causado pelo fato de que n depende da taxa na qual a oscilação desenvolve. Novamente, uma equação linear [23] é usada para interpolar n e τ_G/P_u entre $n = 3$ e $n = 10$.

$$\log(n) = 1.9040 - 1.3736 \left(\frac{\tau_G}{P_u} \right) \quad (2.34)$$

Desta forma, o procedimento generalizado para o cálculo será:

1. Armazene os valores de pico a , do período de oscilação P_u e a constante de curvatura τ_G .
2. Calcule o valor da constante de curvatura τ_G/P_u .
3. Calcule o valor de n usando a Equação 2.34.
4. Calcule a constante de tempo τ a partir da Equação 2.32.
5. Calcule o ganho em regime permanente K através da Equação 2.33.

Assim, pode-se obter os parâmetros do modelo para altas ordens ($n \geq 3$).

2.5 Análise de Parametrização e Eficiência do Controlador

Após a identificação da categoria, regras diferentes de parametrização estarão associadas [25, 26].

2.5.1 Controlador PI

Categoria 1: Sistema de Primeira Ordem com Tempo Morto

Considerando a aproximação de Luyben, regras de sintonia podem ser aplicadas para faixas de valores de D/τ .

1. $D/\tau < 0.1$

Para processos da categoria com D/τ menores que 0.1, a regra de Tyreus-Luyben [23] é bastante útil. As equações para o controlador PI são:

$$K_p = \frac{K_u}{3.2} \quad (2.35)$$

$$T_i = 2.2P_u \quad (2.36)$$

2. $0.1 \leq D/\tau \leq 1$

A regra de sintonia desenvolvida por Rovira [27] que minimiza o índice de performance ITAE é aceitável para SPOTM com D/τ na faixa de 0.1 a 1. As equações para o controlador PI são:

$$K_p = \frac{0.586}{K} \left(\frac{\tau}{D} \right)^{0.916} \quad (2.37)$$

$$T_i = \frac{\tau}{1.03 - 0.165 \left(\frac{D}{\tau} \right)} \quad (2.38)$$

3. $D/\tau > 1$

Para processos da categoria 1 com D/τ maiores do que 1, as regras de sintonia utilizando o método de ajuste de performance IMC [28] para controladores PI são:

$$\lambda = \max(1.7D, 0.2\tau) \quad (2.39)$$

$$K_p = \frac{\tau + \frac{D}{2}}{K\lambda} \quad (2.40)$$

$$T_i = \tau + \frac{D}{2} \quad (2.41)$$

Categoria 2: Sistemas de Segunda Ordem com Tempo Morto-SSOTM

As regras de sintonia de Ziegler-Nichols para SSOTM tem uma baixa performance [23]. Para SSOTM com pequenos valores de D/τ (0.01-0.001), as seguintes regras são utilizadas:

$$K_c = \frac{2((0.432\tau\omega_u)^3 + 0.0432\tau\omega_u)}{K(\sqrt{4(0.0432\tau\omega_u)^2 + 1})} \quad (2.42)$$

$$T_i = 2\tau \quad (2.43)$$

Categoria 3: Altas Ordens

Neste modelo aproximado há uma larga variedade de processos (Figura 2.8). Portanto, uma regra de sintonia foi elaborada [23]. Para processos de altas ordens, com ordens variando de 3 a 10, calcula-se:

$$K_p = \frac{1}{K} \quad (2.44)$$

$$T_i = (n - 1)\tau \quad (2.45)$$

2.5.2 Parâmetros de Desempenho de um Controlador

Em muitos casos práticos, as características de desempenho desejadas de um sistema de controle são especificadas em função da resposta transitória para uma entrada do tipo degrau unitário, pois se a resposta a uma entrada degrau é conhecida, é matematicamente possível computar a resposta para qualquer entrada.

A resposta transitória de um sistema de controle, na prática, geralmente, apresenta oscilações amortecidas antes de alcançar o estado ou regime estacionário. Ao especificar as características de um sistema de controle para uma entrada degrau unitário, é comum [22] se especificar os seguintes parâmetros, de acordo com a Figura 2.12:

1. Tempo de atraso, t_d : tempo necessário para a resposta alcançar pela primeira vez a metade do valor final.
2. Tempo de subida, t_r : tempo necessário para a resposta passar de 10% a 90%, 5% a 95%, ou 0% a 100% do seu valor final.

3. Instante de pico, t_p : instante de tempo para a resposta alcançar o primeiro pico do sobre-sinal.
4. Sobressinal máximo, M_p : Máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário. Se o valor final de regime estacionário difere da unidade, então comumente se usa o máximo sobressinal percentual. É definido por:

$$\text{Sobre-sinal máximo percentual} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100\%$$

5. Tempo de acomodação, t_s : tempo para alcançar e permanecer dentro de uma faixa em torno do valor final, faixa de magnitude especificada por um percentual absoluto do valor final (normalmente entre 2% a 5%).

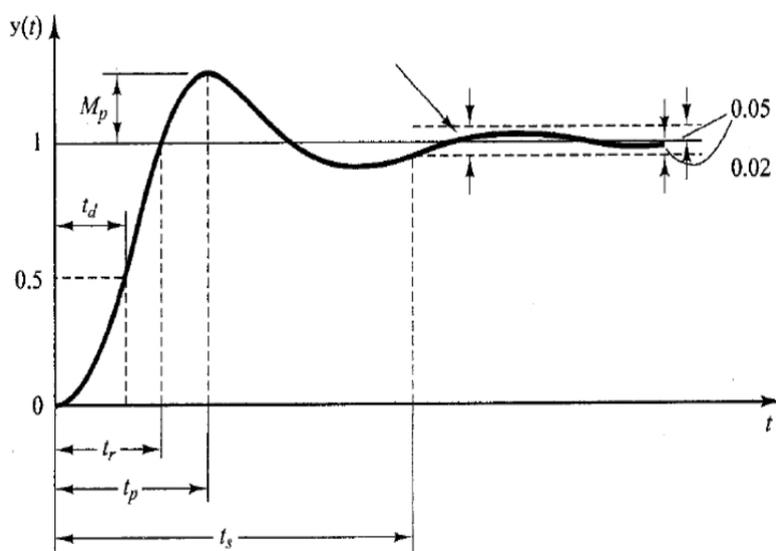


Figura 2.12: Especificações da resposta transitória de um sistema de controle.

2.5.3 Índices de Desempenho

A fim de quantificar o desempenho de um sistema, os índices mais comuns são:

1. IAE - Integral do erro absoluto

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt$$

2. ITAE - Integral do erro absoluto multiplicado pelo tempo

$$\text{ITAE} = \int_0^T |e(t)| t dt$$

Assim, utilizaremos esses dois índices para análise de desempenho do controlador, no aspecto de resposta do sistema.

3

O TEOREMA DE HERMITE-BIEHLER

3.1 Conceitos Básicos

O problema de determinar as condições sob as quais todas as raízes de um polinômio real estarão no lado esquerdo do semi-plano complexo é uma importante regra na teoria da estabilidade para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI). Um polinômio que obedece a tal regra é denominado de Hurwitz. Muitas condições foram propostas para assegurar a estabilidade de Hurwitz de um polinômio real sem determinar todas as suas raízes. Assim, apresentar-se-á o teorema de Hermite-Biehler [29], onde um polinômio é de Hurwitz se e somente se as suas raízes satisfazem uma propriedade chamada de entrelaçamento, a qual será descrita no próximo tópico. Contudo, quando um polinômio não é estável por Hurwitz, o Teorema de Hermite-Biehler não fornece qualquer informação sobre a distribuição das raízes do polinômio. Pesquisas recentes produziram várias generalizações do Teorema de Hermite-Biehler aplicado a casos de polinômios reais que não era necessariamente de Hurwitz. Adiante, são apresentadas algumas dessas generalizações para encontrar o conjunto PI estabilizante para determinada classe de funções.

3.2 O Teorema de Hermite-Biehler para Polinômios de Hurwitz

Nesta seção, são apresentadas as condições necessárias e suficientes para a estabilidade de Hurwitz de um polinômio real. Antes de declarar o teorema, são definidas algumas notações.

Definição 3.1 *Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ um dado polinômio real de grau n . Escreva*

$$\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2) \quad (3.1)$$

em que $\delta_e(s^2)$, $s\delta_o(s^2)$ são os componentes de $\delta(s)$ formados pelas potências pares e ímpares de s , respectivamente. Para cada frequência $\omega \in \mathbf{R}$, denote

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \quad (3.2)$$

onde $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$. Sejam $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ os zeros reais não negativos de $\delta_e(-\omega^2)$ e seja $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}$ os zeros reais não negativos de $\delta_o(-\omega^2)$, ambos arranjados em ordem ascendente de magnitude.

Teorema 3.1 (Teorema de Hermite-Biehler) *Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ um dado polinômio real de grau n . Portanto $\delta(s)$ é Hurwitz estável se e somente se todos os zeros de $\delta_e(-\omega^2)$, $\omega\delta_o(-\omega^2)$ são reais e distintos, δ_n e δ_{n-1} tem o mesmo sinal, e os zeros reais não-negativos satisfazem a seguinte propriedade de entrelaçamento:*

$$0 < \omega_{e_1} < \omega_{o_1} < \omega_{e_2} < \omega_{o_2} < \dots \quad (3.3)$$

3.3 Exemplos e aplicações

São mostrados alguns exemplos ilustrativos para validar o critério de estabilidade de Hurwitz.

Exemplo 3.1 *Considere o polinômio real*

$$\delta(s) = s^7 + 4s^6 + 11s^5 + 29s^4 + 36s^3 + 61s^2 + 34s + 36$$

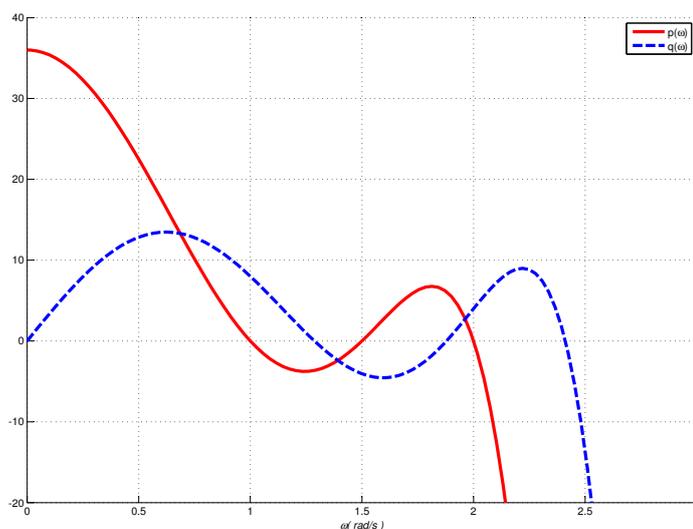


Figura 3.1: Propriedade do entrelaçamento.

Portanto

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

onde

$$p(\omega) = -4\omega^6 + 29\omega^4 - 61\omega^2 + 36; \quad q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 11\omega^4 - 36\omega^2 + 34)$$

Neste polinômio δ_n e δ_{n-1} possuem o mesmo sinal, as raízes de $\delta_e(s)$ e $\delta_o(s)$ são simples e reais, e as raízes reais e não negativas são:

$$\omega_{e_1} = 1 \quad \omega_{e_2} = 1.5 \quad \omega_{e_3} = 2\omega_{o_1} = 1.2873 \quad \omega_{o_2} = 1.8786 \quad \omega_{o_3} = 2.4111$$

O gráfico de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ são mostrados na Fig.3.1 e a propriedade de entrelaçamento é verificada. Assim, de acordo com o Teorema de Hermite-Bielher o polinômio é de Hurwitz.

Calculando as raízes de $\delta(s)$:

$$-2.9233 \quad -0.0477 \pm 1.9883j \quad -0.2008 \pm 1.4200j \quad -0.2898 \pm 1.1957j$$

constatamos que todas as partes reais, das raízes do polinômio, estão do lado esquerdo no plano complexo, verificando que o polinômio $\delta(s)$ é de Hurwitz.

Introduz-se, agora, uma interpretação alternativa do Teorema de Hermite-Biehler que é apresentada na próxima seção. Seja a função sinal padrão

$\text{sgn} : \mathbf{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$, definida como

$$\text{sgn}[x] = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Lema 3.1 (Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ um dado polinômio real de grau n . Então, as seguintes condições são equivalentes:

(i) $\delta(s)$ é Hurwitz estável.

(ii) δ_n e δ_{n-1} são de mesmo sinal e

$$n = \begin{cases} \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{\text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \dots \\ + (-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[p(\infty)]\} \\ \text{para } n = 2m \\ \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{\text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \dots \\ + (-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \cdot 2\text{sgn}[p(\omega_{o_m})]\} \\ \text{para } n = 2m + 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

(iii) δ_n e δ_{n-1} são de mesmo sinal e

$$n = \begin{cases} \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{2\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \dots \\ + (-1)^{m-2} \cdot 2\text{sgn}[q(\omega_{e_{m-1}})] + (-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[q(\omega_{e_m})]\} \\ \text{para } n = 2m \\ \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{2\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \dots \\ + (-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[q(\omega_{e_m})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[q(\infty)]\} \\ \text{para } n = 2m + 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

A prova é vista em [10]. Obviamente que o Teorema 3.1 dá uma caracterização analítica equivalente. Note que, do Teorema 3.1, se $\delta(s)$ é Hurwitz estável então todos os zeros de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ devem ser reais e distintos, caso contrário (3.4) e (3.5) falhará. Adicionalmente, os sinais de $p(\omega)$ no cruzamento dos zeros sucessivos de $q(\omega)$ devem alternar. Isto também é verdade para os sinais de $q(\omega)$ nos cruzamentos dos zeros sucessivos de $p(\omega)$.

Exemplo 3.2 Considere o mesmo polinômio no Exemplo 1.1

$$\delta(s) = s^7 + 4s^6 + 11s^5 + 29s^4 + 36s^3 + 61s^2 + 34s + 36$$

Portanto

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

onde

$$p(\omega) = -4\omega^6 + 29\omega^4 - 61\omega^2 + 36 \quad q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 11\omega^4 - 36\omega^2 + 34)$$

As raízes não negativas são:

$$\omega_{e_1} = 1 \quad \omega_{e_2} = 1.5 \quad \omega_{e_3} = 2\omega_{o_1} = 1.2873 \quad \omega_{o_2} = 1.8786 \quad \omega_{o_3} = 2.4111$$

e

$$\text{sgn}[p(0)] = 1, \text{sgn}[p(\omega_{o_1})] = -1, \text{sgn}[p(\omega_{o_2})] = 1, \text{sgn}[p(\omega_{o_3})] = -1$$

O polinômio $\delta(s)$ é de grau $n = 7$ que é ímpar

$$\text{sgn}[\delta_0] \cdot [\text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_3})] = 7$$

que mostra a validade de (3.4) Tem-se também que

$$\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] = 1 \quad \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] = -1 \quad \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] = 1 \quad \text{sgn}[q(\infty)] = -1$$

Logo,

$$\text{sgn}[\delta_0] \cdot [2\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e_3})] - \text{sgn}[q(\infty)] = 7$$

Novamente, pode-se verificar a validade em (3.5).

Exemplo 3.3 Considere agora o polinômio

$$\delta(s) = s^8 + s^7 - 18s^6 - 14s^5 + 97s^4 + 61s^3 - 180s^2 - 84s + 100 \quad (3.6)$$

É possível verificar através da Figura 3.2 que $\delta(s)$ não é um polinômio de Hurwitz, pois não satisfaz a propriedade de entrelaçamento. Observe que ω_{e_1} e ω_{e_2} são duas raízes

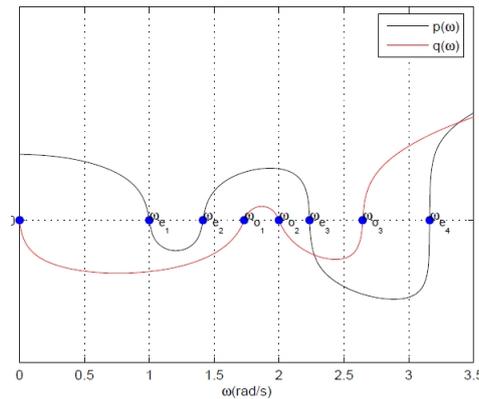


Figura 3.2: Entrelaçamento falha em polinômios não Hurwitz.

consecutivas de $p(\omega)$, e ω_{o_1} e ω_{o_2} são duas raízes consecutivas de $q(\omega)$. Infelizmente, o Teorema de Hermite-Biehler não oferece informação alguma sobre a distribuição das raízes de $\delta(s)$, além de evidenciar se o polinômio é ou não de Hurwitz. Será que seria possível conhecer o número de raízes de $\delta(s)$ no semiplano direito? Isto motivou a derivação generalizada do Teorema de Hermite-Biehler, que é aplicável a polinômios não necessariamente de Hurwitz. Além da generalização ser necessária para a solução do problema de estabilização com ordem fixa.

3.4 Motivação para Generalizar o Teorema de Hermite Biehler

Considere o problema de estabilização por ganho constante mostrado na Figura 3.3. Aqui r é o SP, y é a saída, $G(s) = N(s)/D(s)$ é a planta a ser controlada, $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios coprimos, isto é, não existe nenhum polinômio de grau 1 ou superior que divida a ambos sem resto, e $C(s) = k$, isto é, o controlador é de ordem zero. Assim o polinômio característico em malha fechada é:

$$\delta(s, k) = D(s) + kN(s) \quad (3.7)$$

em que k é um escalar.

O objetivo é determinar analiticamente os valores de k , se existirem, para os quais $\delta(s, k)$ é de Hurwitz. Sejam $D(s)$ e $N(s)$ dados através da seguinte decomposição par-ímpar:

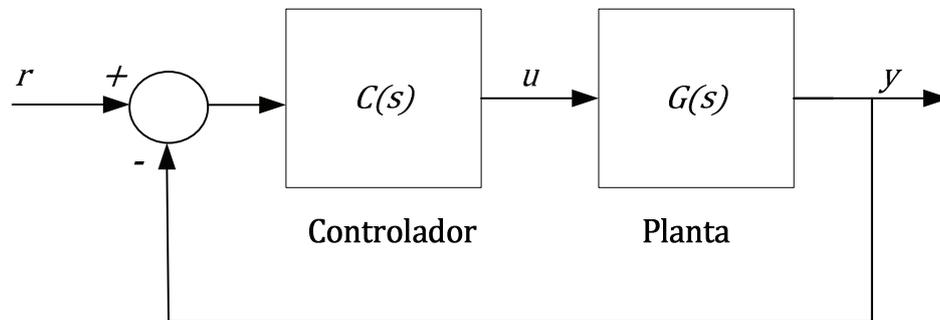


Figura 3.3: Sistema de controle com realimentação.

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad (3.8)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad (3.9)$$

Então,

$$\delta(s, k) = [kN_e(s^2) + D_e(s^2)] + s[kN_o(s^2) + D_o(s^2)] \quad (3.10)$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$, tem-se:

$$\delta(j\omega, k) = [D_e(-\omega^2) + kN_e(-\omega^2)] + j\omega[D_o(-\omega^2) + kN_o(-\omega^2)] \quad (3.11)$$

Considere a seguinte notação

$$\bar{p}(\omega, k) = D_e(-\omega^2) + kN_e(-\omega^2) \quad (3.12)$$

$$\bar{q}(\omega, k) = \omega[D_o(-\omega^2) + kN_o(-\omega^2)] \quad (3.13)$$

Portanto,

$$\delta(j\omega, k) = \bar{p}(\omega, k) + j\bar{q}(\omega, k) \quad (3.14)$$

Agora, utiliza-se o Lema 3.1 para determinar os valores de k para os quais $\delta(s, k)$ é Hurwitz. Determina-se primeiramente as frequências ω como uma função de k , tais que

$\bar{p}(\omega, k) = 0$ e $\bar{q}(\omega, k) = 0$ e as condições que um dos itens (iii) ou (ii) do Lema 3.1 seja válido. O problema está no fato de que $\bar{p}(\omega, k)$ e $\bar{q}(\omega, k)$ dependem de k tornando difícil a solução mesmo quando ambos são de baixa ordem. Esta dificuldade pode ser superada reescrevendo o problema de maneira que $\bar{p}(\omega, k)$ ou $\bar{q}(\omega, k)$ seja independente de k . Isto pode ser feito da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} N^*(s) &= N(-s) \\ &= N_e(s^2) - sN_o(s^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta(s, k)N^*(s) &= [D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) + kN_e^2(s^2) - ks^2N_o^2(s^2)] \\ &\quad + s [N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)] \end{aligned}$$

Substituindo $s = j\omega$, nós obteremos

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega) \quad (3.15)$$

onde,

$$\begin{aligned} p(\omega, k) &= D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) + kN_e^2(-\omega^2) \\ &\quad + k\omega^2N_o^2(-\omega^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$q(\omega) = \omega [N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) + D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \quad (3.17)$$

Seja $N^*(s)$ um polinômio de Hurwitz. Então, $\delta(s, k)$ é Hurwitz se e somente se $\delta(s, k)N^*(s)$ é Hurwitz. De (3.17) é claro que $q(\omega)$ é independente de k . Sejam, $\omega_{o_0}, \omega_{o_1}, \dots, \omega_{o_l}$ os zeros não negativos de $q(\omega)$. Suponha que o grau de $\delta(s, k)N^*(s)$ é n . Desde que

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega), \quad (3.18)$$

a condição (ii) do Lema 3.1 pode ser utilizada para determinar os valores de k para qual $\delta(s, k)N^*(s)$ é Hurwitz.

Contudo, geralmente $N^*(s)$ não é Hurwitz, e não é possível utilizar a abordagem acima, pois o Lema 3.1 não é aplicável a polinômios não Hurwitz. Isto dá a motivação para uma

generalização apropriada do Lema 3.1 para polinômios não necessariamente de Hurwitz. Portanto, apresenta-se alguns lemas, definições e teoremas sem se preocupar com a sua prova, cuja referência será evidenciada.

3.5 Generalização do Teorema de Hermite-Biehler

3.5.1 Distribuição de Raízes e Fase Acumulada Líquida

Inicialmente, consideram-se os polinômios sem zeros no eixo imaginário. Seja um polinômio real $\delta(s)$ de grau n :

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \cdots + \delta_n s^n, \delta_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \dots, n, \delta_n \neq 0 \quad (3.19)$$

tal que $\delta(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$.

Considere $p(\omega)$ e $q(\omega)$ duas funções definidas por $p(\omega) = \text{Re}[\delta(j\omega)]$ e $q(\omega) = \text{Im}[\delta(j\omega)]$. Assim, tem-se

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \forall \omega. \quad (3.20)$$

Além disso, $\theta(\omega) = \angle \delta(j\omega) = \arctan \frac{q(\omega)}{p(\omega)}$. Denote por Δ_0^∞ a mudança líquida do argumento $\theta(\omega)$ conforme ω cresce de 0 a ∞ e sejam $l(\delta)$ e $r(\delta)$ o número de raízes de $\theta(\omega)$ em \mathcal{C}^+ e \mathcal{C}^- , onde correspondem, respectivamente, ao semi-plano esquerdo e direito do plano complexo(\mathcal{C}). Pode-se anunciar o seguinte lema

Lema 3.2 *Seja $\delta(s)$ um polinômio real sem raízes no eixo imaginário. Então,*

$$\Delta_0^\infty = \frac{\pi}{2}(l(\delta) - r(\delta)). \quad (3.21)$$

Prova. Cada raiz em \mathcal{C}^+ contribui com $\frac{\pi}{2}$ e cada raiz em \mathcal{C}^- contribui com $-\frac{\pi}{2}$ para a mudança líquida de argumento. ■.

3.5.2 Assinaturas Reais e Imaginárias Associadas a um Polinômio Real

Definição 3.2 Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n com k denotando a multiplicidade de uma raiz na origem. Defina

$$p_f(\omega) = \frac{p(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}}, q_f(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}}. \quad (3.22)$$

Sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina, também, $\omega_m = \infty$. Então, a assinatura imaginária $\sigma_i(\delta)$ de $\delta(s)$ é definida por

$$\sigma_i(\delta) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \\ \text{se } n \text{ é par} \end{array} \right. & (3.23) \\ \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \cdot (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \end{array} \right. & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

em que $p_f^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k} [p_f(\omega)] |_{\omega=\omega_0}$

Definição 3.3 Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n com k denotando a multiplicidade de uma raiz na origem. Sejam $p_f(\omega)$, $q_f(\omega)$ como na última definição, e sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $p_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina, também, $\omega_0 = 0$, $\omega_m = \infty$. Então, a assinatura real $\sigma_r(\delta)$ de $\delta(s)$ é definida por

$$\sigma_r(\delta) = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[q_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[q_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} \cdot +(-1)^m \text{sgn}[p_f(\infty)] \\ \text{se } n \text{ é par} \end{array} \right. & (3.24) \\ \left\{ \begin{array}{l} \{\text{sgn}[q_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[q_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{\text{sgn}[p(\infty)]} \\ \text{se } n \text{ é ímpar} \end{array} \right. \end{cases}$$

em que $q_f^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k} [q_f(\omega)] |_{\omega=\omega_0}$

3.5.3 O Teorema de Hermite-Biehler Generalizado

A generalização do Teorema de Hermite-Biehler [30, 31], consiste em nenhuma restrição nas localizações das raízes. Assim, resume-se em dois teoremas

Teorema 3.2 *Considere $\delta(s)$ um polinômio real de grau n . Então*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_r(\delta) \quad (3.25)$$

Prova. A prova é vista em [10] ■

Reproduz-se agora um resultado análogo ao Teorema 3.2 em que o valor de $l(\delta) - r(\delta)$ de um dado polinômio real deve ser determinado a partir dos valores das frequências onde $\delta_f(j\omega)$ cruza o eixo imaginário

Teorema 3.3 *Considere $\delta(s)$ um polinômio real de grau n . Então*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_i(\delta) \quad (3.26)$$

Prova. A prova é vista em [10] ■

4

INTRODUÇÃO A ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES - SEM RETARDO, UTILIZANDO O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER

Neste capítulo , primeiramente, providencia-se uma solução analítica completa a estabilização de sistemas sem retardo, descritos por uma função de transferência racional, usando controlador de ganho proporcional ou controlador de ganho proporcional integral . A solução derivada neste capítulo é baseado no Teorema de Hermite-Biehler Generalizado. Assim, será possível obter todo o conjunto estabilizante de um controlador P ou PI [32], por exemplo.

Os resultados deste capítulo completam uma importante lacuna na teoria de controle. Em parte eles são motivados pelas limitações das técnicas modernas de controle ótimo, que não permitem restrições quanto à ordem ou à estrutura do controlador em seus métodos de projeto. Como consequência, tais técnicas não podem ser empregadas para o projeto de controladores PID ótimos ou robustos.

4.1 Caracterização de Todos os Ganhos Estabilizantes

Existem várias abordagens clássicas para solução desse tipo de problema. Como por exemplo, a técnica do Lugar das raízes, o critério de estabilidade de Nyquist, e o critério de Routh-Hurwitz. Entre essas abordagens, a técnica do Lugar das raízes e o critério de estabilidade de Nyquist resolvem este problema obtendo o lugar das raízes de $\delta(s, k_p)$ e o gráfico de Nyquist $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, respectivamente. Esses métodos são de natureza gráfica, e não fornecem uma caracterização analítica de todos os k_p 's estabilizantes. O critério de Routh-Hurwitz, por outro lado, fornece uma solução analítica. Entretanto, o conjunto de k_p 's estabilizantes deve ser determinado a partir da resolução de um conjunto de desigualdades polinomiais, uma tarefa que se torna extremamente complexa para sistemas de ordens elevadas.

Considere o sistema realimentado da Figura 3.3. Aqui r é o SP(valor desejado), y é a saída, $G(s) = N(s)/D(s)$ a planta a ser controlada, $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios coprimos(não existe nenhum polinômio de grau 1 ou superior que divida a ambos sem resto), e $C(s)$ é o controlador a ser projetado. No caso de aplicação por ganho constante,

$$C(s) = k_p, \quad (4.1)$$

de forma que o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p)$ é dado por

$$\delta(s, k) = D(s) + k_p N(s) \quad (4.2)$$

O objetivo é determinar os valores de k_p , se existirem, para os quais o sistema em malha fechada é estável, isto é, $\delta(s, k_p)$ é Hurwitz.

Considere-se a decomposição par-ímpar de $N(s)$ e $D(s)$

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2)$$

Então, (4.2) pode ser reescrito como

$$\delta(s, k_p) = [k_p N_e(s^2) + D_e(s^2)] + s[k_p N_o(s^2) + k_p D_o(s^2)]$$

É claro que esta expressão mostra que as partes pares e ímpares de $\delta(s, k)$ dependem de k . Isto cria uma dificuldade quando se tenta usar o Lema 3.1 para assegurar a estabilidade de Hurwitz de $\delta(s, k)$. Para solucionar este problema, pode-se construir um polinômio em que somente a parte par depende de k e para qual o Teorema de Hermite Biehler Generalizado é aplicável.

Suponha que o grau de $D(s)$ é n enquanto o grau de $N(s)$ é m e $m \leq n$. Defina

$$N^*(s) := N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2)$$

Multiplicando $\delta(s, k)$ por $N^*(s)$ e examinando o polinômio resultante, obtem-se:

$$\begin{aligned} l(\delta(s, k_p)N^*(s)) - r(\delta(s, k_p)N^*(s)) &= l(\delta(s, k_p)) - r(\delta(s, k_p)) \\ &\quad + l(N^*(s)) - r(N^*(s)) \\ &= l(\delta(s, k_p)) - r(\delta(s, k_p)) & (4.3) \\ &\quad + l(N(-s)) - r(N(-s)) \\ &= l(\delta(s, k_p)) - r(\delta(s, k_p)) \\ &\quad - l(N(s)) - r(N(s)) \end{aligned}$$

Sabe-se que $\delta(s, k_p)$ de grau n é Hurwitz se e somente se $l(\delta(s, k_p)) = n$ e $r(\delta(s, k_p)) = 0$.

Além disso, tem-se do Teorema 3.3 que

$$\sigma_i(\delta(s, k_p)N^*(s)) = l(\delta(s, k_p)N^*(s)) - r(\delta(s, k_p)N^*(s)). \quad (4.4)$$

Tem-se assim o seguinte resultado.

Lema 4.1 $\delta(s, k)$ é Hurwitz se e somente se

$$\sigma_i(\delta(s, k)N^*(s)) = n - (l(N(s)) - r(N(s))). \quad (4.5)$$

Prova. A prova é vista em [10] ■

A fim de solucionar o problema de estabilização, precisa-se determinar quais valores de k_p , se existir, para os quais (4.5) é satisfeita. Note que nesta expressão, os valores de n e

$l(N(s)) - r(N(s))$ são conhecidos e fixos. Assim, usando da decomposição de $N(s)$ e $D(s)$ tem-se

$$\delta(s, k_p)N^*(s) = h_1(s^2) + k_ph_2(s^2) + sg_1(s^2)$$

onde

$$h_1(s^2) = D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2),$$

$$h_2(s^2) = N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2),$$

$$g_1(s^2) = N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2).$$

Substituindo $s = j\omega$, obtém-se

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega) \quad (4.6)$$

onde

$$p(\omega, k_p) = p_1(\omega) + k_pp_2(\omega), \quad (4.7)$$

$$p_1(\omega) = [D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)], \quad (4.8)$$

$$p_2(\omega) = [N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)], \quad (4.9)$$

$$q(\omega) = \omega[N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) + \omega^2D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)]. \quad (4.10)$$

Também, defina

$$p_f(\omega, k_p) = \frac{p(\omega, k_p)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}$$

$$q_f(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Note que os zeros da parte imaginária $q(\omega)$ são independentes de k_p . Antes de enunciar o principal resultado desta seção, introduzem-se algumas definições.

Definição 4.1 *Sejam os inteiros m, n e a função $q_f(\omega)$ como já definidos. Sejam $0 = w_0 < w_1 < w_2 < \dots < w_{l-1}$ os zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina a sequência de números $i_0, i_1, i_2, \dots, i_l$ como segue:*

(i)

$$i_0 = \begin{cases} \operatorname{sgn}[p_{1_f}^{k_n}(0)] & \text{Se } N^*(s) \text{ tem um zero de multiplicidade } k_n \text{ na origem} \\ \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\alpha \in \{-1, 1\}$ e

$$p_{1_f}(\omega) := \frac{p_1(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}$$

(ii) Para $t = 1, 2, \dots, l-1$

$$i_t = \begin{cases} 0 & \text{Se } N^*(j\omega_t) = 0 \\ \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(iii)

$$i_l = \begin{cases} \alpha & \text{Se } n + m \text{ é par} \\ 0 & \text{Se } n + m \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Com i_0, i_1, \dots definidos desta forma, defina o conjunto A cadeia $\mathcal{I} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}$ como a seguinte sequência de números:

$$\mathcal{I} := \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$$

Defina A como sendo o conjunto de todas as cadeias possíveis I que podem ser geradas para satisfazer os requisitos descritos.

Agora introduz-se a "assinatura imaginária" $\gamma(\mathcal{I})$ associado com qualquer elemento $\mathcal{I} \in A$.

Definição 4.2 Considere os inteiros m, n e as funções $q(\omega), q_f(\omega)$ como já definidos. Seja $0 = w_0 < w_1 < w_2 < \dots < w_{l-1}$ reais, não negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Também defina $w_l = \infty$. Para cada cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots\}$ em A, seja $\gamma(\mathcal{I})$ a "assinatura imaginária" associada com a cadeia \mathcal{I} definida por

$$\gamma(\mathcal{I}) := [i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l] \cdot (-1)^{l-1} \operatorname{sgn}[q(\infty)] \quad (4.11)$$

Definição 4.3 Defina F^* como o conjunto viável do conjunto de cadeias para o problema de estabilização de ganho constante e definido como

$$F^* = \{\mathcal{I} \in A \mid \gamma(\mathcal{I}) = n - (l(N(s)) - r(N(s)))\}.$$

Teorema 4.1 (Estabilização por Ganho Constante) *O problema de estabilização por ganho constante pode ser resolvido para uma dada planta de função de transferência "G(s)" se e somente se as seguintes condições forem válidas:*

(i) F^* não é vazio, isto é, existe ao menos uma cadeia factível.

(ii) Existe uma cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots\} \in F^*$ tal que

$$\max_{\{t: i_t > 0\}} (L_t) < \min_{\{t: i_t < 0\}} (U_t)$$

onde

$$L_t := -\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)} \text{ para } i_t \in \mathcal{I}, i_t > 0$$

$$U_t := -\frac{p_1(\omega_t)}{p_2(\omega_t)} \text{ para } i_t \in \mathcal{I}, i_t < 0$$

Adicionalmente, se as condições acima são satisfeitas por uma cadeia $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_s \in F^*$, então o conjunto de todos os ganhos estáveis são dados por $K = \cup_{r=1}^s K_r$ onde

$$K_r = \left(\max_{\{t: i_t > 0, i_t \in \mathcal{I}_r\}} (L_t), \min_{\{t: i_t < 0, i_t \in \mathcal{I}_r\}} (U_t) \right) \quad r = 1, 2, \dots, s$$

Prova. Ver prova em [10]

Comentário 4.1 *É importante enfatizar que as partes (i) e (ii) o Teorema 4.1 providenciam uma caracterização de todos os processos que serão estabilizados por um ganho constante. Uma necessária condição para F^* não ser vazio [32] é que para $m + n$ par*

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))|}{2}$$

e para $m + n$ ímpar

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))| + 1}{2}$$

4.2 Exemplos e Aplicações

Nesta seção, apresentam-se alguns exemplos ilustrativos aplicando o Teorema 4.1 na solução do problema de estabilização de um controlador de ganho constante. Também,

realiza-se o projeto do controlador aplicando as técnicas convencionais comparando à aplicação do Teorema descrito.

Exemplo 4.1 *Considere um sistema descrito por*

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 4s + 6$$

$$N(s) = s^3 + 3s^2 + 2s - 2$$

O polinômio característico de malha fechada é

$$\delta(s, k_p) = D(s) + k_p N(s)$$

Onde $N_e(s^2) = 3s^2 - 2$ e $N_o(s^2) = s^2 + 2$, então

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p)N^*(s) &= (-2s^6 + 14s^4 - 10s^2 - 12) \\ &\quad + k_p(-s^6 + 5s^4 - 16s^2 + 4) \\ &\quad + s(-s^6 + 3s^5 - 24s^2 - 20) \end{aligned}$$

assim

$$\delta(j\omega, k_p)N^*(s) = p_1(\omega) + k_p p_2(\omega) + jq(\omega)$$

com

$$p_1(w) := 2w^6 + 14w^4 + 10w^2 - 12$$

$$p_2(w) := w^6 + 5w^4 + 16w^2 + 4$$

$$q(w) := w(w^6 + 3w^4 - 24w^2 - 20)$$

As raízes reais, não negativas e distintas com multiplicidades ímpares, são

$$\omega_0 = 0 \quad \omega_1 = 0.8639.$$

Desde que $n + m = 7$, que é ímpar, e $N^(s)$ não tem raízes no eixo $j\omega$, de acordo com a Definição 4.1, o conjunto A torna-se*

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} \{-1, -1, 0\} & \{1, -1, 0\} \\ \{-1, 1, 0\} & \{1, 1, 0\} \end{array} \right\}.$$

Desde que $l(N(s)) - r(N(s)) = 1$ e $(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty)] = -1$, usando a Definição 4.3, cada cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, i_2\} \in F^*$ deve satisfazer

$$-(i_0 - 2i_1 + i_2) = 3$$

Portanto $F^* = \{\mathcal{I}_1\}$ onde $\mathcal{I}_1 = \{-1, 1, 0\}$. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} U_0 &= -\frac{p_1(\omega_0)}{p_2(\omega_0)} = 3 \\ L_1 &= -\frac{p_1(\omega_1)}{p_2(\omega_1)} = -0.2139 \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 4.1, tem-se

$$K_1 = (-0.2139, 3) \text{ para } \mathcal{I}_1.$$

Portanto $\delta(s, k_p)$ é Hurwitz para $k_p \in (-0.2139, 3)$

Exemplo 4.2 Considerando o mesmo sistema acima, o polinômio característico de malha fechada, será:

$$\delta(s, k_p) = s^4 + s^3(k_p + 5) + s^2(3k_p + 10) + s(2k_p + 4) - 2k_p + 6 \quad (4.12)$$

Aplicando o critério de Routh-Hurwitz para determinar os valores de k_p , para quais o sistema será estável, deve-se satisfazer as seguintes inequações:

$$\begin{cases} k_p + 5 > 0 \\ 3k_p^2 + 23k_p + 54 > 0 \\ 4k_p^3 + 72k_p^2 - 190k_p + 60 > 0 \\ -2k_p + 6 > 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Claramente, verifica-se que a resolução das inequações acima é de difícil solução e, portanto a complexidade aumenta com a ordem do sistema.

4.3 Caracterização de Todos os Controladores PI

Considere, novamente, o sistema de controle realimentado mostrado na Figura 3.3. Porém, agora emprega-se um controlador PI. Assim, $C(s)$ é dado por

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_i + k_p s}{s} \quad (4.14)$$

O polinômio característico em malha fechada é

$$\delta(s, k_p, k_i) = sD(s) + (k_i + k_p s)N(s) \quad (4.15)$$

Seja n o grau de $\delta(s, k_p, k_i)$. O problema da estabilização pelo controlador PI, é a determinação dos valores de k_p e k_i para os quais o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p, k_i)$ é Hurwitz.

Claramente, tanto k_p como k_i afetam as partes pares e ímpares de $\delta(s, k_p, k_i)$. Considere as seguintes decomposições par-ímpar

$$\begin{aligned} N(s) &= N_e(s^2) + sN_o(s^2) \\ D(s) &= D_e(s^2) + sD_o(s^2). \end{aligned}$$

Defina

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2).$$

Lema 4.2 $\delta(s, k_p, k_i)$ é Hurwitz se e somente se

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) = n - (l(N(s)) - r(N(s))). \quad (4.16)$$

A tarefa é determinar quais valores de k_p, k_i , para os quais (4.16) vale. Isto pode ser verificado por

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i)N^*(s) &= [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\ &\quad + k_i(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))] \\ &\quad + s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\ &\quad + k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2(N_o(s^2)N_o(s^2))]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo $s = j\omega$

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i) + jq(\omega, k_p)$$

onde

$$\begin{aligned}
p(\omega, k_i) &= p_1(\omega) + k_i p_2(\omega) \\
q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \\
p_1(\omega) &= -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \\
q_1(\omega) &= \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_2(\omega) &= \omega(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2))
\end{aligned}$$

Também, defina

$$\begin{aligned}
p_f(\omega, k_i) &= \frac{p(\omega, k_i)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \\
q_f(\omega, k_p) &= \frac{q(\omega, k_p)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}.
\end{aligned}$$

Destas expressões acima, observe que k_i e k_p aparecem em $p(\omega, k_i)$ e $q(\omega, k_p)$, respectivamente. Além disso, os zeros de $q(\omega, k_p)$ para k_p fixado não dependem de k_i , e assim pode-se aplicar os resultados da Seção 5.1. Pode-se então, fazer uma varredura sobre todos os valores de k_p e resolvendo um problema de estabilização por ganho constante a cada estágio, determinar o conjunto de todos os valores estabilizantes de (k_p, k_i) para a planta dada.

A faixa de valores de k_p sobre os quais é necessário relizar a varredura pode ser consideravelmente reduzida em muitos casos. Recordando o comentário 4.1 tem-se que para um k_p fixado, uma condição necessária para existência de um valor estabilizante de k_i é que $q(\omega, k_p)$ possua pelo menos [32]

$$\frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))|}{2} \tag{4.18}$$

ou

$$\frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))| + 1}{2} \tag{4.19}$$

Desta forma, uma necessária condição pode ser analisada rescrevendo $q(\omega, k_p)$ como

segue:

$$q(\omega, k_p) = \omega[U(\omega) + k_p V(\omega)] \quad (4.20)$$

onde

$$U(\omega) = (D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2))$$

$$V(\omega) = (N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2))$$

De (4.20), observa-se que $q(\omega, k_p)$ tem no mínimo uma raiz real não negativa na origem.

4.4 Exemplos e Aplicações

Apresenta-se um exemplo prático de como calcular o conjunto estabilizante PI, aplicando a idéia apresentada no Apêndice A e os resultados do Teorema 4.1 apresentado na seção anterior.

Exemplo 4.3 *Considere um sistema descrito por:*

$$N(s) = 1$$

$$D(s) = (s + 1)^3$$

1) *Esse sistema representa funções típicas de processos industriais, conforme foi mencionado. Separando os termos pares e ímpares, obtém-se:*

$$D_e(s^2) = 3s^2 + 1 \quad N_e(s^2) = 1$$

$$D_o(s^2) = s^2 + 3 \quad N_o(s^2) = 0$$

2) *Substituindo $s = j\omega$*

$$D_e(-\omega^2) = -3\omega^2 + 1 \quad N_e(-\omega^2) = 1$$

$$D_o(-\omega^2) = \omega^2 + 3 \quad N_o(-\omega^2) = 0$$

3) Calculando os polinômios:

$$p_1(\omega) = -\omega^2(-\omega^2 + 3)$$

$$p_2(\omega) = 1$$

$$q_1(\omega) = \omega(-3\omega^2 + 1)$$

$$q_2(\omega) = \omega$$

4) Determina-se a faixa de k_p para qual existirão valores de k_i estabilizantes para o sistema.

Utilizando o procedimento do Apêndice A:

$$U(\omega) = -3\omega^2 + 1$$

$$V(\omega) = 1$$

$$\alpha(\omega) = \frac{U(\omega)\frac{dV(\omega)}{d\omega} - V(\omega)\frac{dU(\omega)}{d\omega}}{U^2(\omega)} = 0$$

5) As raízes da equação de $\alpha(\omega)$ que representam os pontos de ramificação são:

$$\omega_1 = 0$$

6) e o devido valor de k , será:

$$k_1 = -1$$

7) O número de raízes reais, não negativas e de multiplicidades ímpares deverá ser no mínimo:

$$l \geq 2$$

8) Assim, a região estável de cada faixa de (k_0, k_1) , (k_1, k_2) deverá possuir pelo menos uma raiz real, não negativa e de multiplicidade ímpar:

$$k \in (-\infty, -1) : \text{nenhuma raiz real}$$

$$k \in (-1, \infty) : \text{uma raiz real positiva}$$

$$: \text{uma raiz real negativa} \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

Logo, adotando valores de $k_p \geq 0$, o intervalo estável, onde existira um k_i estabilizante, estará na faixa $(0, \infty)$. Sejam, por exemplo, os valores de k_i , fixando $k_p = 0.5$:

9) Calculando as raízes de $q_f(w, 0.5)$

$$w_0 = 0, w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10) Calculando o conjunto A de todas as cadeias possíveis:

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} \{-1, 1, 1\} & \{-1, -1, 1\} \\ \{1, 1, 1\} & \{1, -1, 1\} \\ \{1, 1, -1\} & \{1, -1, -1\} \\ \{-1, -1, 1\} & \{-1, -1, 1\} \end{array} \right\}.$$

11) Calculando a assinatura imaginária $\gamma(\mathcal{I})$ e o conjunto F^* , de acordo com as Definições 4.3 e 4.3, respectivamente, tem-se:

$$\gamma(\mathcal{I}) := i_0 - 2i_1 + i_2; F^* = \{\mathcal{I} \in A | \gamma(\mathcal{I}) = 4\}$$

Assim, a única cadeia viável de F^* , que satisfaz $\gamma(\mathcal{I}) = 4$ é $\{\mathcal{I}_{22}\}$. Assim:

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{p_1(\omega_0)}{p_2(\omega_0)} = 0 \\ U_1 &= -\frac{p_1(\omega_1)}{p_2(\omega_1)} = 1.25 \\ L_1 &= -\frac{p_1(\omega_2)}{p_2(\omega_2)} = -\infty \end{aligned} \tag{4.23}$$

12) Logo, os valores de k_i que estabilizam o sistema, para o qual $k_p = 0.5$, estão na região:

$$k_i = (0, 1.25)$$

Portanto, para cada k_p fixo, encontra-se a faixa de k_i aplicando a sequência realizada. Na Fig. 4.1, foi realizado uma simulação de um sistema realimentado.

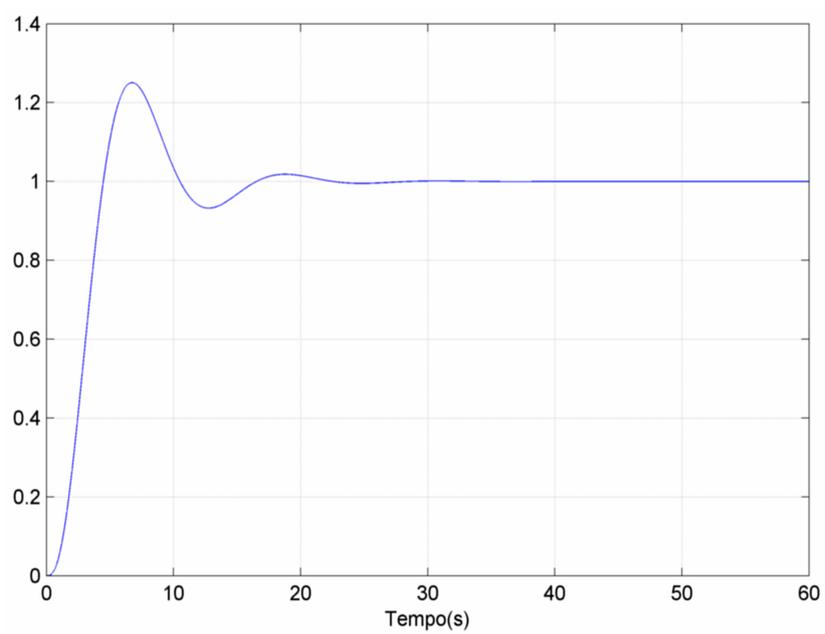


Figura 4.1: Resposta do sistema com $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.5$, para $SP = 1$

5

INTRODUÇÃO A ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES - COM RETARDO, UTILIZANDO O TEOREMA DE HERMITE BIEHLER

No capítulo anterior, foi apresentada de maneira generalizada uma sequência completa para caracterização de todo o conjunto PI para uma dada planta industrial. Porém, quando se aplicamos aquele conjunto estabilizante a plantas com atraso por certo tempo D o processo pode ser instável. O problema consiste é que ao acrescentar o termo e^{-Ds} , tem-se infinitas raízes (representação de uma série de senos e cossenos). O Teorema de Hermite-Biehler não é aplicado a sistemas com retardo. Portanto, não é aplicado a quase-polinômios ($g(s) = \sum_{k=0}^{\kappa} p_k(s)e^{s(\tau_{\kappa}-\tau_k)}$ e $p_k(s) = \sum_{j=0}^n a_{kj}s^j, i = 0, \dots, \kappa, \text{ com } \kappa \neq 0$). Porém, Pontryagin [33, 34] realizou uma extensão do teorema de Hermite-Biehler aplicável a uma classe de quase-polinômios [35].

Neste capítulo abordar-se, sucintamente, a classe de equações características, a aplicação da aproximação de Padè para conversão do tempo morto e uma aplicação prática para "teste" da estabilidade do processo. Por último, realiza-se um exemplo de aplicação no final do capítulo.

com o correspondente diagrama de blocos mostrado na Fig.5.3 O sistema (5.2) pode ser representado em variável de estado pela introdução de:

$$y(t) = x_1(t), \dot{y}(t) = x_2(t)$$

e escrevendo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - T_0) \\ x_2(t - T_0) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - T_1) \\ x_2(t - T_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

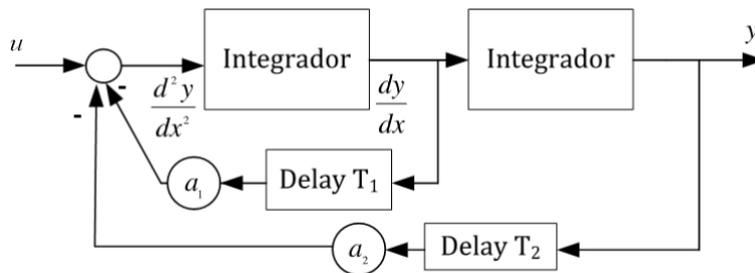


Figura 5.3: Múltiplos Delays.

Adicionalmente, um sistema linear e invariante com l delays T_1, \dots, T_l pode ser representado por uma de equação de estado

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t - T_i) + B u(t). \quad (5.4)$$

Para analisar a estabilidade do sistema, é usual examinar as soluções de $y(t)$ com $u(t) \equiv 0$ e estudar o comportamento de $y(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Considere o sistema (5.2) com $u(t) \equiv 0$, e considere $y(t) = e^{st}$ uma solução proposta de

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t - T_1) + a_0 y(t - T_0) \equiv 0. \quad (5.5)$$

Portanto, tem-se

$$(s^2 + a_1 e^{-sT_1} s + a_0 e^{-sT_0}) e^{st} \equiv 0$$

logo s deve satisfazer

$$s^2 + a_1 e^{-sT_1} s + a_0 e^{-sT_0} = 0 \quad (5.6)$$

A equação (5.6) é a equação característica de (5.2) ou (5.1), e a locação das suas raízes determinam a estabilidade do sistema representado por (5.2). Em particular, se alguma raiz está no lado direito do plano, o sistema é instável.

A equação característica associada com (5.4) pode ser da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta(s) : &= \det \left(sI - A_0 - \sum_{i=1}^l e^{-sT_i} A_i \right) \\ &= P_0(s) + \sum_{k=1}^m P_k(s) e^{-L_k s} \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde $L_k, k = 1, 2, \dots, m$ são somas de T_i e

$$P_0(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i \quad (5.8)$$

$$P_k(s) = \sum_{i=0}^{n-1} (b_k)_i s^i. \quad (5.9)$$

Nota-se que em (5.7) não existe delay associado com a derivada de maior ordem. Tais sistemas são referidos como sistemas retardados com atraso. Quando a derivada de maior ordem contém delays uma equação da seguinte forma

$$\ddot{y}(t - T_2) + \alpha_1 \dot{y}(t - T_1) + \alpha_0 y(t - T_0) = u(t) \quad (5.10)$$

e a equação característica

$$e^{-sT_2} s^2 + \alpha_1 e^{-sT_1} s + \alpha_0 e^{-sT_0} = 0. \quad (5.11)$$

Tais sistemas com delays associados a derivada de maior ordem são chamados de sistemas neutrais com atraso. Em ambos os sistemas (retardados e neutrais) a estabilidade é determinada com a condição de que todas as suas raízes da equação característica estão localizadas no lado esquerdo do plano complexo. Como motivação, observe o comportamento da mesma função de transferência do capítulo 4, com retardo, na fig.5.4.

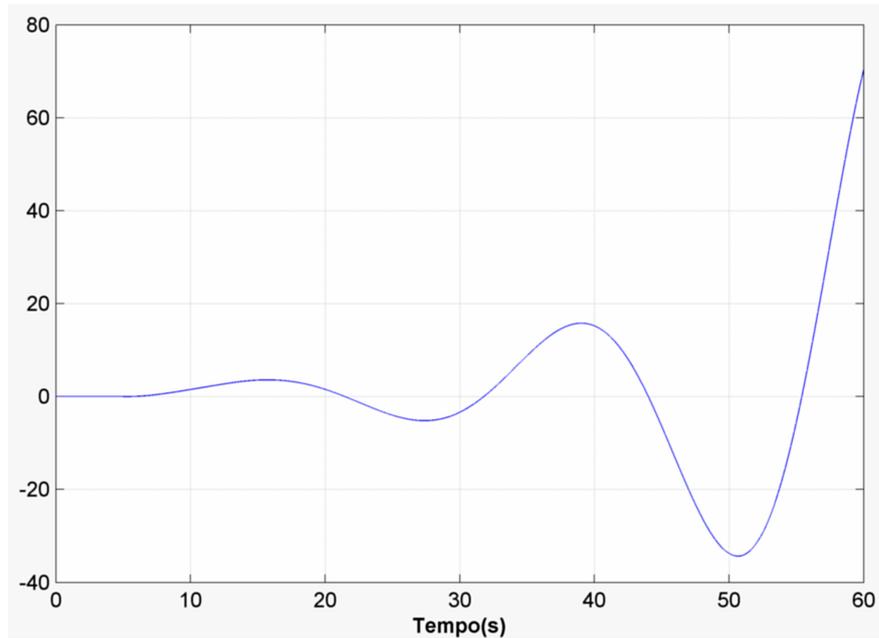


Figura 5.4: Resposta do sistema com atraso e controlado com PI usando $G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} e^{-5s}$ com $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.5$.

5.2 Aproximação de Padè

Conforme foi elucidado na introdução deste capítulo, o delay, não só é uma característica inerente de vários processos industriais, como também é devido aos atrasos de propagação de sinais ou de mudanças de variáveis em sistemas automáticos. Portanto, a aproximação de Padè [36, 37] é normalmente usada para aproximar um delay por uma função de transferência racional [38].

Uma aproximação lógica é usar esta aproximação para a análise da estabilidade e projeto dos controladores para sistemas com delay. Desta forma, aproximação do termo e^{-Ds} é dada por

$$e^{-Ds} \cong \frac{N_r(Ds)}{D_r(Ds)}$$

onde

$$N_r(Ds) = \sum_{k=0}^r \frac{(2r-k)!}{k!(r-k)!} (-Ds)^k$$

$$D_r(Ds) = \sum_{k=0}^r \frac{(2r-k)!}{k!(r-k)!} (Ds)^k$$

onde r representa a ordem da aproximação. Por exemplo, a terceira-ordem de aproximação ($r = 3$) é dada por

$$\frac{N_3(Ds)}{D_3(Ds)} = \frac{-D^3s^3 + 12D^2s^2 - 60Ds + 120}{D^3s^3 + 12D^2s^2 + 60Ds + 120}.$$

Obviamente, os resultados da seção anterior poderão ser utilizados para obtenção da estabilidade. Porém, a dificuldade consiste em determinar qual ordem da aproximação de Padè converge para o verdadeiro conjunto de valores estáveis de um controlador PI. Apresenta-se uma aplicação para compreensão do procedimento no próximo tópico e continua-se a demonstrar no decorrer do capítulo.

5.2.1 Exemplos e Aplicações

Exemplo 5.1 *Considere-se um sistema de terceira ordem, igual ao do capítulo precedente, porém com um delay de $t = 5s$. Assim, a função de transferência do processo com a inclusão do delay é*

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} e^{-5s}$$

Apresentam-se os cálculos para uma aproximação de primeira, terceira, décima e décima quinta ordem, sendo designadas por $P_1(s)$, $P_3(s)$, $P_{10}(s)$ e $P_{15}(s)$ as funções racionais de Padè, respectivamente.

A) 1ª ordem - $P_1(s)$ - A função de transferência do processo:

$$G_1(s) = G(s)P_1(s) = \frac{-s + 0.4}{s^4 + 3.4s^3 + 4.2s^2 + 2.2s + 0.4}$$

Aplicando o método descrito no capítulo anterior, a faixa de $k_p > 0$ que produzirá um k_i estabilizante, será:

$$k_p \in (0, 1.44267)$$

Portanto, ao inserir um retardo de 5s, obtém-se uma faixa bastante estreita com relação ao mesmo sistema sem delay. Adotando $k_p = 0.5$ os valores de k_i serão:

$$k_i \in (0, 0.27924)$$

Da mesma forma, ocorre uma redução da faixa estabilizante, comparando com um sistema sem delay.

B) 3ª ordem - $P_3(s)$ - A função de transferência do processo torna-se

$$G_3(s) = G(s)P_3(s) = \frac{-s^3 + 2.4s^2 - 2.4s + 0.96}{s^6 + 5.4s^5 + 12.6s^4 + 16.36s^3 + 12.48s^2 + 5.28s + 0.96}$$

Logo,

$$k_p \in (0, 1.26170)$$

Assim, adotando $k_p = 0.5$ os valores de k_i estabilizantes do sistema, são:

$$k_i \in (0, 0.25241)$$

C) 10ª ordem - $P_{10}(s)$ os valores de k_p e k_i serão:

$$k_p \in (0, 1.26144)$$

$$k_{i(k_p=0.5)} \in (0, 0.25240)$$

Assim, observa-se que os valores estão convergindo para o mesmo valor.

D) 15ª ordem - $P_{15}(s)$, os valores de k_p e k_i são:

$$k_p \in (0, 1.26144)$$

$$k_{i(k_p=0.5)} \in (0, 0.25240)$$

Realizando uma simulação com os valores $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.25$, observa-se o limite da estabilidade do sistema na fig.5.5

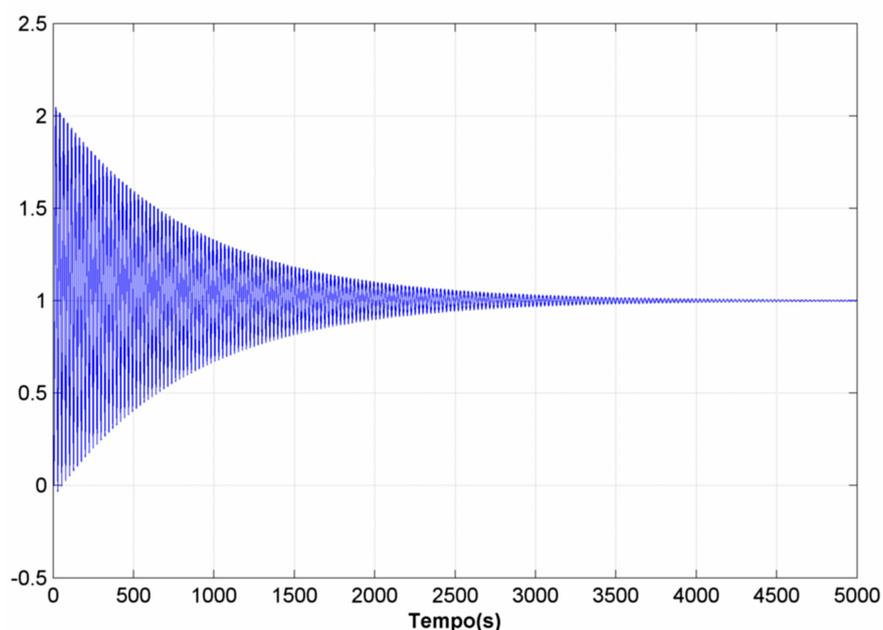


Figura 5.5: Resposta do sistema com atraso e controlado com PI usando $k_p = 0.5$ e $k_i = 0.25$.

Pode-se observar que os valores de k_p e k_i para a 10ª ordem e 15ª ordem de Padé não variam mais. Porém, sabe-se que a solução se torna mais complexa com o aumento da ordem. Portanto, em qual ordem de aproximação tem-se a faixa real de estabilidade de um sistema? Este assunto será tratado na próxima seção.

5.3 "Teste" da Estabilidade de um Processo

Nesta seção apresenta-se um critério de estabilidade para sistemas com um simples delay, isto é, um sistema com a seguinte equação característica:

$$\delta(s) = d(s) + n(s)e^{-Ds} \quad (5.12)$$

onde $d(s)$ e $n(s)$ são polinômios com coeficientes reais, com o grau de $[d(s)] = q$ e $[n(s)] = p$, $q > p$, e $D > 0$ é o delay do sistema. Adicionalmente, assume-se que quaisquer fatores comuns de $d(s)$ e $n(s)$ foram removidos.

A condição para estabilidade é que todas as raízes da equação característica[(5.12)] estão do lado esquerdo do plano complexo. Desta forma, no caso em questão, o básico problema de estabilidade é determinar a faixa de valores de D em que isso ocorre. Assim, desenvolve-se um procedimento sistemático para analisar o comportamento das raízes de (5.12) quando

D aumenta de 0 a ∞ . Utiliza-se o procedimento de Walton e Marshall [39]. Este método consiste de três passos básicos. O primeiro consiste em analisar a estabilidade de (5.12) para $D = 0$ e determinar o número de raízes, se existir, de $\delta(s) = 0$ que não estão no semi plano esquerdo do plano complexo. O segundo passo considera o caso de um infinitesimal valor de D . Para este valor existirá um infinito número de novas raízes e é necessário descobrir em qual lugar do plano complexo estas raízes surgiram. O terceiro e final passo é encontrar valores positivos de D , se existir, para os quais existem raízes de $\delta(s) = 0$ no eixo imaginário e, portanto, determinar se aquelas raízes simplesmente tocam o eixo ou se elas cruzam de um semi plano para outro com o aumento de D . Raízes cruzando da esquerda para direita são consideradas desestabilizantes e raízes cruzando da direita para esquerda são consideradas estabilizantes.

Estuda-se o movimento das raízes de $\delta(s) = 0$ com o aumento de $D > 0$. Em particular, determina-se para quais valores de D as raízes não estão do lado esquerdo do plano complexo, isto é, as regiões de instabilidade. Rescreve-se a equação da seguinte maneira

$$\delta(s, D) = d(s) + n(s)e^{-Ds} = 0. \quad (5.13)$$

Passo 1. Examina-se a estabilidade em $D = 0$

$$\delta(s, 0) = d(s) + n(s) = 0.$$

Isto é um problema de um sistema sem delay e qualquer método clássico pode ser aplicado. Se o sistema é descoberto ser instável será necessário determinar quantos zeros estão no lado direito do plano complexo ou no eixo imaginário.

Passo 2. Neste passo incrementa-se D de 0 a um infinitesimal número positivo. Nesta situação o número de raízes muda de finito para infinito e precisa-se determinar em qual lugar do plano complexo aquelas raízes surgem. Note que para um infinitesimal valor de D , as novas raízes devem vir do infinito; caso contrário, a expressão e^{-Ds} seria aproximadamente igual à unidade e não existiria qualquer raiz nova.

Passo 3. Neste segundo passo, deve-se que considerar os pontos de cruzamento no eixo

imaginário. Se $\delta(s, D) = 0$, há uma raiz em $s = j\omega$. Então também existe uma raiz em $s = -j\omega$. Isto implica que as raízes cruzam ou tocam o eixo imaginário em pares conjugados e portanto é suficiente considerar valores positivos de ω . Substituindo $s = \pm j\omega$ em (5.13) obtém-se

$$\begin{aligned} d(j\omega) + n(j\omega)e^{-j\omega D} &= 0 \\ d(-j\omega) + n(-j\omega)e^{j\omega D} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Eliminando o termo exponencial dará

$$d(j\omega)d(-j\omega) - n(j\omega)n(-j\omega) = 0. \quad (5.15)$$

A expressão do lado esquerdo desta equação é um polinômio em ω^2 e, por conveniência, o mesmo é denotado por

$$W(\omega^2) = d(j\omega)d(-j\omega) - n(j\omega)n(-j\omega). \quad (5.16)$$

É claro que somente os zeros reais e não-negativos de $W(\omega^2)$ são de interesse, uma vez que eles podem levar aos pontos de cruzamento $s = \pm j\omega$. Como uma consequência disto se existe nenhuma raiz positiva de $W(\omega^2)$, não existirão valores de D para os quais $\delta(j\omega, D) = 0$. Isto leva a um importante comentário.

Comentário 5.1 *Se $p < q$ e $W(\omega^2)$ não tem nenhuma raiz real positiva, então não existe mudança de estabilidade, isto é, se o sistema é estável em $D = 0$, então será estável para todo $D \geq 0$. Caso contrário, se o sistema é instável para $D = 0$, portanto será instável para todo $D \geq 0$.*

Se existe um valor real de ω tal que

$$d(j\omega) + n(j\omega)e^{-jD\omega} = 0$$

então,

$$e^{-j\omega D} = \frac{d(j\omega)}{n(j\omega)} \quad (5.17)$$

Assim, para cada número real ω satisfazendo $W(\omega^2) = 0$, existe um valor real positivo de D tal que $\delta(j\omega, D) = 0$ e isto é dado por:

$$\cos(D\omega) = \operatorname{Re} \left[-\frac{d(j\omega)}{n(j\omega)} \right], \quad \sin(D\omega) = \operatorname{Im} \left[\frac{d(j\omega)}{n(j\omega)} \right] \quad (5.18)$$

Destas expressões segue que se D_0 denota o menor valor de D (para um particular valor de ω) satisfazendo (5.18), então:

$$D = D_0 + \frac{2\pi k}{\omega}, k = 0, 1, 2, \dots$$

também são soluções. Portanto, para cada ω satisfazendo $W(\omega^2) = 0$, existe um infinito número de valores de D que cruzam o eixo imaginário.

Portanto, pode-se sintetizar o procedimento da seguinte forma:

1. Examine a estabilidade em $D = 0$
2. Determine as raízes positivas de $W(\omega^2) = 0$, correspondendo a valores positivos de D , e a natureza daquelas raízes. Se não existem raízes repetidas, então a estabilização e desestabilização alternam. O mesmo procedimento pode ser usado para os valores correspondentes de D a fim de determinar para quais valores de D todas as raízes de $\delta(s, D) = 0$ estão do lado esquerdo do plano complexo.
3. Para verificar se a raiz está estabilizando, verifique se o sinal de $W'(\omega^2) = -1$, caso contrário, estará desestabilizando.

5.4 Exemplos e Aplicações

Apresenta-se agora um exemplo simples de todo o procedimento descrito neste capítulo.

Considere $\delta(s, D) = s + 2e^{-Ds}$. Assim,

(1) $\delta(s, 0) = s + 2$, então o sistema é estável para $D = 0$.

(2) $d(s) = s$ e $n(s) = 2$, então $W(\omega^2) = \omega^2 - 4$, desta forma $W'(\omega^2) = 1$ que é positivo. Conclui-se que existe somente uma raiz positiva de $W(\omega^2)$ que é 4. Desde que $S = \text{sgn}[W'(\omega^2)] = 1$, essa raiz está desestabilizando. O correspondente valor de D é dado em 5.18:

$$\cos(D\omega) = \text{Re} \left[-\frac{j\omega}{2} \right] = 0, \quad \text{sen}(D\omega) = \text{Im} \left[\frac{j\omega}{2} \right] = 1.$$

Encontrando os valores de D , teremos:

$$D = \frac{\pi}{4} + k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$$

Isto significa que em $D = \frac{\pi}{4}$, duas raízes de $\delta(s, D) = 0$ cruzam da esquerda para direita no eixo imaginário. Portanto, em $D = \frac{5\pi}{4}$, mais duas raízes cruzam da esquerda para direita do eixo no eixo imaginário e assim sucessivamente. Conclui-se que a região de estabilidade será $0 \leq D < \frac{\pi}{4}$.

6 RESULTADOS PRÁTICOS

Neste capítulo, utiliza-se os procedimentos descritos anteriormente, para calcular os parâmetros de um controlador PI para um sistema físico. Aqui, realiza-se a Modelagem Matemática do Sistema, identificando a ordem, bem como aplicam-se as regras de acordo com a Categoria encontrada(Capítulo 2). Também, calcula-se a faixa de estabilidade de K_i para certo ganho proporcional K e testa-se a estabilidade do Sistema(Capítulos 3,4 e 5). Portanto, o objetivo será a obtenção de melhor desempenho da resposta de saída calculando a região utilizando o conceito do Teorema de Hermite Biehler(Capítulo 2). Todos os dados utilizados na modelagem do sistema, foram obtidos de ensaios realizados na bancada de bomba do Laboratório de Eficiência Energética e Qualidade de Energia - LEEQE do Departamento de Engenharia Elétrica - DEE da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE.

6.1 Descrição da Bancada de Bombeamento

Os experimentos descritos neste trabalho foram realizados no Laboratório de Otimização de Sistemas Motrizes-LAMOTRIZ, pertencente ao LEEQE/DEESP/UFPE, que tem por objetivo otimizar os processos industriais de modo a garantir maior eficiência energética desses sistemas. Neste laboratório, estão disponíveis para estudo de eficiência energética três bancadas que simulam sistemas industriais comumente utilizados: bombeamento de água [40], exaustão [41] e compressão de ar. Cada um desses sistemas possui diversas opções de

operação e controle e utiliza o programa supervisor WinCC® da SIEMENS.

6.1.1 A Bancada de Bombeamento

A Figura 6.1 apresenta uma foto da parte hidráulica da bancada de bombas, onde pode ser visualizados: medidores de vazão e pressão, válvulas manuais, solenóides e controladas, assim como, o conjunto motor-bomba e sensores de torque e velocidade. Os principais equipamentos/componentes presentes na bancada de bombeamento são apresentados a seguir:

1. Válvula manual na tomada da água;
2. Válvula de controle, de 0 a 100%, na tomada da água;
3. Bomba centrífuga;
4. Acoplamento motor-bomba;
5. Motor de alto rendimento;
6. Válvula manual para a drenagem;
7. Válvula de controle, de 0 a 100%, para by-pass;
8. Válvula de controle, de 0 a 100%, para subida de água aos reservatórios superiores;
9. Transdutor de pressão;
10. Válvula manual para descida da água dos reservatórios superiores;
11. Válvula solenóide para subida da água ao reservatório a 3m do piso;
12. Válvula solenóide para subida da água ao reservatório a 5m do piso;
13. Transdutor do nível de água do reservatório do piso;
14. Válvula manual para descida da água do reservatório a 3m do piso;
15. Válvula manual para descida da água do reservatório a 5m do piso;
16. Transdutor de Vazão.

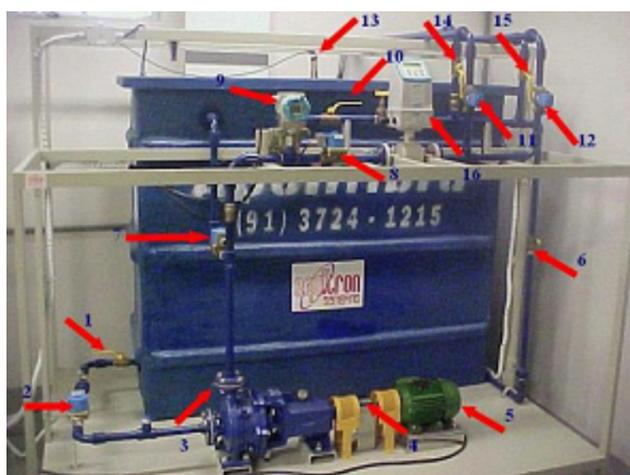


Figura 6.1: Bancada de Bombeamento.

6.2 Sistema de Supervisão e Controle

Na Figura 6.2, pode-se observar a tela de supervisão através do WinCC® da bancada do sistema de bombeamento utilizada nos experimentos. Conforme se pode observar na Figura 6.2, o sistema pode ser controlado via software supervisor, o que possibilita a implementação de algoritmos de controle via software de programação e através do programa supervisor WinCC® que, associado ao CLP, comanda o inversor de frequência, o qual permite a variação da rotação do motor do conjunto motor-bomba promovendo um controle eficiente da vazão.

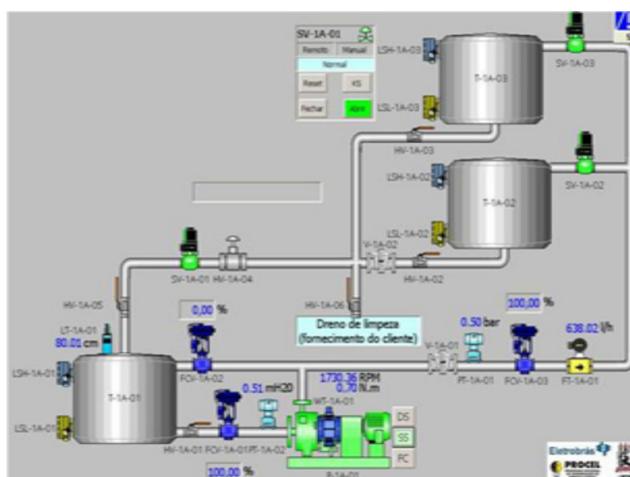


Figura 6.2: Bancada de Bombeamento.

6.3 Aplicação - Controle de Vazão de um Sistema de Bombeamento

A fim de conseguir controlar eficientemente a Planta, necessita-se calcular os parâmetros PI do controlador, assim como encontrar sua função de transferência. Portanto, aplicam-se, passo a passo, os tópicos elucidados nessa dissertação.

6.3.1 Modelagem Matemática

Para encontrar a Função de Transferência, é aplicado o Método do Relé à bancada física do sistema, onde o Diagrama de Blocos está representado na Figura 6.3.

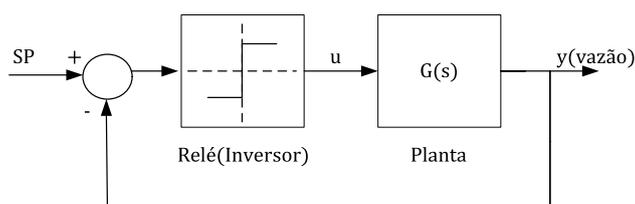


Figura 6.3: Diagrama de Blocos do Sistema Físico(Bancada da Bomba).

Os gráficos de vazão de saída e do relé estão representados, respectivamente nas Figuras 6.4 e 6.5.

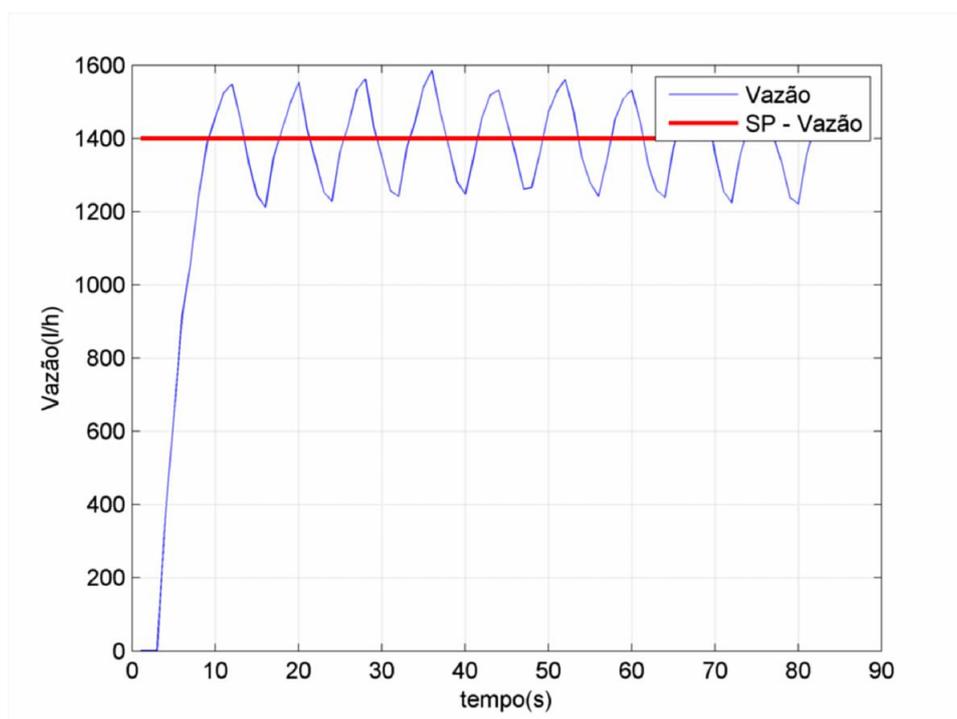


Figura 6.4: Gráfico da vazão de saída no tempo.

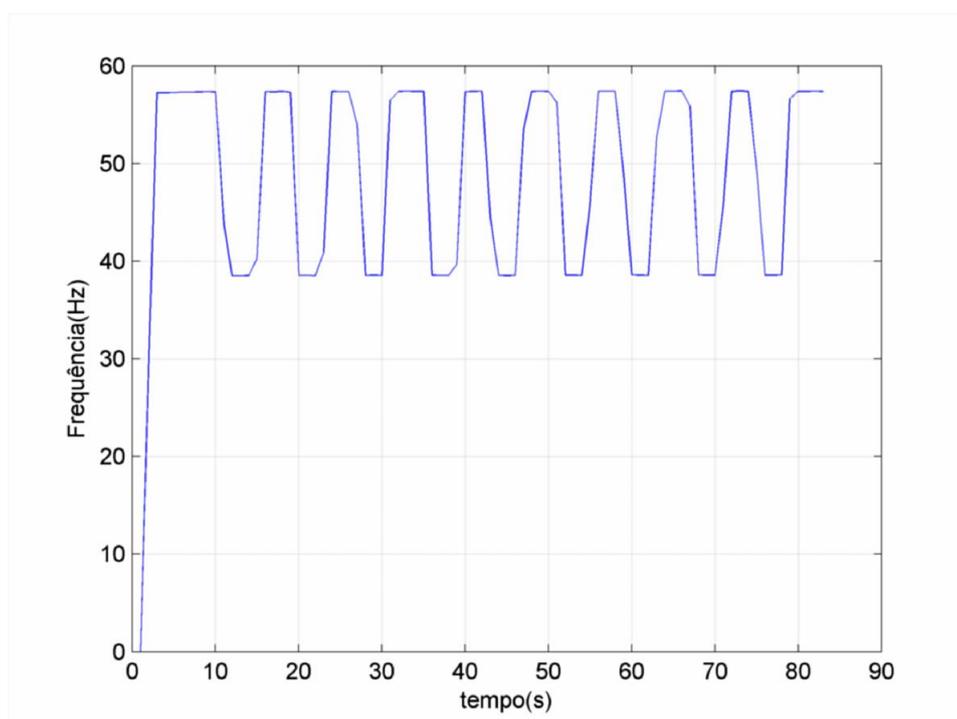


Figura 6.5: Gráfico da variação de frequência no tempo.

Observe que, de acordo com a Figura 2.7, observa-se uma curva com borda descontínua (aspecto triangular) correspondendo a processos de categoria 1a. Portanto, aplicando os

passos do Capítulo 2, tem-se:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{P_u/2}{\ln(2e^{D/\tau} - 1)} \\ \tau &= 4.4913\end{aligned}\quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}K &= \frac{a}{h(1 - e^{-D/\tau})} \\ K &= 30.1\end{aligned}\quad (6.2)$$

Assim, τ_u é calculado numericamente e, na Figura 6.4 e 6.5, encontram-se o tempo morto ($D = 1$), o período crítico ($P_u = 8$), a amplitude da vazão ($a = 85$) e a amplitude do relé ($h = 13.5$), definindo todos os parâmetros da função de transferência. Logo,

$$G_p(s) = \frac{30.1e^{-1s}}{(4.4913s + 1)} \quad (6.3)$$

A fim de validar a modelagem matemática do processo, realiza-se a simulação no software SIMULINK do MATLAB(Figura 6.6).

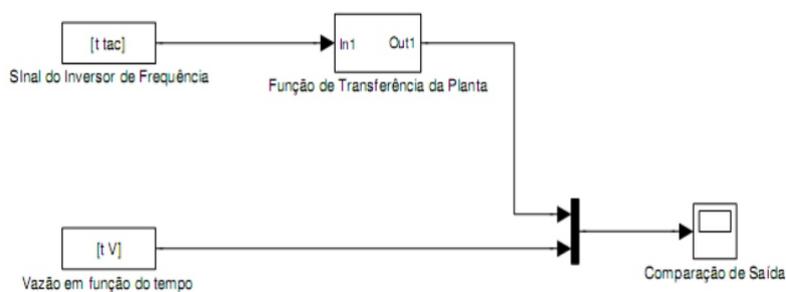


Figura 6.6: Sistema de Blocos no SIMULINK.

Assim, aplica-se o sinal do inversor de frequência (Figuras 6.7 e 6.9) na planta industrial e verificam-se as saídas simulada e real do processo(Figuras 6.8 e 6.10).

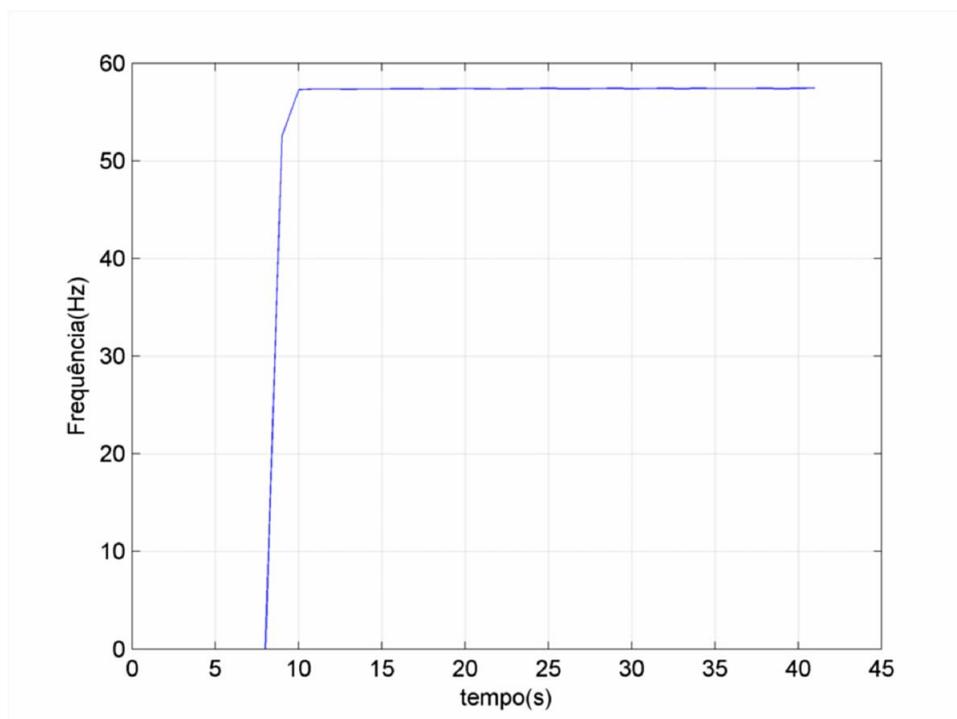


Figura 6.7: Sinal do Inversor de Frequência - 1.

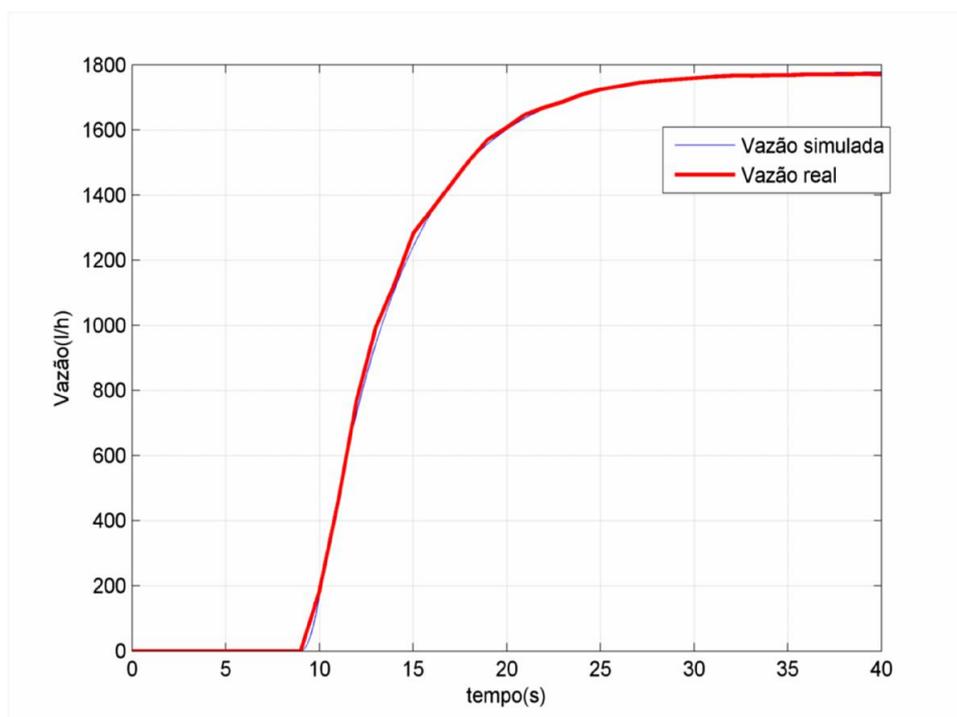


Figura 6.8: Vazão de saída devido a aplicação do sinal da Figura 6.7.

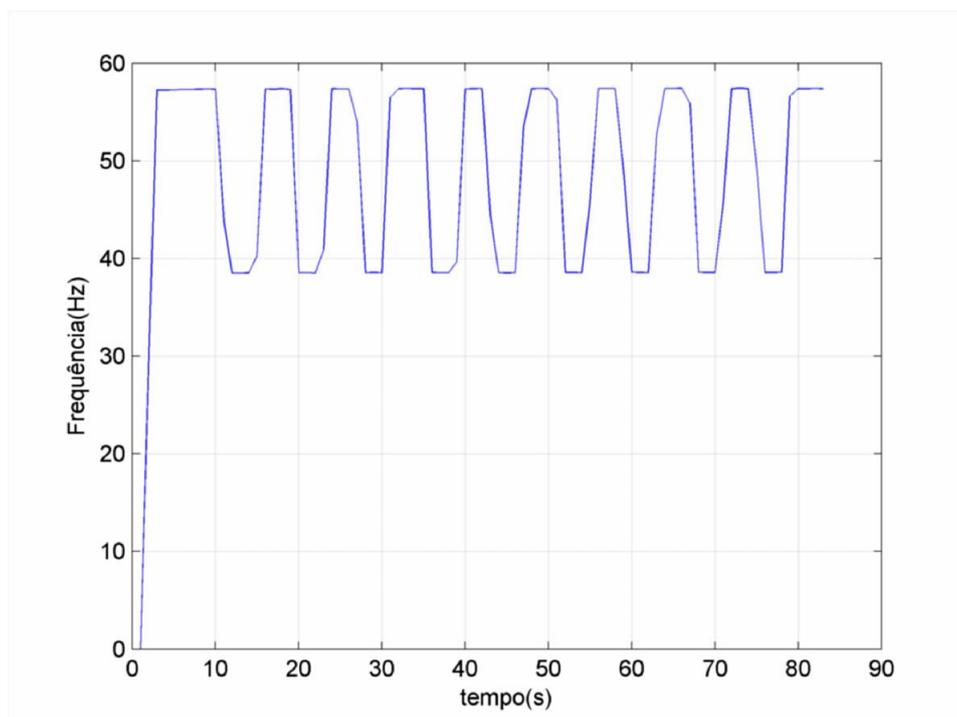


Figura 6.9: Sinal do Inversor de Frequência - 2.

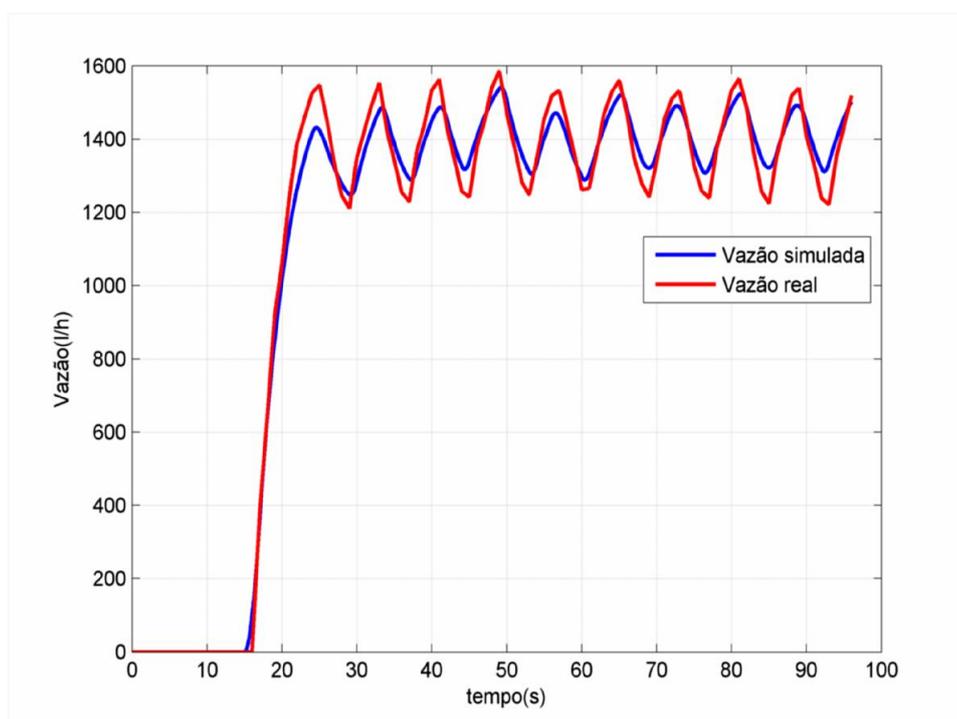


Figura 6.10: Vazão de saída devido a aplicação do sinal da Figura 6.9 .

Portanto, a modelagem matemática do processo apresenta-se bastante próxima do real. Sendo assim, é possível simular e calcular, eficientemente, os parâmetros do controlador PI.

6.3.2 Parametrização do Controlador PI

Conforme foi mencionado no capítulo 2, os sistemas foram divididos em categorias, assim como suas regras de parametrização. Assim, uma vez encontrada a função de transferência do processo, regras fixas existirão para definir os parâmetros do controlador. Porém, o objetivo dessa dissertação é encontrar, através do Teorema de Hermite Biehler, um controlador mais eficiente, que as regras fixas propostas, sabendo que o teorema calculará uma região de estabilidade do processo, conforme elucidado em exemplos anteriores.

Análise de Desempenho do Processo - Utilizando Regras Fixas

Utilizando a regra de Tyreus - Luyben, tem-se:

$$k_p = 0.0663 \quad (6.4)$$

$$k_i = 0.0310 \quad (6.5)$$

A saída do processo aplicando os parâmetros calculados está na Figura 6.11.

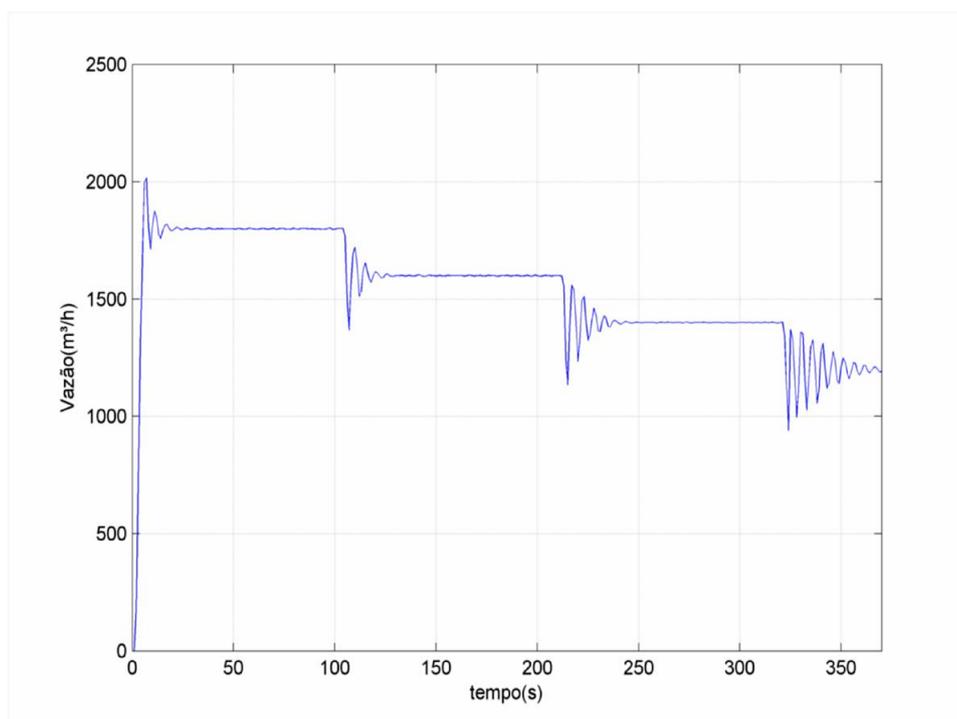


Figura 6.11: Gráfico de saída de vazão com quatro SP' s distintos a cada 120s (1800, 1600, 1400 e 1200).

Os parâmetros de desempenho médio estão na tabela abaixo:

Tabela 6.1: Parâmetros de desempenho de Tyreus-Luyben

$IAE(sl/h)$	$ITAE(s^2l/h)$	$t_d(s)$	$t_r(s)$	$M_p(\%)$	$t_s(s)$
7052.4	18891	3.46	5.55	11.66	20.2

Aplicação do Teorema de Hermite-Biehler e teste da estabilidade utilizando o procedimento de Walton

Utilizando os procedimentos do Apêndice A, o intervalo de estabilidade de k_p , no qual existirão k_i estabilizantes, utilizando a aproximação de Padè de 3º ordem, e considerando $k_p > 0$, será:

$$k_p \in (0, 0.28745) \quad (6.6)$$

Assim, considerando o mesmo valor de k_p aplicado na seção anterior, encontra-se o intervalo de estabilidade de k_i , utilizando o teorema de Hermite-Biehler:

$$k_i \in (0, 0.088054) \quad (6.7)$$

Portanto, é possível encontrar, para cada valor de k_p encontrado em 6.6, o intervalo estável de k_i . Agora, utilizando o procedimento de Walton do capítulo 5, adicionando o controlador PI(s) ao processo, tem-se:

$$\delta(s, D) = 4.4913s^2 + s + 30.1(0.0663s + k_i)e^{-Ds}$$

$$(1) - \delta(s, 0) = 4.4913s^2 + 30.1(0.0663s + k_i)$$

Aqui, pode-se utilizar o procedimento do Anexo A, para verificar o comportamento das raízes, assim:

$k \in (-\infty, 0)$: uma raiz real positiva e uma raiz real negativa

$k \in (0, 0.00736)$: duas raízes reais negativas

$k \in (0.00736, \infty)$: duas raízes complexas com partes reais negativas

Logo, verifica-se que o sistema é estável para todo $k_i > 0$, para $D = 0$

$$(2) - d(s) = 4.4913s^2 + s \text{ e } n(s) = 30.1(0.0663s + k_i), \text{ então,}$$

$$W(\omega^2) = 20.17177\omega^4 - 2.98253\omega^2 - 90.601k_i^2, \text{ e}$$

$$W'(\omega^2) = 80.68708\omega^3 - 5.96506\omega$$

Analisando o gráfico de $W'(\omega^2)$ verifica-se que somente no intervalo $[0, 0.2718]$ será

negativo(Figura 6.12) e, avaliando o polinômio $W(\omega^2)$, todas as raízes estão fora desse intervalo, considerando $k_i \in (0, 0.088054)$. Portanto todas as raízes positivas de $W(\omega^2)$ estarão desestabilizando. Logo, cada k_i associado a certo D , será válido no intervalo $(0, D)$. Agora, calculando as raízes positivas para cada $k_i \in (0, 0.088054)$ e calculando o valor do delay(D) associado a cada elemento de k_i , é plotado um gráfico para análise da estabilidade(Figura 6.13).

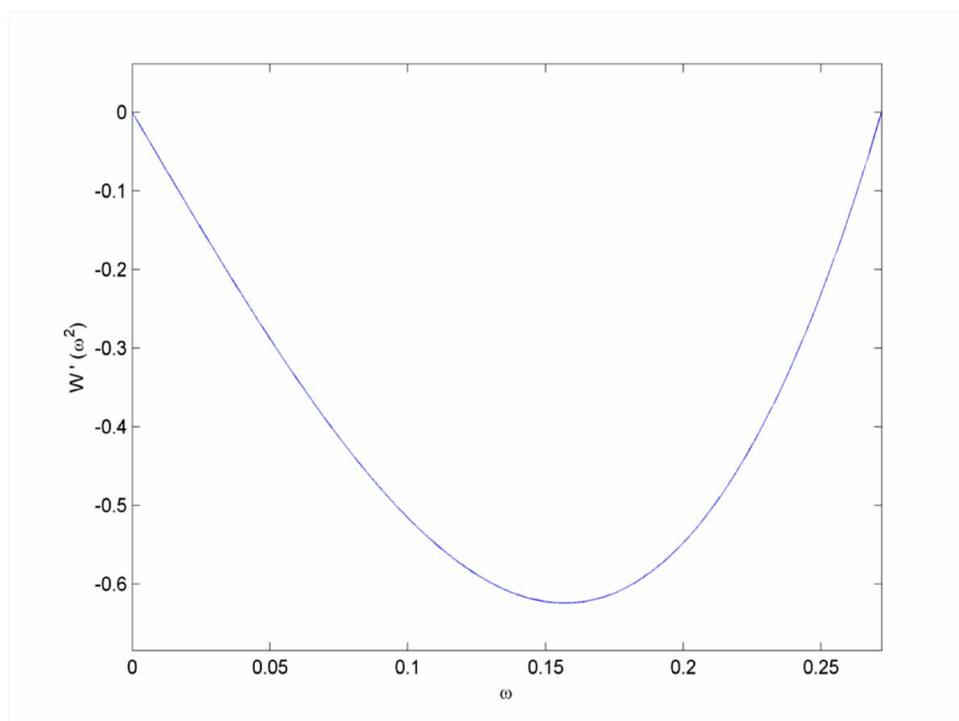


Figura 6.12: Comportamento de $W'(\omega^2)$ em função da variação de ω .

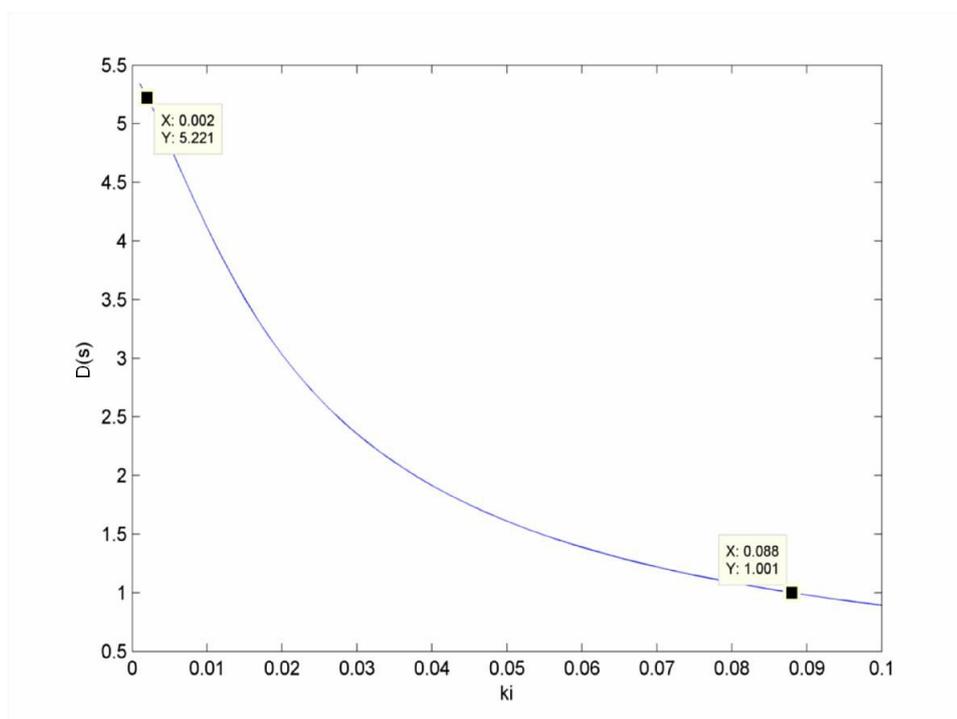


Figura 6.13: Comportamento de $D(s)$ em função da variação de k_i no intervalo estável considerado.

A interpretação desse gráfico é de suma importância, uma vez que é possível observar no ponto ($k_i = 0.088$, $D = 1.001$) que representa o valor limite da estabilidade. De acordo com o gráfico, é possível analisar que aumentando o valor de k_i o valor de D decresce. Portanto, sabe-se que o intervalo calculado é uma região de estabilidade. Assim, a aproximação de Padè de 3ª ordem é suficiente.

Análise de Desempenho do Processo - Utilizando o toolbox Simulink Response Optimization do Matlab

No toolbox do Matlab, considerando k_i como um parâmetro a ser encontrado, o objetivo será de minimizar os parâmetros de desempenho (IAE , $ITAE$, t_d , t_r , M_p , t_s), a fim de obter uma curva com melhor performance. Assim, são fornecidos como entradas alguns dos parâmetros de desempenho para o toolbox (t_r , M_p , t_s) e a curva de resposta séria (Fig.6.14):

Tabela 6.2: Parâmetros de desempenho médio utilizando o toolbox para entrada dos parâmetros

$IAE(sl/h)$	$ITAE(s^2l/h)$	$t_d(s)$	$t_r(s)$	$M_p(\%)$	$t_s(s)$
7017	16040	3.24	5.55	2.2	18.84

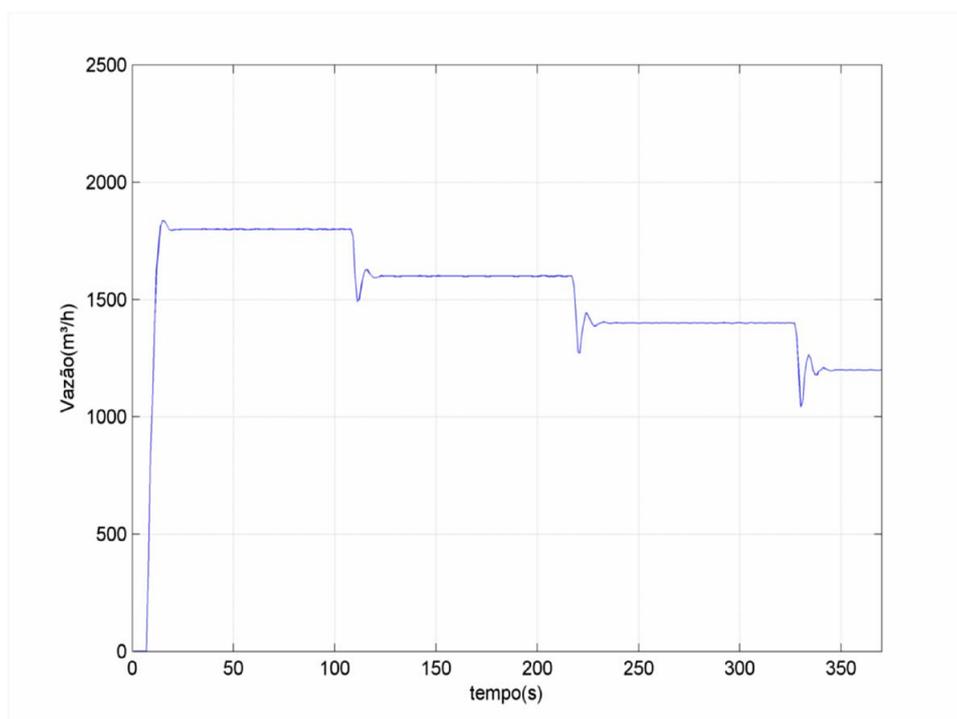


Figura 6.14: Gráfico de saída de vazão com quatro SP' s distintos a cada 120s (1800, 1600, 1400 e 1200).

Comparando as Tabelas 6.1 e 6.2, encontram-se parâmetros de desempenho mais satisfatórios do que o realizado via regras fixas. O valor encontrado na otimização foi de $k_i = 0.0120$ para o processo. Adicionalmente, o esforço computacional do método de procura (gradiente descendente) é reduzido consideravelmente, quando se define o intervalo de busca e um valor inicial adequado (através do Teorema de Hermite-Biehler).

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo mostrar a aplicação do Teorema de Hermite Biehler aplicado a sistemas industriais, quanto ao aspecto de sistemas de controle.

Inicialmente, foi feita uma abordagem generalizada do segmento industrial, bem como, enfatizou-se a inclusão do termo *Delay*/tempo morto nos processos. Foram também descritos alguns métodos atuais de modelagem e de parametrização.

Utilizando o Teorema de Hermite Biehler, seguido do procedimento de Walton para estabilidade, foram obtidos resultados satisfatórios. Procedimentos de simulação para análise, foram também empregados.

A implementação experimental foi precedida de um estudo, através da modelagem matemática da função de transferência do processo (Sistema de Bombeamento), tendo sido incluído certo retardo no processo.

Assim, essa dissertação tende a direcionar o ponto de partida para cálculo real quanto à estabilidade de um processo. Além disso, foram realizados vários exemplos ilustrativos.

7.1 Trabalhos Futuros

Tendo em vista aperfeiçoar o trabalho desenvolvido, algumas propostas de trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Estudo de parametrização e estabilidade para controladores PID;
- Aplicação em sistemas multivariáveis
- Aplicação de técnicas de otimização no aspecto de desempenho do Sistema;
- Extensão do Teorema de Hermite Biehler para polinômios complexos;
- O emprego de sistemas inteligentes para controle industrial;
- Aplicação de todos os itens mencionados acima para sistemas discretos;



UTILIZAÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES PARA O ESTREITAMENTO DA FAIXA DE VARREDURA DE k

Considere o problema da determinação do lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$, onde $U(x)$ e $V(x)$ são polinômios coprimos e k varia de $-\infty$ a ∞ . Podem ser feitas as seguintes observações:

1. Os pontos de ramificação reais do lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$ correspondem a raízes reais e múltiplas as quais devem, portanto, satisfazer

$$\frac{d\frac{V(x)}{U(x)}}{dx} = 0 \quad (\text{A.1})$$

ou seja,

$$\frac{U(x)\frac{dV(x)}{dx} - V(x)\frac{dU(x)}{dx}}{U^2(x)} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Os pontos de ramificação reais são os zeros reais da equação acima.

2. Sejam $k_1 < k_2 < \dots < k_z$ os valores distintos e finitos de k correspondentes aos pontos de ramificação reais $x_i, i = 1, 2, \dots, z$ sobre o lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$. Defina $k_0 = -\infty$ e $k_{z+1} = \infty$. Então $x_i, i = 1, 2, \dots, z$ são as raízes reais múltiplas de $U(x) + kV(x) = 0$ e os correspondentes k' s são os k'_i s. Pode-se observar que para $k \in (k_i, k_{i+1})$, as raízes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ são simples e o número de raízes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ é invariante.

3. Se $U(0) + kV(0) \neq 0$ para todo $k \in (k_i, k_{i+1})$, então a distribuição das raízes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ em relação a origem é invariante neste intervalo de valores de k .

O exemplo a seguir ilustra como as observações acima podem ser utilizadas para determinar a distribuição das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$ em relação à origem quando k varia de $-\infty$ a ∞ .

A.1 Exemplo de Aplicação

Encontre as distribuições das raízes reais através do estreitamento de faixa. Considerando os polinômios abaixo:

$$\begin{aligned}U(x) &= -x^8 + 9x^6 + 154x^4 - 369x^2 + 60 \\V(x) &= x^6 + 40x^4 - 8x^2 + 1\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{U(x)\frac{dV(x)}{dx} - V(x)\frac{dU(x)}{dx}}{U^2(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

onde

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= 2x^7 + 160x^5 - 460x^3 - 1180x - 26750x^5 + 8984x^3 - 222x \\ \beta(x) &= (-x^8 + 9x^6 + 154x^4 - 369x^2 + 60)^2.\end{aligned}$$

Os pontos de ramificação, que são os zeros reais e distintos da equação acima, x_i são:

$$x_1 = \pm 0.16390, x_2 = 0, x_3 = \pm 2.60928, x_4 = \pm 0.55140.$$

Portanto, os valores de k calculados nos pontos de ramificação, são:

$$k_1 = -61.67086, k_2 = -60, k_3 = -2.54119, k_4 = 16.44309.$$

A distribuição das raízes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ com relação à origem, correspondendo a diferentes faixas de k , são dado a seguir:

- $k \in (-\infty, -61.67086)$: nenhuma raiz real
- $k \in (-61.67086, -60)$: duas raízes reais simples positivas
: duas raízes reais simples negativas
- $k \in (-60, -2.54119)$: uma raiz real simples positiva
: uma raiz real simples negativa
- $k \in (-2.54119, 16.44309)$: três raízes simples positivas
: três raízes reais simples negativas
- $k \in (16.44309, \infty)$: uma raiz real simples positiva
: uma raiz real simples negativa

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. R. Silva, “Controladores pid industriais com sintonia automática por realimentação a relê,” Dissertação de Mestrado, UFCE, 1999.
- [2] L. Desborough and R. Miller, “Increasing customer value of industrial control performance monitoring-honeywell experience,” *6th Int. Conf. Chemical Process Control, AIChE Symp.*, 2002.
- [3] J. Ziegler and N. Nichols, “Optimum settings for automatic controllers,” *ASME*, 1993.
- [4] B. O. BA and W. Ray, *Process dynamics, modeling, and control*. New York: Oxford University Press, 1994.
- [5] W. Bialkowski, “Dream vs reality: A view from both sides of the gap,” *Pulp Paper Can*, pp. 19–49, 1993.
- [6] D. Ender, “Process control performance: Not as good as you think,” *Control Eng*, pp. 40–180, 1993.
- [7] G. McMillan, “Tuning and control loop performance,” *Instrument Society of America: Research Triangle Park*, 1994.
- [8] M. Hersh and M. Johnson, “A study of advanced control systems in the workplace,” *Control Eng. Prac*, pp. 5–771, 1997.
- [9] A. M. F. Silva, “Obtenção de conjuntos estabilizantes de controladores pid para sistemas com atraso utilizando o teorema de hermite-biehler,” Dissertação de Mestrado, USP, 2008.

- [10] G. J. Silva, A. Datta, and S. Bhattacharyya, *PID controllers for time-delay systems*, 1st ed. United States of America, 2004.
- [11] L. Pontryagin, “On the zeros of some elementary transcendental functions,” *American Mathematical Society Translations Series*, vol. 2, pp. 95–100, 1995.
- [12] K. Astrom, *Adaptive Control, Filtering and Signal Processing*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [13] Y. Tsytkin, *Relay Control Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
- [14] W. Luyben, “Derivation of transfer functions for highly nonlinear distillation columns.” *Ind. Eng. Chem. Res.*, pp. 26–2490, 1987.
- [15] D. Atherton, *Robust Control of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainty*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1975.
- [16] D. Seborg, T. Edgar, and D. Mellichamp, *Process dynamics and control*. New York: Wiley, 2004.
- [17] W. Luyben and M. Luyben, *Essentials of process control*. New York: McGraw-Hil, 1997.
- [18] Q. Wang, T. Lee, and C. Lin, *Relay feedback*. London: Springer-Verlag, 2003.
- [19] J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [20] J. Goncalves, A. Megretski, and M. Dahleh, “Global stability of relay feedback systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, pp. 550–562, 2001.
- [21] K. Åström and T. Hägglund, “Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins,” *Automatica*, pp. 20–645, 1984.
- [22] K. Ogata, *Modern control engineering*. United States of America, 1970.
- [23] C.-C. Yu, *Autotuning of PID controllers: A Relay Feedback Approach*, 2nd ed. Germany, 2006.

- [24] C. Lin, "Relay feedback: A complete analysis for first-order systems," *Industrial Engineering Chemistry Research*, vol. 43, pp. 8400–8402, 2004.
- [25] B. Bequette, *Process control: Modeling, design, and simulation*. Prentice-Hall: Upper Saddle River, 2003.
- [26] B. Huang and S. Shah, *Control loop performance assessment: Theory and applications*. Springer-Verlag, 1999.
- [27] A. A. Rovira, P. W. Murril, and C. L. Smith, "Tuning controllers for setpoint changes," *Instruments and Control Systems*, vol. 42, pp. 67–69, 1969.
- [28] D. E. Rivera, M. Morari, and S. Skogestad, "Internal model control. 4. pid controller design," *Ind. Chem. Res.*, vol. 25, pp. 252–265, 1986.
- [29] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*. New York:Chelsea, 1959.
- [30] M. Ho, A. Datta, and S. Bhattacharyya, "Generalizations of the hermite biehler theorem," *Linear Algebra and its Applications*, 1999.
- [31] A. Ozguler and A. Kocan, "An analytic determination of stabilizing feedback gains," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 302-303, pp. 135–153, 1994.
- [32] A. Datta, M. Ho, and S. Bhattacharyya, *Structure and Synthesis of PID Controllers*. London:Springer Verlag, 2000.
- [33] K. Ho and W. Chan, "Stability of third-order control systems with time lag using pontryagin's method for zero determination," *Proceedings of IEE*, vol. 116, pp. 2063–2068, 1969.
- [34] W. Thompson, A. Vacroux, and C. Hoffman, "Application of pontryagin's time lag stability criterion to force-reflecting servomechanisms," *9th Joint Automatic Control Conference*, pp. 432–443, 1968.
- [35] J. Karmarkar and D. Siljak, "Stability analysis of systems with time delay," *Proceedings of IEE*, vol. 117, pp. 1421–1424, 1970.

- [36] J. Marshall, H. Gorecki, A. Korytowski, and K. Walton, *Time-Delay Systems: Stability and Performance Criteria with Applications*. New York: Elias Horwood, 1992.
- [37] J. Marshall, *Control of Time Delay Systems*,. London:Peter Peregrinus, 1979.
- [38] N. Choksy, "Time lag systems a bibliography," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 5, 1960.
- [39] K. Walton and R. Miller, "Direct method for tds stability analysis," *Proceedings of IEE, Part D*, vol. 46, pp. 101–107, 1987.
- [40] R. R. B. Aquino, M. Lira, R. C. F. Coelho, P. S. Amorim, A. F. Santos, and J. R. C. Ribeiro, "Controle inteligente de vazão aplicado a um sistema de bombeamento," *CBEE*, 2009.
- [41] R. R. B. Aquino, Z. D. Lins, J. R. C. Ribeiro, R. C. F. Coelho, P. S. Amorim, and A. F. Santos, "Eficiência energética no controle automático de vazão de ar de um sistema de exaustão usando lógica fuzzy," *CBEE*, 2009.