

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA

**MODELO DE CANAL DE ESTADOS
FINITOS PARA CANAIS COM
DESVANECIMENTO
CORRELACIONADO NO TEMPO E
DECISÃO SUAVE**

VIRTUS IMPAVIDA

RECIFE, DEZEMBRO DE 2008.

IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA

**MODELO DE CANAL DE ESTADOS
FINITOS PARA CANAIS COM
DESVANECIMENTO
CORRELACIONADO NO TEMPO E
DECISÃO SUAVE**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Elétrica**

ORIENTADOR: PROF. CECILIO JOSÉ LINS PIMENTEL, PH.D.

Recife, Dezembro de 2008.

©Igor de Moura Leite Moreira, 2008

M838m **Moreira, Igor de Moura Leite.**

Modelo de canal de estados finitos para canais com desvanecimento correlacionado no tempo e decisão suave / Igor de Moura Leite Moreira. - Recife: O Autor, 2008
69 folhas, il : tabs grafs , figs

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco
CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Inclui Bibliografia.

1. Engenharia Elétrica. 2. Canais de estados finitos
3. Transmissão digital. 4. Desvanecimento 5. Entrelaçamento 6
Códigos de bloco. I. Título

621.3

UFPE
BCTG/ 2009-039



Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DO MESTRADO ACADÊMICO DE

IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA

TÍTULO

**“MODELO DE CANAL DE ESTADOS FINITOS
PARA CANAIS COM DESVANECIMENTO
CORRELACIONADO NO TEMPO E DECISÃO SUAVE”**

A comissão examinadora composta pelos professores: CECÍLIO JOSÉ LINS PIMENTEL, DES/UFPE, RICARDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, DES/UFPE e DANIEL CARVALHO DA CUNHA, POLI/UPE sob a presidência do primeiro, consideram o candidato **IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA** **APROVADO.**

Recife, 17 de dezembro de 2008.

EDUARDO FONTANA
Coordenador do PPGEE

CECÍLIO JOSÉ LINS PIMENTEL
Orientador e Membro Titular Interno

DANIEL CARVALHO DA CUNHA
Membro Titular Externo

**RICARDO MENEZES CAMPELLO DE
SOUZA**
Membro Titular Interno

Aos meus pais, Galba e Cleide, pelo esforço em me educar,
e à minha esposa, Maridélia, pelo apoio.

AGRADECIMENTOS

A GRADEÇO...

primeiramente a Deus, por tudo;

ao Professor Cecílio Pimentel, cuja paciência em ensinar e o estímulo para o trabalho nos momentos difíceis, mesmo a uma grande distância, foram imprescindíveis;

a Sérgio Cavendish, Hélio Godoy e Luiz Geraldo Rocha, pela compreensão durante minhas ausências físicas e mentais em prol da elaboração deste trabalho;

e aos colegas, que tanto me ensinaram nos finais de semana em que estudamos juntos.

IGOR DE MOURA LEITE MOREIRA

Universidade Federal de Pernambuco

17 de Dezembro de 2008

É melhor tentar e falhar, que preocupar-se em ver a vida passar. É melhor tentar, ainda que em vão que sentar-se, fazendo nada até o final. Eu prefiro na chuva caminhar, que em dias frios em casa me esconder. Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver.

— **Martin Luther King**

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

**MODELO DE CANAL DE ESTADOS FINITOS PARA
CANAIS COM DESVANECIMENTO
CORRELACIONADO NO TEMPO E DECISÃO SUAVE**

Igor de Moura Leite Moreira

Dezembro/2008

Orientador: Prof. Cecilio José Lins Pimentel, Ph.D.

Área de Concentração: Telecomunicações

Palavras-chaves: canais de estados finitos, transmissão digital, desvanecimento, entrelaçamento, códigos de bloco.

Número de páginas: 69

MODELOS de canais de estados finitos Markovianos (FSMC, do inglês *Finite State Markov Channel*) são comumente usados para caracterizar a memória de canais discretos binários (entrada binária, saída binária). Este trabalho propõe um novo modelo pertencente à classe FSMC, denominado de modelo com apagamento (MA), que foi idealizado para modelar canais discretos não binários (entrada binária, saída ternária) com memória. Desta forma, o decodificador irá rotular os símbolos recebidos pouco confiáveis por um símbolo de apagamento, resultando em uma atuação mais eficiente do código corretor de erro. Uma vez definido o modelo MA, seus parâmetros serão estimados de modo a aproximar um canal discreto composto por um modulador BPSK, um canal com desvanecimento Rayleigh com função de autocorrelação com decaimento exponencial e ruído aditivo Gaussiano branco, um demodulador coerente e um quantizador com três níveis de quantização. Para isso, será utilizado o método de minimização da divergência, mensurada pela distância de Kullback-Leibler. Para avaliar a exatidão do modelo proposto, serão comparadas as curvas da função autocorrelação obtidas analiticamente para o canal discreto e para o modelo MA. Será usada uma técnica enumerativa para avaliar analiticamente o desempenho de códigos de bloco para correção de erros e apagamentos gerados pelo no modelo MA. A expressão obtida será estendida a fim de englobar os casos em que um entrelaçamento finito é incorporado ao sistema de comunicações. Este trabalho contribui com técnicas de modelamento e ferramentas para avaliação de desempenho de canais com memória.

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering

**FINITE-STATE CHANNEL MODEL FOR
TIME-CORRELATED FADING CHANNELS WITH
SOFT-DECISION**

Igor de Moura Leite Moreira

December/2008

Supervisor: Prof. Cecilio José Lins Pimentel, Ph.D.

Area of Concentration: Telecommunications

Keywords: finite state channel, digital transmission, fading, interleaving, block codes

Number of pages: 69

FINITE-STATE Markov channels (FSMC) are commonly used to characterize the memory of binary (binary-input, binary-output) discrete channels. This work proposes a new FSMC model, called model with erasure (MA), which was designed to model non-binary (binary-input, ternary-output) discrete channels with memory. The MA is used to model a discrete communication system composed of a BPSK modulator, a channel with Rayleigh fading with a known autocorrelation function and additive white Gaussian noise, a coherent demodulator and a three levels quantizer. The parameters of the MA are found by minimizing the divergence, or the Kullback-Leibler distance, between the probabilities of the MA and the discrete channel. To evaluate the accuracy of the proposed model, the autocorrelation function obtained analytically for the discrete channel and for the MA are compared. Finally, an enumerative technique is proposed to evaluate analytically the performance of block codes with errors and erasures decoding over the MA. This derivation will be extended to include the case in which a finite interleaving is incorporated into the communications system. This work contributes with modeling techniques and analytical tools for evaluating the performance of channels with memory.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Modelo Gilbert-Elliot para canais com memória.	24
2.2	Modelo de Fritchman para canais com memória.	25
3.1	Modelo com apagamento para canais com memória.	28
3.2	Sistema de comunicações com modulador BPSK, canal com desvanecimento Rayleigh, demodulador e quantizador.	31
3.3	Regiões de decisão para um canal discreto com 3 níveis de quantização.	33
3.4	$C^{(1)}, C^{(2)}$ versus δ para o CDCE com $B_dT = 0,01$ e $E_s/N_0 = 5$ dB.	41
3.5	$C^{(1)}, C^{(2)}$ versus δ para o CDCE com $B_dT = 0,01$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.	42
3.6	Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,1$, $\delta = 0,25$ e $E_s/N_0 = 5$ dB.	44
3.7	Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,1$, $\delta = 0,15$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.	45
3.8	Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,25$ e $E_s/N_0 = 5$ dB.	46
3.9	Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,15$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.	46
3.10	Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,001$, $\delta = 0,15$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.	47
4.1	Sistema de comunicações codificado.	49
4.2	PCE versus d_{min} para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, para o MA que modela um CDCE com $E_s/N_0 = 10$ dB, $\delta = 0,15$ e $B_dT = 0,01$	56
4.3	PCE versus d_{min} para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, para o MA que modela um CDCE com $E_s/N_0 = 12$ dB, $\delta = 0,12$ e $B_dT = 0,01$	57
4.4	Variação da PCE versus E_s/N_0 para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, em um canal MA modelado para um CDCE com $B_dT = 0,01$ e com valores de δ que maximizam a capacidade para cada valor de E_s/N_0	58
4.5	Variação da PCE versus E_s/N_0 para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, em um canal MA modelado para um CDCE com $B_dT = 0,1$ e com valores de δ que maximizam a capacidade para cada valor de E_s/N_0	59
4.6	Sistema de comunicações com entrelaçamento.	59

- 4.7 PCE versus d_{min} tendo I_d como parâmetro para o canal MA que modela um CDCE com parâmetros $E_s/N_0 = 5$ dB, $B_dT = 0,01$ e $\delta = 0,25$, com um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$ 62
- 4.8 PCE versus I_d para um MA que modela um CDCE com parâmetros $E_s/N_0 = 10$ dB, $B_dT = 0,01$ e $\delta = 0,15$, com um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$ e $d_{min} = 17$ 62

LISTA DE TABELAS

3.1	Valores de δ ótimo em função de E_s/N_0 para $B_dT = 0,01$	43
3.2	Valores dos parâmetros do MA que modelam um CDCE.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Organização da Dissertação	15
2	CADEIAS DE MARKOV E CANAIS DE ESTADOS FINITOS	16
2.1	Processos Markovianos Discretos	16
2.2	Propriedades de Canais Discretos	20
2.2.1	Canal de Estados Finitos Markoviano	21
2.3	Canais de Estados Finitos Binários	23
2.3.1	O Canal Gilbert-Elliot	23
2.3.2	Modelo de Fritchman	24
3	MODELO COM APAGAMENTO PARA CANAIS DE ESTADOS FINITOS	27
3.1	Modelo com Apagamento	27
3.1.1	Função Autocorrelação	30
3.2	Modelo do Sistema	31
3.2.1	Capacidade do canal	37
3.2.2	Estimação dos parâmetros do MA	42
4	DESEMPENHO DE CÓDIGOS DE BLOCO NO CANAL MA	48
4.1	Recorrência no MA	48
4.2	Canais com entrelaçamento	56
5	CONCLUSÕES	63
5.1	Sugestões para futuros estudos	64

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

ATUALMENTE, observa-se um aumento na demanda por comunicação multimídia que transmite informação por canais sem fio, especialmente após o lançamento do Wimax [1], TV Digital [2] e 3G [3]. Tal fato deve-se essencialmente ao menor custo de instalação e manutenção, além do benefício da mobilidade que as redes fixas não possuem.

Cabe observar, no entanto, que canais sem fio estão sujeitos a uma série de distúrbios que variam no tempo, tais como perda por propagação, regiões de sombreamento e desvanecimento por multipercurso. Especial atenção deve ser dispensada aos efeitos danosos do desvanecimento sobre as transmissões sem fio. Uma característica comumente presente em muitos canais com desvanecimento é que os erros ocorrem em surtos, indicando a existência de uma correlação no processo de geração desses erros [4]. Devido à dependência estatística na ocorrência de erros, o canal é dito ser um canal com memória.

Utiliza-se normalmente a técnica de entrelaçamento [5] para eliminar ou diminuir os efeitos da memória do canal, porque muitos sistemas de codificação e protocolos são projetados para processos de erros sem memória. Com um entrelaçamento ideal, é possível modelar um canal com desvanecimento como um canal sem memória, porém o uso do entrelaçamento utiliza um maior processamento em tempo real, o que requer um sistema mais complexo além de introduzir um atraso. Como entrelaçadores perfeitos requerem um grande processamento e causam um atraso indesejável, a transmissão de pacotes utilizando canais não entrelaçados ou com entrelaçamento finito tem despertado um maior interesse na área [6].

Este trabalho foi realizado partindo-se da premissa que a memória dos canais com desvane-

cimento não pode ser ignorada. Ao contrário, tal memória pode tornar-se uma vantagem, pois a qualidade do canal em um determinado intervalo de tempo pode ser prevista, baseada nas condições prévias deste canal, devido à dependência estatística dos erros produzidos [7]. Dessa forma, é possível efetuar transmissões confiáveis, utilizando-se estratégias de correção de erros projetadas de acordo com o comportamento da memória do canal. Além disso, a não utilização da memória do canal significa uma perda de capacidade, pois sabe-se que a memória aumenta a capacidade em grande parte dos canais (nos canais de informação estáveis [7, 8]). Por essa razão, é de fundamental importância o conhecimento do processo de geração de erros em canais com memória. Isso pode ser feito através do modelamento do canal, no qual o objetivo principal é prover um modelo cujas propriedades são complexas o suficiente para simular as características do canal real e, ainda, simples o suficiente para permitir um tratamento matemático factível.

Um canal de estados finitos Markoviano (FSMC, do inglês *finite state Markov channel*) é um canal discreto que possui um conjunto finito de estados, com transição de estados descrita por uma cadeia de Markov, a qual tem probabilidades de transição atribuídas de forma independente do tempo. A cada estado é associada uma determinada probabilidade de geração de erros.

Em 1960, Gilbert [9] propôs um novo FSMC binário (entrada binária, saída binária) para determinar a capacidade de informação de linhas telefônicas ruidosas. Logo após o trabalho de Gilbert, Elliot [10] utilizou esse modelo para calcular e comparar a taxa de erros de códigos corretores de erros em canais ruidosos. Esse canal ficou conhecido como o canal Gilbert-Elliot (GEC, do inglês *Gilbert-Elliot Channel*). Em 1967, Fritchman [11] propôs um canal de estados finitos com A_0 estados livres de erros e A_1 estados com erros. Contudo, o modelo de Fritchman era complexo para obter-se as probabilidades de erro, a não ser que fosse utilizado apenas 1 estado com erro ($A_1 = 1$), o que tornou este modelo bastante similar ao GEC.

Em 1968, Gallager [12] desenvolveu uma fórmula para a capacidade dos FSMC. A definição de Gallager acerca do FSMC é usada pelos pesquisadores até os dias atuais. Ela engloba tanto o caso em que a transição dos estados do canal é controlada pela entrada deste (como no caso de canais com interferência intersimbólica), quanto o caso em que o estado do canal é estatisticamente independente da entrada (como em canais com desvanecimento). Recentemente, outros modelos baseados em memória variável [13] e em filas finitas [14] foram desenvolvidos.

Modelos FSMC têm sido amplamente utilizados para descrever estruturas de correlação e processos de sucesso/falha em canais sem fio com geração de surtos de erros porque são eficientes para análise de desempenho de sistemas codificados em canais com memória [13, 15–18]. Uma vez obtido

um FSMC preciso, este poderá ser utilizado para fazer simulações computacionais de maneira mais rápida do que o sistema de comunicações real, já que o FSMC pode substituir o modulador, canal e demodulador. Modelos FSMC foram empregados, por exemplo, para modelar canais com alta frequência [5], canais de rádio móveis [19–21], canais de satélites de baixa órbita [22] e gravadores de fita magnética [23].

Nas últimas décadas, uma variedade de modelos foram propostos e estudados para modelar canais binários com desvanecimento. Além do grande interesse em canais binários, estudos em teoria da informação revelam que decisão suave pode aumentar significativamente a capacidade de várias classes de canais, incluindo canais com ruído aditivo Gaussiano Branco (AWGN, do inglês *additive white Gaussian noise*) [24, 25] e canais com desvanecimento Rayleigh independentes (totalmente entrelaçados) [26].

Esta dissertação propõe um modelo FSMC não binário com dois estados (como o GEC) para canais com desvanecimento plano correlacionado no tempo com o intuito de capturar simultaneamente a memória do canal e a informação suave. O modelo proposto, a ser detalhado nos próximos capítulos, é denominado Modelo com Apagamento (MA) e foi idealizado para modelar um sistema de comunicações composto por um modulador BPSK, um canal com desvanecimento Rayleigh correlacionado no tempo com decaimento exponencial e ruído aditivo gaussiano branco, um demodulador coerente e um quantizador com três níveis de quantização. Esse sistema foi denominado canal discreto com correlação exponencial (CDCE). A introdução de um terceiro nível de quantização tem o propósito de indicar ao decodificador de canal que uma decisão sobre os bits transmitidos não foi efetivada neste intervalo.

Uma vez definido o modelo MA, seus parâmetros serão estimados de modo a aproximá-lo do CDCE. Para isso, será utilizado um método de minimização da divergência, mensurada pela distância Kullback-Leibler [14]. Para avaliar a exatidão do modelo proposto, serão comparadas as curvas da função autocorrelação obtidas para o MA e as obtidas analiticamente para o CDCE.

Um codificador de bloco binário, linear, de parâmetros (n, k) e distância de Hamming mínima d_{min} será incorporado ao sistema descrito. Uma técnica enumerativa será utilizada para desenvolver uma fórmula para a probabilidade de uma decodificação sem sucesso. Esta fórmula será estendida a fim de englobar também os casos em que um entrelaçamento finito, com nível de entrelaçamento I_d , é incorporado ao sistema de comunicações, sendo possível a avaliação de desempenho do canal discreto com o uso de códigos de bloco para correção de erros e apagamentos e entrelaçamento finito.

1.1 Organização da Dissertação

Este trabalho foi organizado conforme detalhado a seguir.

No Capítulo 2, será apresentada uma breve revisão dos principais conceitos sobre FSMC e cadeias de Markov. Além disso, serão descritos dois importantes canais de estados finitos: o modelo de Gilbert-Elliot e o modelo de Fritchman.

No Capítulo 3, será introduzido o MA, que é um modelo não-binário (entrada binária, saída ternária), bem como serão desenvolvidas as expressões para os principais parâmetros estatísticos do canal (como média, variância e autocorrelação, além do cálculo da probabilidade de ocorrer uma seqüência de erros e apagamentos de comprimento n). Também será feita uma análise sobre a capacidade do canal. Em seguida, será feita a estimação dos parâmetros do canal.

No Capítulo 4, será feita uma análise da utilização de códigos de bloco no canal MA e será desenvolvida uma expressão de recorrência para o cálculo da probabilidade de ocorrer uma decodificação sem sucesso. Em seguida, um entrelaçador finito será incorporado ao sistema de comunicações e uma nova expressão será encontrada para a avaliação de desempenho do canal MA utilizando códigos de bloco entrelaçados.

No Capítulo 5, serão apresentadas as conclusões do trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

CADEIAS DE MARKOV E CANAIS DE ESTADOS FINITOS

NESTE capítulo, são apresentadas algumas propriedades e definições acerca de processos Markovianos discretos e modelos FSMC que serão úteis para o entendimento do modelo proposto. As informações expostas nas seções 2.1 e 2.2 podem ser encontradas em [12, 27, 28]. Na seção 2.3, serão introduzidos conceitos sobre dois modelos FSMC: o canal de Gilbert-Elliott e o canal de Fritchman.

2.1 Processos Markovianos Discretos

Definição 2.1 *Um processo estocástico discreto é definido como sendo uma seqüência $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro inteiro não negativo n . Cada variável aleatória X_n assume valores em um conjunto discreto $\mathcal{N}_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, denominado espaço de estados.*

Definição 2.2 *O processo estocástico $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma cadeia de Markov de primeira ordem se satisfizer a propriedade de Markov, isto é, dado um valor de X_n (valor presente), os valores futuros X_s , com $s > n$, não são influenciados pelos valores passados X_r , com $r < n$. O processo $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ possui a propriedade de Markov se satisfizer a condição:*

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n), \quad (2.1)$$

$$i_n \in \mathcal{N}_N \quad \forall n \geq 0.$$

A evolução da cadeia é descrita pela probabilidade $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, chamada probabilidade de transição, onde X_n é o estado da cadeia no tempo n . Se esta probabilidade condicional não depender do valor de n , então a cadeia tem a propriedade de homogeneidade. As cadeias de Markov consideradas no presente trabalho são homogêneas e de primeira ordem. Além disso, uma cadeia de Markov é irredutível se, partindo-se de um estado, qualquer outro estado puder ser alcançado em um número finito de transições. As probabilidades de transição podem ser representadas na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,N-1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N-1,0} & p_{N-1,1} & \cdots & p_{N-1,N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

onde o $\{i, j\}$ -ésimo elemento da matriz é a probabilidade de transição de um passo $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. A matriz \mathbf{P} , chamada matriz de probabilidade de transição, é uma matriz estocástica, isto é, para cada j no espaço de estados, satisfaz as propriedades:

$$p_{ij} \geq 0$$

e

$$\sum_{j=0}^{N-1} p_{ij} = 1.$$

Um processo estocástico é totalmente especificado se for conhecida sua função de distribuição conjunta. No caso de um processo de parâmetro discreto, deve-se determinar $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n)$, para todo $n \geq 0$ e todo $i_n \in \mathcal{N}_N$. Usando a propriedade da probabilidade condicional, obtém-se:

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) &= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &\quad P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &\quad \dots P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)P(X_0 = i_0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Se $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ for uma cadeia de Markov de primeira ordem, as probabilidades condicionais terão a forma:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n). \quad (2.4)$$

Define-se as probabilidades do estado inicial por $p_j = P(X_0 = j)$, para todo $j \in \mathcal{N}_N$. Denota-se o vetor de probabilidades iniciais $\mathbf{p}^{(0)}$ como um vetor coluna

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Devido à propriedade de Markov, a Equação (2.3) escreve-se:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0} \cdot p_{i_0, i_1} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}. \quad (2.6)$$

Definição 2.3 A matriz de probabilidades de transição em n passos, denotada por $\mathbf{P}^{(n)}$, é uma matriz cujos elementos são as probabilidades de transição em n passos, definidas por $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i)$.

Definição 2.4 Define-se o período $d(i)$ do estado i de uma cadeia de Markov como sendo o máximo divisor comum (mdc) dos possíveis valores de $n \geq 1$ para os quais $p_{ii}^{(n)} > 0$, isto é,

$$d(i) = \text{mdc}\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}. \quad (2.7)$$

Se $d(i) > 1$, o estado é chamado periódico com período $d(i)$. Se $d(i) = 1$, o estado é chamado aperiódico. Equivalentemente, $p_{ii}^{(n)} = 0$ exceto quando n é múltiplo de $d(i)$.

Definição 2.5 Considera-se a igualdade $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$. As quantidades π_j são chamadas distribuições de probabilidades limites. Se este limite existir e não depender do estado inicial, estas quantidades indicam que a probabilidade de uma cadeia de Markov se encontrar no estado j , após um longo período, tende para π_j . Desta forma, a distribuição limite $\boldsymbol{\Pi}^T = [\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{N-1}]$ é a única solução não negativa das equações:

$$\pi_j = \sum_{l=0}^{N-1} \pi_l p_{lj}, \quad (2.8)$$

$$\sum_{l=0}^{N-1} \pi_l = 1, \quad (2.9)$$

ou, na forma matricial:

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P} = \mathbf{\Pi}^T. \quad (2.10)$$

Em uma cadeia de Markov irreduzível e aperiódica, as probabilidades π_j existem e não dependem do estado inicial i . Então, a matriz $\mathbf{P}^{(n)}$ irá convergir para uma matriz $\mathbf{P}^{(\infty)}$ quando $n \rightarrow \infty$, onde cada linha dessa matriz é idêntica ao vetor $\mathbf{\Pi}^T$, com n sendo o número de estados do processo. Qualquer distribuição (vetor) que satisfaça (2.8), (2.9) e (2.10) é chamada de distribuição estacionária da cadeia de Markov, isto é:

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{\Pi}^T, \forall n. \quad (2.11)$$

Definição 2.6 Em um processo markoviano X_n , se a distribuição de estados no tempo $n + 1$ for igual à distribuição no tempo n , então essa distribuição é chamada de distribuição estacionária.

Definição 2.7 A taxa de entropia de um processo estocástico discreto $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ é definida por

$$\mathcal{H}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

quando o limite existe, onde

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) \triangleq - \sum_{x_1, \dots, x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \log [P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)].$$

Definição 2.8 A taxa de entropia condicional de uma variável aleatória é definida por

$$\mathcal{H}'(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1)$$

quando o limite existe, onde

$$H(X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1) \triangleq - \sum_{x_1, \dots, x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \log [P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1)].$$

Para processos estacionários, $H(X_n | X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_1)$ e $\frac{1}{n} H(X_1, X_2, \dots, X_n)$ decrescem com o aumento de n [27].

Teorema 2.1 Para um processo estocástico estacionário, $\mathcal{H}(X) = \mathcal{H}'(X)$ existem e são iguais [27].

2.2 Propriedades de Canais Discretos

Definição 2.9 Um canal de comunicação discreto é um sistema que possui um alfabeto finito de entrada \mathcal{X} , um alfabeto finito de saída \mathcal{Y} e uma probabilidade de transição $[P_{Y^n|X^n}(y^n | x^n)]_{n=1}^{\infty}$, ou seja, a probabilidade de receber uma n -upla $y^n \in \mathcal{Y}^n$ na saída do canal dado que $x^n \in \mathcal{X}^n$ foi enviado.

Definição 2.10 Um canal discreto sem memória (DMC, do inglês discrete memoryless channel) satisfaz a seguinte propriedade:

$$P_{Y^n|X^n}(y^n | x^n) = \prod_{i=1}^n P_{Y_i|X_i}(y_i | x_i). \quad (2.12)$$

O DMC é completamente determinado pela matriz de probabilidades de transição do canal $\mathbf{P} = [P(y | x)]$ para $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$. Essa propriedade não é válida para canais com memória.

Definição 2.11 Um código \mathcal{C} de comprimento de bloco n e número de palavras K para um canal discreto $P_{Y^n|X^n}(y^n | x^n)$ é utilizado por um par codificador e decodificador (f, g) , no qual

$$f : \{1, 2, \dots, K\} \rightarrow \mathcal{X}^n, \quad (2.13)$$

e

$$g : \mathcal{Y}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, K\}. \quad (2.14)$$

O codificador codifica a mensagem $W \in \{1, 2, \dots, K\}$ como uma palavra-código $f(W) = X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Por sua vez, o decodificador, para a palavra recebida $Y^n = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, estima a mensagem recebida $\widehat{W} = g(Y^n)$. A taxa do código é $R(\mathcal{C}) = (1/n) \log_2 K$ bits/uso.

Assumindo-se que a mensagem W é uniforme sobre $\{1, 2, \dots, K\}$, a probabilidade de erro na decodificação é dada por

$$P_e(\mathcal{C}) = P\{\widehat{W} \neq W\} = \frac{1}{K} \sum_{w=1}^K P\{Y^n \notin \beta_w | w \text{ enviado}\}, \quad (2.15)$$

onde

$$\beta_w = \{y^n \in \mathcal{Y}^n : g(y^n) = w\}, \quad (2.16)$$

e

$$P\{Y^n \notin \beta_w \mid w \text{ enviado}\} = \sum_{y^n \notin \beta_w} P_{Y^n|X^n}(y^n \mid f(w)). \quad (2.17)$$

Definição 2.12 A taxa \mathcal{R} poderá ser alcançada se existir uma seqüência de códigos com comprimento de bloco n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_e(\mathcal{C}) = 0. \quad (2.18)$$

A capacidade \mathcal{C} do canal é definida como a maior taxa alcançável pelo canal.

A capacidade de canais estacionários e ergódicos é dada por [12]:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p(x^n)} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n), \quad (2.19)$$

em que $I(X^n; Y^n)$ é a informação mútua entre X^n e Y^n , definida por:

$$I(X^n; Y^n) \triangleq \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} P_{X^n Y^n}(x^n, y^n) \log \frac{P_{X^n Y^n}(x^n, y^n)}{P_{X^n}(x^n) P_{Y^n}(y^n)}. \quad (2.20)$$

Isso é válido para canais de informações estáveis, isto é, aqueles em que a entrada X^n maximiza $I(X^n; Y^n)$ e a sua saída possui um comportamento ergódico. No caso do DMC:

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y). \quad (2.21)$$

2.2.1 Canal de Estados Finitos Markoviano

Seja $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma cadeia de Markov com um espaço de estados com N elementos $\mathcal{N}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Considera-se modelos FSMC em que as seqüências de ruídos são geradas da seguinte forma: no k -ésimo intervalo, a cadeia transiciona do estado $S_{k-1} = s_{k-1}$ para o estado $S_k = s_k$, com probabilidade $p_{s_{k-1}, s_k} = P(S_k = s_k \mid S_{k-1} = s_{k-1})$, e gera um dígito de ruído z_k , independente de s_{k-1} e de dígitos de ruídos passados e futuros, com probabilidade $b_{s_k, z_k} = P(Z_k = z_k \mid S_k = s_k)$. É importante notar que não se pode especificar uma seqüência de estados a partir da seqüência de ruído, isto é, não se pode determinar se a cadeia está em um determinado estado s_k se apenas o dígito z_k é conhecido.

Deseja-se encontrar a probabilidade de ocorrer uma seqüência de ruído $\mathbf{z}_n = (z_1 \dots z_n)$ de comprimento n . Então, pela lei da probabilidade total:

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{Z}_n = \mathbf{z}_n \mid S_0 = s_0) &= \sum_{s_n} P(\mathbf{Z}_n = \mathbf{z}_n, S_n = s_n \mid S_0 = s_0); \\
&= \sum_{s_n} P(\mathbf{Z}_n = \mathbf{z}_n \mid S_n = s_n, S_0 = s_0) P(S_n = s_n \mid S_0 = s_0) \quad (2.22)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{s}_n = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ é uma seqüência de estados de comprimento n . Para simplificar a notação, utiliza-se $P(X_n = x_n) = P(x_n)$ para uma dada variável aleatória X_n . Portanto, é possível escrever:

$$P(\mathbf{z}_n \mid s_0) = \sum_{s_n} P(\mathbf{z}_n \mid \mathbf{s}_n, s_0) P(\mathbf{s}_n \mid s_0). \quad (2.23)$$

Mas o processo \mathbf{z}_n condicionado a \mathbf{s}_n é um processo sem memória, ou seja:

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{z}_n \mid \mathbf{s}_n, s_0) &= P(z_1, z_2, \dots, z_n \mid s_0, s_1, \dots, s_n) \\
&= P(z_1 \mid s_0, \dots, s_n, z_2, \dots, z_n) P(z_2 \mid s_0, \dots, s_n, z_3, \dots, z_n) \dots P(z_n \mid s_0, \dots, s_n) \\
&= P(z_1 \mid s_1) P(z_2 \mid s_2) \dots P(z_n \mid s_n) = \prod_{k=1}^n P(z_k \mid s_k). \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (2.24) em (2.23), tem-se:

$$P(\mathbf{z}_n \mid s_0) = \sum_{\mathbf{s}_n} P(\mathbf{s}_n \mid s_0) \prod_{k=1}^n P(z_k \mid s_k). \quad (2.25)$$

Pela propriedade de Markov, sabe-se que

$$P(s_n, s_{n-1}, \dots, s_1 \mid s_0) = \prod_{k=1}^n P(s_k \mid s_{k-1}), \quad (2.26)$$

o que, substituindo em (2.25), conduz a

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{z}_n \mid s_0) &= \sum_{\mathbf{s}_n} \prod_{k=1}^n P(z_k \mid s_k) P(s_k \mid s_{k-1}) \\
&= \sum_{\mathbf{s}_n} \prod_{k=1}^n b_{s_k, z_k} p_{s_{k-1}, s_k}. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Novamente usando a lei da probabilidade total, a probabilidade de uma seqüência de ruído escreve-se:

$$P(\mathbf{z}_n) = \sum_{s_0=0}^{N-1} P(\mathbf{z}_n \mid s_0) P(s_0). \quad (2.28)$$

Considera-se a distribuição do estado inicial como sendo a distribuição estacionária dada pelo vetor $\mathbf{\Pi}^T = [\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{N-1}]$, na qual o sobrescrito $[\cdot]^T$ indica a transposta da matriz. Substituindo (2.27) em (2.28), obtém-se um resultado final para a probabilidade de uma seqüência de ruído:

$$P(\mathbf{z}_n) = \sum_{s_0=0}^{N-1} \pi_{s_0} \sum_{\mathbf{s}_n} \prod_{k=1}^n b_{s_k, z_k} p_{s_{k-1}, s_k}. \quad (2.29)$$

É possível representar $P(\mathbf{z}_n)$ em uma forma matricial. Para isso, seja $\mathbf{P}(z_k)$, $z_k \in \{0, 1, 2\}$, uma matriz $N \times N$, cujos (i, j) -ésimos elementos são $P(z_k, s_k | s_{k-1}) = b_{s_k, z_k} p_{s_{k-1}, s_k}$, isto é, cada elemento da matriz $\mathbf{P}(z_k)$ é a probabilidade da cadeia transicionar do estado i para o estado j e gerar um dígito de ruído z_k . Usando-se estas matrizes, é possível escrever $P(\mathbf{z}_n)$ da seguinte forma:

$$P(\mathbf{z}_n) = \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=1}^n \mathbf{P}(z_k) \right) \mathbf{1}, \quad (2.30)$$

onde $\mathbf{1}$ é um vetor coluna com todos os elementos iguais a um. Duas classes de FSMC serão descritas a seguir.

2.3 Canais de Estados Finitos Binários

2.3.1 O Canal Gilbert-Elliot

O canal Gilbert-Elliot [9, 10] consiste de uma cadeia de Markov com dois estados, ou seja, $\mathcal{N}_2 = \{0, 1\}$. Quando a cadeia se encontra no estado 0, o dígito z_k é igual a 1 (erro) com probabilidade g , ou 0 (sem erro) com probabilidade $1 - g$. Quando a cadeia se encontra no estado 1, o dígito z_k é igual a 1 com probabilidade b , ou 0 com probabilidade $1 - b$. Então, tem-se $b_{0,1} = g$ e $b_{1,1} = b$. Por definição, $g < b$ e, por isso, os estados 0 e 1 são chamados de estados "bom" e "ruim", respectivamente. A Figura 2.1 mostra o diagrama de estados deste canal, no qual o processo de geração de erro associado a cada estado é representado por um canal binário simétrico (BSC, do inglês *binary symmetric channel*).

O modelo GEC é especificado pelas matrizes \mathbf{P} , $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$ e $\mathbf{\Pi}$, dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (1 - Q) & Q \\ q & (1 - q) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_{0,0} b_{0,0} & p_{0,1} b_{1,0} \\ p_{1,0} b_{0,0} & p_{1,1} b_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - Q)(1 - g) & Q(1 - b) \\ q(1 - g) & (1 - q)(1 - b) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

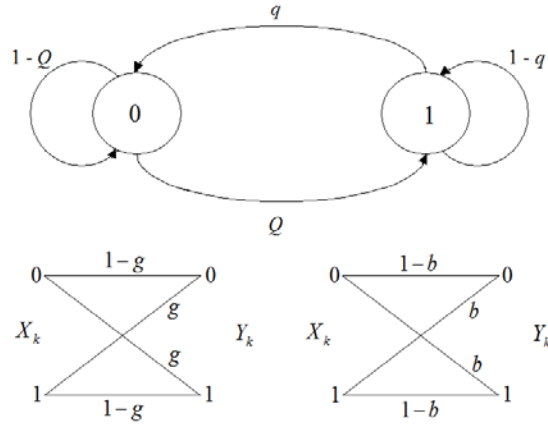


Figura 2.1: Modelo Gilbert-Elliott para canais com memória.

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,1} & p_{0,1}b_{1,1} \\ p_{1,0}b_{0,1} & p_{1,1}b_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q)g & Qb \\ qg & (1-q)b \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \frac{q}{Q+q} & \frac{Q}{Q+q} \end{bmatrix}^T \quad (2.34)$$

É possível calcular a probabilidade de qualquer seqüência de erros utilizando (2.30). Como exemplo, supondo que se deseja calcular a probabilidade de um dígito ser igual a 1 em um dado intervalo, isto é, $P(1) \triangleq P(Z_k = 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} P(1) &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{1} = [\pi_0 \pi_1] \begin{bmatrix} (1-Q)g & Qb \\ qg & (1-q)b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ &= \frac{Q}{Q+q}g + \frac{Q}{Q+q}b. \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.2 Modelo de Fritchman

Em 1967, Fritchman [11] propôs uma classe de modelos particionando um alfabeto $\mathcal{N}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, de uma cadeia de Markov ergódica e estacionária com N estados, em dois subconjuntos: o primeiro, $A_0 = \{0, 1, \dots, k-1\}$, contém os estados bons (estados livres de erro), e o segundo, $A_1 = \{k, k+1, \dots, N-1\}$, contém os estados ruins (estados com erro). O canal é ilustrado na Figura 2.2.

O símbolo de erro no k -ésimo intervalo de tempo, E_k , é uma função determinística do estado

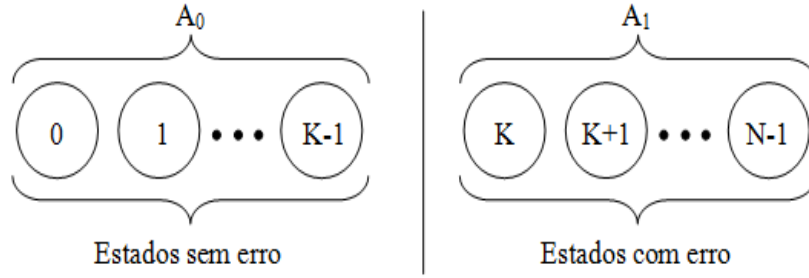


Figura 2.2: Modelo de Fritchman para canais com memória.

atual s_k e assume os valores 0 ou 1, dependendo se o estado s_k pertence ao subconjunto A_0 ou A_1 , isto é:

$$E_k = \begin{cases} 0 & \text{se } s_k \in A_0 \\ 1 & \text{se } s_k \in A_1. \end{cases} \quad (2.36)$$

Esta relação é expressa como $P(E_k = e_k \mid s_k \in A_{e_k}) = 1, \forall e_k \in \mathcal{N}_2, s_k \in \mathcal{N}_N$. Portanto, diferentemente de um modelo probabilístico, é possível sempre identificar o subconjunto de estados A_0 ou A_1 , mas não o estado específico s_k , a partir da observação do dígito de erro z_k em qualquer intervalo de tempo. Deste modo, é possível representar a matriz de probabilidades de transição \mathbf{P} , de dimensões $N \times N$, e o vetor de probabilidades estacionárias $\mathbf{\Pi}$ como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix}; \quad (2.37)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_0 & \mathbf{\Pi}_1 \end{bmatrix}^T. \quad (2.38)$$

As matrizes $\mathbf{P}_{k,l}, k, l \in \{0, 1\}$, representam as probabilidades de transição do conjunto A_k para o conjunto A_l , onde $k \times N$ é a dimensão da matriz \mathbf{P}_{00} , $N - k \times N$ é a dimensão da matriz \mathbf{P}_{10} , $k \times N - k$ é a dimensão da matriz \mathbf{P}_{01} e $N - k \times N - k$ é a dimensão da matriz \mathbf{P}_{11} . As matrizes $\mathbf{P}(0)$ e $\mathbf{P}(1)$ são representadas por:

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & 0 \\ \mathbf{P}_{10} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{P}_{01} \\ 0 & \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

MODELO COM APAGAMENTO PARA CANAIS DE ESTADOS FINITOS

INICIA-SE agora a proposição de um novo modelo de canal de estados finitos para canais com desvanecimento correlacionado no tempo e decisão suave. Em seguida, será mostrado o sistema de comunicações que se deseja modelar. Por fim, será feito um estudo sobre a exatidão do modelo proposto, considerando-se a maximização da capacidade do canal e a comparação das funções autocorrelação do sistema de comunicações e do modelo.

3.1 Modelo com Apagamento

O modelo de canal com apagamento, denominado de MA, foi idealizado como um canal de estados finitos não-binário, com três níveis de quantização, a fim de que haja uma menor perda de informação, quando comparado a FSMC binários, os quais possuem apenas dois níveis de quantização [4].

As seqüências de variáveis aleatórias na entrada e saída do canal são denotadas, respectivamente, por $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $X_k \in \{0, 1\}$ e $Y_k \in \{0, 1, 2\}$. As distorções e interferências causadas pelo canal são representadas pela seqüência de ruído ternária $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $Z_k \in \{0, 1, 2\}$. É dito que ocorreu um erro na recepção, no k -ésimo intervalo, se $Z_k = 2$, um apagamento se $Z_k = 1$, ou a recepção foi correta se $Z_k = 0$.

O canal MA consiste de uma cadeia de Markov com dois estados. Quando a cadeia se encontra

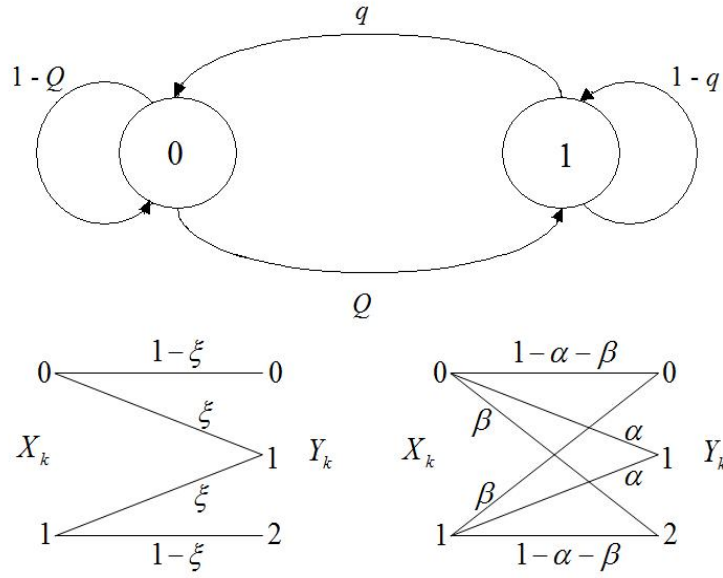


Figura 3.1: Modelo com apagamento para canais com memória.

no estado 0, ou estado bom, a probabilidade de erro é nula, a probabilidade de apagamento é ξ e a probabilidade de um bit ser transmitido corretamente é igual a $1 - \xi$. O processo de geração do apagamento associado ao estado 0 é representado por um canal binário com apagamento, BEC (do inglês *Binary Erasure Channel*), no qual uma fração ξ dos bits é apagada [27]. Esse estado representa a transmissão com boa qualidade, em que a probabilidade de erro é desprezível quando comparada com a probabilidade de acerto e de apagamento. Quando a cadeia se encontra no estado 1 (denominado de estado ruim), ocorrerá um erro com probabilidade β , um apagamento com probabilidade α e a probabilidade de acerto é igual a $1 - \alpha - \beta$. A geração do dígito z_k no estado 1 é representada por um canal discreto sem memória, DMC (do inglês *Discrete Memoryless Channel*), no qual uma fração α dos bits enviados é apagada e outra fração β destes é corrompida, gerando erros na saída do canal. A probabilidade de transição do estado 0 para o estado 1 é dada por Q , e a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 0 é dada por q . A Figura 3.1 mostra o diagrama de estados deste canal.

O canal MA é especificado pelas matrizes $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$ e $\mathbf{P}(2)$, dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,0} & p_{0,1}b_{1,0} \\ p_{1,0}b_{0,0} & p_{1,1}b_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q)(1-\xi) & Q(1-\alpha-\beta) \\ q(1-\xi) & (1-q)(1-\alpha-\beta) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,1} & p_{0,1}b_{1,1} \\ p_{1,0}b_{0,1} & p_{1,1}b_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-Q)\xi & Q\alpha \\ q\xi & (1-q)\alpha \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{P}(2) = \begin{bmatrix} p_{0,0}b_{0,2} & p_{0,1}b_{1,2} \\ p_{1,0}b_{0,2} & p_{1,1}b_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q\beta \\ 0 & (1-q)\beta \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

A matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov é dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(2) = \begin{bmatrix} (1-Q) & Q \\ q & (1-q) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

O vetor de probabilidade estacionária dos estados é:

$$\boldsymbol{\Pi} = [\pi_0 \pi_1]^T = \left[\frac{q}{Q+q} \quad \frac{Q}{Q+q} \right]^T. \quad (3.5)$$

É possível calcular a probabilidade de qualquer seqüência de erros, apagamentos e recepções corretas utilizando (2.30). Por exemplo, no canal MA, a probabilidade de ocorrer um erro, ou seja, $P(2)_{\text{MA}} \triangleq P(Z_k = 2)$, é calculada como segue:

$$\begin{aligned} P(2)_{\text{MA}} &= \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{P}(2) \mathbf{1} = [\pi_0 \pi_1] \begin{bmatrix} 0 & Q\beta \\ 0 & (1-q)\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{Q}{Q+q} \beta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A probabilidade de ocorrer um apagamento, ou seja, $P(1)_{\text{MA}} \triangleq P(Z_k = 1)$, é dada por:

$$\begin{aligned} P(1)_{\text{MA}} &= \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{1} = [\pi_0 \pi_1] \begin{bmatrix} (1-Q)\xi & Q\alpha \\ q\xi & (1-q)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{q}{Q+q} \xi + \frac{Q}{Q+q} \alpha, \end{aligned} \quad (3.7)$$

e a probabilidade de ocorrer uma recepção correta, ou seja, $P(0)_{\text{MA}} \triangleq P(Z_k = 0)$, é dada por:

$$\begin{aligned} P(0)_{\text{MA}} &= \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{P}(0) \mathbf{1} = [\pi_0 \pi_1] \begin{bmatrix} (1-Q)(1-\xi) & Q(1-\alpha-\beta) \\ q(1-\xi) & (1-q)(1-\alpha-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{q}{Q+q} (1-\xi) + \frac{Q}{Q+q} (1-\alpha-\beta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

A média, ou valor esperado, do processo $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$, denotada por μ , é:

$$\begin{aligned}\mu = \mathbf{E}[Z_k] &= 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) \\ &= \frac{Q(\alpha + 2\beta) + q\xi}{Q + q},\end{aligned}\quad (3.9)$$

e a variância é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbf{E}[Z_k^2] - \mu^2 &= 0^2P(0) + 1^2P(1) + 2^2P(2) - \mu^2 \\ &= \frac{Q(\alpha + 4\beta) + q\xi}{Q + q} - \left(\frac{Q}{Q + q}(\alpha + 2\beta) + \frac{q}{Q + q}(\xi) \right)^2.\end{aligned}\quad (3.10)$$

O coeficiente de correlação, denotado por Cor_{MA} , é dado por:

$$\begin{aligned}\text{Cor}_{\text{MA}} &= \frac{\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{P}(1)^2 + 2\mathbf{P}(1)\mathbf{P}(2) + 2\mathbf{P}(2)\mathbf{P}(1) + 4\mathbf{P}(2)\mathbf{P}(2)) \mathbf{1} - \mu^2}{\sigma^2} \\ &= (q + Q) \frac{[qQ(-2\xi\alpha - 4\xi\beta + 4\alpha\beta + \xi^2 + \alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha^2) - 4Q\beta^2 - q\xi^2 - Q\alpha^2]}{q^2(-\xi + \xi^2) + qQ(-\xi - \alpha - 4\beta + 2\xi\alpha + 4\xi\beta) + Q^2(-\alpha - 4\beta + \alpha^2 + 4\beta^2)}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

3.1.1 Função Autocorrelação

Seja o processo discreto estacionário $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$, com $Z_k \in \{0, 1, 2\}$. A função autocorrelação deste processo é dada por [29]:

$$\begin{aligned}R(k) &= \mathbf{E}\{Z_i Z_{i+k}\} \\ &= \begin{cases} \sum_m \sum_n mnP(Z_i = m, Z_{i+k} = n), & \text{se } k \neq 0 \\ \sigma^2 + \mu^2, & \text{se } k = 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (3.12)$$

em que $m, n \in \{0, 1, 2\}$, $\sigma^2 = \mathbf{E}\{Z_k^2\} - \mu^2$ é a variância do processo $\{Z_k\}_{k=0}^{\infty}$ e μ é a sua média. De acordo com [29], uma expressão matricial para a probabilidade $P(Z_i = m, Z_{i+k} = n)$, $m, n \in \{0, 1, 2\}$ de um FSMC, em função das matrizes $\mathbf{P}(i)$, $i \in \{0, 1, 2\}$, é dada por:

$$P(Z_i = m, Z_{i+k} = n) = \mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(m) \mathbf{P}^{|k|-1} \mathbf{P}(n) \mathbf{1}, \text{ para } k \neq 0. \quad (3.13)$$

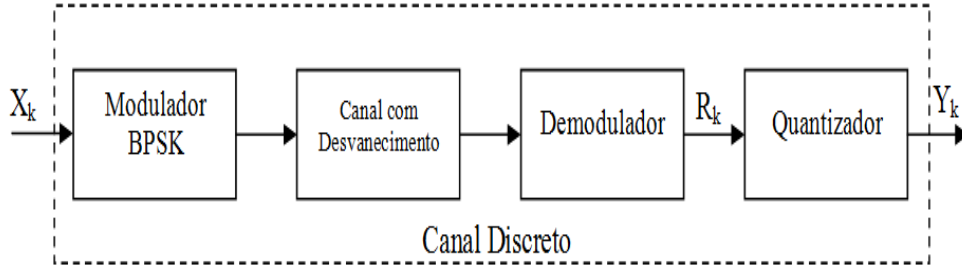


Figura 3.2: Sistema de comunicações com modulador BPSK, canal com desvanecimento Rayleigh, demodulador e quantizador.

Para o modelo MA, substitui-se as matrizes $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$ e $\mathbf{P}(2)$, dadas em (3.1) a (3.3), em (3.13) e, após algumas simplificações, chega-se à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 R(k) &= \left(\frac{Q}{Q+q}(\alpha + 2\beta) + \frac{q}{Q+q}(\xi) \right)^2 + \frac{qQ(\alpha + 2\beta - \xi)^2(1 - q - Q)^k}{(Q+q)^2} \\
 &= \mu^2 + \frac{qQ(\alpha + 2\beta - \xi)^2(1 - q - Q)^k}{(Q+q)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Deve ser observado que, se o processo $\{Z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ é independente, $R(k) = \mu^2$, então o segundo termo do lado direito de (3.14) corresponde à memória do canal.

3.2 Modelo do Sistema

Considera-se um sistema de comunicações composto por um modulador BPSK, um canal com desvanecimento Rayleigh correlacionado no tempo e ruído aditivo gaussiano branco, um demodulador coerente e um quantizador com três níveis de quantização, como ilustrado na Figura 3.2. As sequências de variáveis aleatórias na entrada e saída do sistema são denotadas, respectivamente, por $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $X_k \in \{0, 1\}$ e $Y_k \in \{0, 1, 2\}$.

A envoltória complexa do desvanecimento $\tilde{G}(t) = \tilde{G}_I(t) + j\tilde{G}_Q(t)$ é um processo Gaussiano complexo, estacionário no sentido amplo, com média zero, $\mathbf{E}[\tilde{G}(t)] = 0$ e segundo momento normalizado, $\mathbf{E}[|\tilde{G}(t)|^2] = 1$. Os componentes em quadratura $\tilde{G}_I(t)$ e $\tilde{G}_Q(t)$ são processos Gaussianos mutuamente independentes que possuem a mesma função covariância. Apesar da análise feita no presente trabalho poder ser aplicada a processos de desvanecimento com diferentes funções covariância $C(\tau)$, adotou-se aqui o modelo de correlação exponencial [30, 31] para $C(\tau)$:

$$C(\tau) = \mathbf{E}\{\tilde{G}^*(t)[\tilde{G}(t + \tau)]\} = e^{-2\pi B_d \tau}, \tag{3.15}$$

em que B_d é a banda Doppler. Para um instante de tempo fixo, $t = kT$, a envoltória do desvanecimento $A_k \triangleq \sqrt{\tilde{G}_I^2(kT) + j\tilde{G}_Q^2(kT)}$ (onde $1/T$ é a taxa de sinalização) tem função densidade de probabilidade Rayleigh dada por [18]:

$$f_A(a) = \begin{cases} 2ae^{-a^2}, & \text{se } a > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O canal discreto mostrado na Figura 3.2 será denominado canal discreto com correlação exponencial (CDCE). O sinal R_k na entrada do quantizador no k -ésimo intervalo é dado por:

$$R_k = A_k S_k + N_k, \quad (3.16)$$

em que $S_k = (2X_k - 1)E_s$, E_s é a energia do sinal transmitido, A_k é uma variável aleatória Rayleigh que modela o desvanecimento multiplicativo e N_k é uma variável aleatória Gaussiana com variância $N_0/2$. No sistema considerado, um quantizador escalar uniforme é utilizado para mapear R_k em Y_k da seguinte forma:

$$Y_k = j \quad \text{se } R_k \in R_{D_j}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.17)$$

em que as regiões de decisão R_{D_j} são definidas por:

$$R_{D_0} = \{r \in R : r < -\Delta\} \quad (3.18)$$

$$R_{D_1} = \{r \in R : -\Delta < r < \Delta\} \quad (3.19)$$

$$R_{D_2} = \{r \in R : r > \Delta\}, \quad (3.20)$$

onde Δ é o passo do quantizador. A Figura 3.3 ilustra o referido mapeamento. Define-se o passo do quantizador normalizado por $\delta = \Delta/\sqrt{E_s}$. Seja $q_{i,j}(a_k) = P(Y_k = j \mid X_k = i, A_k = a_k)$ uma probabilidade condicional. Considerando-se $i = 0$, tem-se para as regiões de decisão da figura 3.3 que, para $j = 0$:

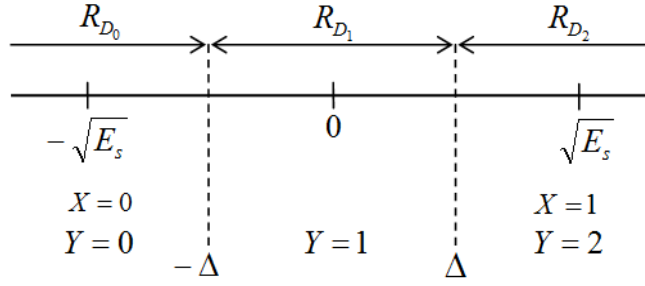


Figura 3.3: Regiões de decisão para um canal discreto com 3 níveis de quantização.

$$\begin{aligned}
q_{0,0}(a_k) &= P(R_k < -\Delta \mid X_k = 0, A_k = a_k) \\
&= P(-a_k\sqrt{E_s} + N_k < -\delta\sqrt{E_s}) \\
&= P(N_k < -\delta\sqrt{E_s} + a_k\sqrt{E_s}) \\
&= 1 - Q\left(\frac{\sqrt{E_s}(-\delta + a_k)}{\sigma}\right) \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}(\delta - a_k)\right), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

onde $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Para $j = 1$:

$$\begin{aligned}
q_{0,1}(a_k) &= P(-\delta\sqrt{E_s} < -a_k\sqrt{E_s} + N_k < \delta\sqrt{E_s}) \\
&= P((a_k - \delta)\sqrt{E_s} < N_k < (a_k + \delta)\sqrt{E_s}) \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}(a_k - \delta)\right) - Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}(a_k + \delta)\right). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Para $j = 2$:

$$\begin{aligned}
q_{0,2}(a_k) &= P(-a\sqrt{E_s} + N_k > \delta\sqrt{E_s}) \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}(\delta + a_k)\right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Pela simetria da constelação e das regiões de decisão, obtém-se $q_{0,j}(a_k) = q_{1,2-j}(a_k)$. Portanto, $q_{0,j} \triangleq P(Y_k = j \mid X_k = i) = q_{1,2-j}$. Então

$$q_{1,2-j} = q_{0,j} = \mathbf{E}_{A_k} [q_{0,j}(a_k)] = \int_0^\infty q_{0,j}(a) 2ae^{-a^2} da. \quad (3.24)$$

Define-se o processo de ruído ternário $\{Z_k\}_{k=1}^\infty$ em que $Y_k = 2X_k + (-1)^{X_k} Z_k$, ou seja,

$$Y_k = \begin{cases} Z_k, & \text{se } X_k = 0 \\ 2 - Z_k, & \text{se } X_k = 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Assim, se $Z_k = 0$, o canal tem boa qualidade e o sinal transmitido será recebido sem distorções. Se $Z_k = 1$, o canal apresenta distorções, gerando um apagamento na recepção. Se $Z_k = 2$, o canal é bastante ruidoso e acarretará um erro na recepção. A probabilidade de uma decisão correta para o canal discreto, $P_{\text{CDCE}}(0) \triangleq P(Z_k = 0)$, é dada por:

$$\begin{aligned} P_{\text{CDCE}}(0) \triangleq P(Z_k = 0) &= P(Z_k = 0 | X_k = 0)P(X_k = 0) + P(Z_k = 0 | X_k = 1)P(X_k = 1) \\ &= P(Y_k = 0 | X_k = 0)P(X_k = 0) + P(Y_k = 2 | X_k = 1)P(X_k = 1) \\ &= q_{0,0} = q_{1,2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Analogamente, as probabilidades de apagamento e de uma decisão errônea são dadas, respectivamente, por:

$$P_{\text{CDCE}}(1) \triangleq P(Z_k = 1) = q_{0,1} = q_{1,1}, \quad (3.27)$$

$$P_{\text{CDCE}}(2) \triangleq P(Z_k = 2) = q_{0,2} = q_{1,0}. \quad (3.28)$$

Combinando os resultados de (3.26), (3.27), (3.28) com (3.24), obtém-se:

$$P(Z_k = j) = q_{0,j} = q_{1,2-j}. \quad (3.29)$$

Em geral, o canal discreto pode ser especificado pela probabilidade condicional:

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P\left(Z_1 = \frac{y_1 + 2x_1}{(-1)^{x_1}}, \dots, Z_n = \frac{y_n - 2x_n}{(-1)^{x_n}}\right),$$

onde

$$P(Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) = \mathbf{E}_{A_1 A_2 \dots A_n} \left[\prod_{k=1}^n q_{0,z_k}(a_k) \right]. \quad (3.30)$$

Seja $m(\delta)$ uma função de distribuição acumulada, definida por:

$$\begin{aligned}
m(\delta) &\triangleq F_{R_x|X_k=1}(\delta\sqrt{E_s}) = \mathbf{E}_{A_k}[P(R_k < \delta\sqrt{E_s} \mid X_k = 1, A_k = a_k)] \\
&= \mathbf{E}_{A_k}[P(a_k\sqrt{E_s} + N_k < \delta\sqrt{E_s})] \\
&= \mathbf{E}_{A_k}\left[P\left(\frac{N_k}{\sqrt{E_s}} < \delta - A_k\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Uma expressão fechada para $m(\delta)$ para um canal com desvanecimento Rayleigh é dada por [26]:

$$m(\delta) = 1 - Q(\delta\sqrt{2\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varphi} + 1}} \left[1 - Q\left(\frac{\delta\sqrt{2\varphi}}{\sqrt{\frac{1}{\varphi} + 1}}\right) \right] e^{\frac{-\delta^2}{(\frac{1}{\varphi} + 1)}}, \tag{3.32}$$

onde $\varphi = \frac{E_s}{N_0}$. Assim

$$\begin{aligned}
P_{\text{CDCE}}(2) &\triangleq P(Z_k = 2) = \mathbf{E}_{A_k}[q_{1,0}(a_k)] = \mathbf{E}_{A_k}[P(R_k < -\Delta \mid X_k = 1)] \\
&= F_{R_k|X_k=1}(-\Delta) = m(-\delta),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{CDCE}}(1) &\triangleq P(Z_k = 1) = \mathbf{E}_{A_k}[q_{1,1}(a_k)] = \mathbf{E}_{A_k}[P(-\Delta < R_k < \Delta \mid X_k = 1)] \\
&= F_{R_k|X_k=1}(\Delta) - F_{R_k|X_k=1}(-\Delta) = m(\delta) - m(-\delta),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{CDCE}}(0) &\triangleq P(Z_k = 0) = \mathbf{E}_{A_k}[q_{1,2}(a_k)] = \mathbf{E}_{A_k}[P(R_k > \Delta \mid X_k = 1)] \\
&= 1 - F_{R_k|X_k=1}(\Delta) = 1 - m(\delta).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Para calcular a probabilidade de uma seqüência de ruídos de comprimento 2 para o CDCE, de acordo com (3.30), necessita-se da matriz covariância do modelo de correlação exponencial. O (i, j) -ésimo elemento dessa matriz é dado por $\psi_{jk} = \rho^{|j-k|}$ [30], em que $\rho = C(T)$, ou seja, de acordo com (3.15), tem-se que $\rho = e^{-2\pi B_d T}$. Assim, para calcular a função densidade de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias A_1 e A_2 , $p_{A_1 A_2}(a_1, a_2)$, define-se a matriz covariância de A_1 e A_2 como:

$$\mathbf{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.36}$$

e sua inversa

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{-\rho}{1-\rho^2} \\ \frac{-\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Uma expressão para $p_{A_1 A_2}(a_1, a_2)$, para um canal com desvanecimento Rayleigh, é dada por [32]:

$$p_{A_1 A_2}(a_1, a_2) = 4a_1 a_2 |\det(\Phi)| e^{-(a_1^2 \phi_{11} + a_2^2 \phi_{22})} I_0(2a_1 a_2 |\phi_{12}|), \quad (3.38)$$

onde $I_0(x)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero. Substituindo-se os elementos da matriz Φ_1 em (3.38), esta pode ser reescrita da seguinte forma:

$$p_{A_1 A_2}(a_1, a_2) = \frac{4a_1 a_2}{1-\rho^2} e^{-(a_1^2 + a_2^2)/(1-\rho^2)} I_0\left(\frac{2\rho a_1 a_2}{1-\rho^2}\right). \quad (3.39)$$

Logo

$$P_{\text{CDCE}}(z_1 z_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty q_{0,z_1}(a_1) q_{0,z_2}(a_2) p_{A_1 A_2}(a_1, a_2) da_1 da_2, \quad (3.40)$$

onde as expressões para q_{0,z_1} e q_{0,z_2} são definidas em (3.21) a (3.23). A função densidade de probabilidade conjunta de três variáveis aleatórias A_1 , A_2 e A_3 para um canal com desvanecimento Rayleigh é dada por [32]:

$$\begin{aligned} p_{A_1 A_2 A_3}(a_1, a_2, a_3) &= 8a_1 a_2 a_3 |\det(\Phi_2)| e^{-(a_1^2 \phi_{11} + a_2^2 \phi_{22} + a_3^2 \phi_{33})} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (-1)^k I_k(2a_1 a_2 |\phi_{12}|) I_k(2a_2 a_3 |\phi_{23}|) I_k(2a_3 a_1 |\phi_{31}|) \\ &\times \cos k(\psi_{12} + \psi_{23} + \psi_{31}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$, $k = 1, 2, \dots$ e a matriz Φ_2 do CDCE é dada por:

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho^2-1} & \frac{\rho}{\rho^2-1} & 0 \\ \frac{\rho}{\rho^2-1} & -\frac{\rho^2+1}{\rho^2-1} & \frac{\rho}{\rho^2-1} \\ 0 & \frac{\rho}{\rho^2-1} & -\frac{1}{\rho^2-1} \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

A Equação (3.41), para o CDCE, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
p_{A_1 A_2 A_3}(a_1, a_2, a_3) &= \frac{8a_1 a_2 a_3}{(\rho^2 - 1)^2} e^{-\frac{(a_1^2 + a_3^2)}{1 - \rho^2} - \frac{a_2^2(\rho^2 + 1)}{1 - \rho^2}} \\
&\times I_0\left(\left|\frac{2a_1 a_2 \rho}{(1 - \rho^2)}\right|\right) I_0\left(\left|\frac{2a_2 a_3 \rho}{(1 - \rho^2)}\right|\right). \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
P_{\text{CDCE}}(z_1 z_2 z_3) &= \\
&\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty q_{0, z_1}(a_1) q_{0, z_2}(a_2) q_{0, z_3}(a_3) p_{A_1 A_2 A_3}(a_1, a_2, a_3) da_1 da_2 da_3. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

As probabilidades de seqüências de ruído de comprimento 3 do CDCE, dadas por (3.44), serão usadas nas próximas seções para calcular os parâmetros do MA, de modo que este seja uma boa aproximação do CDCE.

3.2.1 Capacidade do canal

Seja o canal de comunicação ergódico e estacionário, com alfabeto de entrada $\{0, 1\}$, alfabeto de saída $\{0, 1, 2\}$ e com processo de saída descrito por:

$$Y^n = 2X^n + (-1)^{X^n} Z^n, \quad (3.45)$$

em que $X^n = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \in \{0, 1\}^n$ e $Y^n = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}, Z^n = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\} \in \{0, 1, 2\}^n$, sendo n o número de utilizações do canal. O processo de saída Y^n é independente do processo de entrada X^n e as operações matemáticas em (3.45) são realizadas termo a termo.

A capacidade desse canal é dada por [12]

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p(x^n)} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n), \quad (3.46)$$

onde

$$\begin{aligned}
I(X^n; Y^n) &= H(Y^n) - H(Y^n | X^n) \\
&= H(Y^n) - H(Z^n), \quad (3.47)
\end{aligned}$$

é a informação mútua entre X^n e Y^n .

Define-se $C^{(n)}$ como

$$\begin{aligned}
C^{(n)} &= \max_{p(x^n)} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n) = \frac{1}{n} \left(\max_{p(x^n)} \{H(Y^n)\} - H(Z^n) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\tilde{H}(Y^n) - H(Z^n) \right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

onde $\tilde{H}(Y^n)$ é a máxima entropia de Y^n e $H(Z^n)$ é a entropia de Z^n . Para calcular $C^{(n)}$ é preciso achar a distribuição de entrada que maximiza $H(Y^n)$. O cálculo de $C^{(n)}$ para $n = 1, 2$ será demonstrado a seguir. Seja $\mathbf{T}^{(n)} = [t_{i,j}^{(n)}]$ a matriz de transição do canal, onde

$$t_{i,j}^{(n)} = P(Y^n = j \mid X^n = i), \quad j \in Y^n, \quad i \in X^n. \tag{3.49}$$

Considerando-se $G_i = P(Z = i), i \in \mathcal{Y}$, a matriz $\mathbf{T}^{(1)}$ é

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & G_2 \\ G_2 & G_1 & G_0 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{T}^{(1)}$ pode ser dividida em uma submatriz 2×2 simétrica, denominada \mathbf{Q}_1 , e uma submatriz 2×1 , denominada \mathbf{Q}_2 .

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} G_0 & G_2 \\ G_2 & G_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_1 \end{bmatrix}.$$

Pode ser observado que as submatrizes acima representam canais fracamente simétricos [27], em que as linhas são permutáveis entre si e a soma dos elementos de cada coluna é igual. Para estes canais, a capacidade é obtida para uma distribuição de entrada uniforme [27]. Assim, tem-se que a probabilidade de distribuição de $P(Y^1 = j)$ quando $P(X^1 = i) = \frac{1}{2}, i \in \{0, 1\}$ é

$$P(Y^1 = 0) = \frac{1}{2}[G_0 + G_2]; \tag{3.50}$$

$$P(Y^1 = 1) = \frac{1}{2}[G_1 + G_1]; \tag{3.51}$$

$$P(Y^1 = 2) = \frac{1}{2}[G_2 + G_0]. \tag{3.52}$$

Então

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(Y^1) &= - \left[(G_0 + G_2) \log \left(\frac{G_0 + G_2}{2} \right) + (G_1) \log \left(\frac{G_1}{2} \right) \right] \\
&= 1 - (G_0 + G_2) \log(G_0 + G_2) - G_1 \log(G_1).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
C^{(1)} &= \tilde{H}(Y^1) - H(Z^1) \\
&= 1 - (G_0 + G_2) \log(G_0 + G_2) + G_0 \log(G_0) + G_2 \log(G_2),
\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde G_i é dado em (3.33) a (3.35). A matriz $\mathbf{T}^{(2)}$ é

$$\mathbf{T}^{(2)} = \begin{bmatrix} G_{00} & G_{02} & G_{20} & G_{22} & G_{11} & G_{01} & G_{21} & G_{10} & G_{12} \\ G_{02} & G_{00} & G_{22} & G_{20} & G_{11} & G_{01} & G_{21} & G_{12} & G_{10} \\ G_{20} & G_{22} & G_{00} & G_{02} & G_{11} & G_{21} & G_{01} & G_{10} & G_{12} \\ G_{22} & G_{20} & G_{02} & G_{00} & G_{11} & G_{21} & G_{01} & G_{12} & G_{10} \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{T}^{(2)}$ pode ser dividida em quatro submatrizes:

$$\mathbf{Q}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} G_{00} & G_{02} & G_{20} & G_{22} \\ G_{02} & G_{00} & G_{22} & G_{20} \\ G_{20} & G_{22} & G_{00} & G_{02} \\ G_{22} & G_{20} & G_{02} & G_{00} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{11} \\ G_{11} \\ G_{11} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} G_{01} & G_{21} \\ G_{01} & G_{21} \\ G_{21} & G_{01} \\ G_{21} & G_{01} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_4^{(2)} = \begin{bmatrix} G_{10} & G_{12} \\ G_{12} & G_{10} \\ G_{10} & G_{12} \\ G_{12} & G_{10} \end{bmatrix}.$$

A capacidade é obtida para de uma distribuição de entrada uniforme, dado que as submatrizes acima representam canais fracamente simétricos. Considerando-se $G_{ij} = P(Z^2 = (i, j))$, tem-se que a probabilidade de distribuição de saída, quando a distribuição de entrada é uniforme, é:

$$P(Y^2 = (0, 0)) = \frac{1}{4} [G_{00} + G_{02} + G_{20} + G_{22}] \tag{3.55}$$

$$P(Y^2 = (0, 1)) = \frac{1}{4}[G_{01} + G_{01} + G_{21} + G_{21}] \quad (3.56)$$

$$P(Y^2 = (0, 2)) = \frac{1}{4}[G_{02} + G_{00} + G_{22} + G_{20}] \quad (3.57)$$

$$P(Y^2 = (1, 0)) = \frac{1}{4}[G_{10} + G_{12} + G_{10} + G_{12}] \quad (3.58)$$

$$P(Y^2 = (1, 1)) = \frac{1}{4}[G_{11} + G_{11} + G_{11} + G_{11}] \quad (3.59)$$

$$P(Y^2 = (1, 2)) = \frac{1}{4}[G_{12} + G_{10} + G_{12} + G_{10}] \quad (3.60)$$

$$P(Y^2 = (2, 0)) = \frac{1}{4}[G_{20} + G_{22} + G_{00} + G_{02}] \quad (3.61)$$

$$P(Y^2 = (2, 1)) = \frac{1}{4}[G_{21} + G_{21} + G_{01} + G_{01}] \quad (3.62)$$

$$P(Y^2 = (2, 2)) = \frac{1}{4}[G_{22} + G_{20} + G_{02} + G_{00}]. \quad (3.63)$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{H}(Y^2) = & - \left[(G_{00} + G_{02} + G_{20} + G_{22}) \log \left(\frac{G_{00} + G_{02} + G_{20} + G_{22}}{4} \right) \right. \\ & + G_{11} \log(G_{11}) + (G_{01} + G_{21}) \log \left(\frac{G_{01} + G_{21}}{2} \right) \\ & \left. + (G_{10} + G_{12}) \log \left(\frac{G_{10} + G_{12}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
C^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{H}(Y^2) - H(Z^2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[-(G_{00} + G_{02} + G_{20} + G_{22}) \log \left(\frac{G_{00} + G_{02} + G_{20} + G_{22}}{4} \right) \right. \\
&\quad - G_{11} \log(G_{11}) - (G_{01} + G_{21}) \log \left(\frac{G_{01} + G_{21}}{2} \right) \\
&\quad - (G_{10} + G_{12}) \log \left(\frac{G_{10} + G_{12}}{2} \right) + G_{00} \log(G_{00}) + G_{01} \log(G_{01}) \\
&\quad + G_{02} \log(G_{02}) + G_{10} \log(G_{10}) + G_{11} \log(G_{11}) + G_{12} \log(G_{12}) \\
&\quad \left. + G_{20} \log(G_{20}) + G_{21} \log(G_{21}) + G_{22} \log(G_{22}) \right]. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

É possível expressar (3.65) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
C^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[-4H \left(\frac{G_{00} + G_{02} + G_{20} + G_{22}}{4} \right) - H(G_{11}) - 2H \left(\frac{G_{01} + G_{21}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2H \left(\frac{G_{10} + G_{12}}{2} \right) + \sum_{i,j \in \mathcal{Y}} G_{ij} \log(G_{ij}) \right], \tag{3.66}
\end{aligned}$$

onde os valores de G_{ij} para o CDCE podem ser calculados com (3.40).

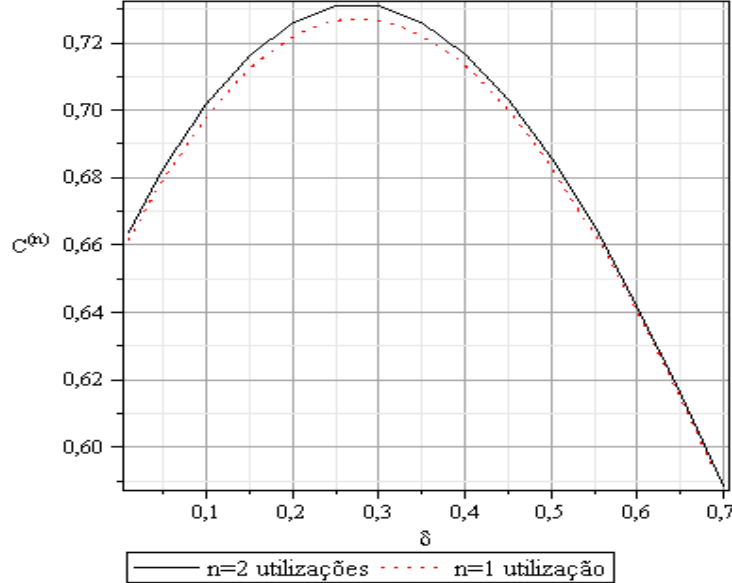


Figura 3.4: $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ versus δ para o CDCE com $B_d T = 0,01$ e $E_s/N_0 = 5$ dB.

Neste trabalho, o valor de δ será selecionado de modo a maximizar o valor de $C^{(2)}$. As Figuras 3.4 e 3.5 mostram os gráficos da capacidade do canal, em bits/uso, versus δ para $E_s/N_0 = 5$ dB e

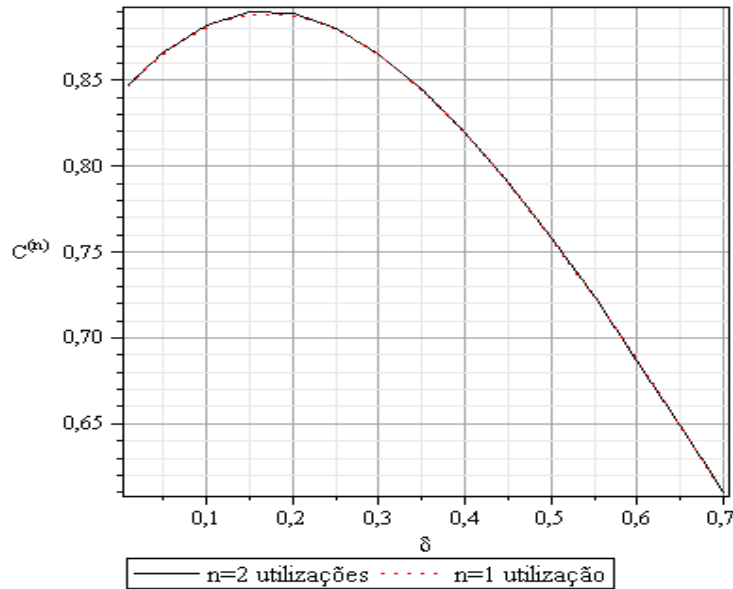


Figura 3.5: $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ versus δ para o CDCE com $B_dT = 0,01$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.

$E_s/N_0 = 10$ dB, respectivamente, com $B_dT = 0,01$ em ambos os casos. Quando $B_dT = 0,01$, tem-se que o tempo de coerência do canal, ou seja, o tempo em que o canal permanece com suas características inalteradas, é 100 vezes maior do que o período do símbolo enviado por este canal [33].

Analisando-se a Figura 3.4, percebe-se que o melhor valor de δ está em torno de 0,25. Pode ser visto também que há um ganho de 0,05 bits/uso, quando $E_s/N_0 = 5$ dB, entre a primeira e a segunda utilização do canal, quando $\delta = 0,25$. O aumento da capacidade deve-se à memória do canal, uma vez que o receptor não sabe em qual estado encontra-se o canal. Já na Figura 3.5, quando $E_s/N_0 = 10$ dB, o valor ótimo de δ está em torno de 0,18. Percebe-se, ainda, não há ganho considerável na capacidade entre a primeira e a segunda utilização do canal, devido ao maior valor de E_s/N_0 , o que torna o canal mais próximo de um canal sem memória. Comparando-se as curvas das Figuras 3.4 e 3.5, com outras curvas traçadas para diversos valores de B_dT e E_s/N_0 , é possível concluir que o valor de δ que maximiza a capacidade do canal diminui com o aumento de E_s/N_0 . Alguns valores podem ser vistos na Tabela 3.1 para o caso em que $B_dT = 0,01$. Outra observação que pode ser feita é que os valores de δ que maximizam a capacidade do canal não variam com B_dT .

3.2.2 Estimação dos parâmetros do MA

Empregou-se nesta seção um método de minimização da divergência para calcular os parâmetros do MA, para que este seja uma boa aproximação para o CDCE, o qual é descrito por três parâmetros: a

Tabela 3.1: Valores de δ ótimo em função de E_s/N_0 para $B_dT = 0,01$.

E_s/N_0	δ
0 dB	0,45
2 dB	0,35
5 dB	0,25
8 dB	0,20
10 dB	0,15

Tabela 3.2: Valores dos parâmetros do MA que modelam um CDCE.

Parâmetros do CDCE	α	β	ξ	q	Q
$E_s/N_0 = 0$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,45$	0,3817	0,1001	0,1051	0,0866	0,1003
$E_s/N_0 = 2$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,35$	0,3554	0,0901	0,0701	0,1024	0,0795
$E_s/N_0 = 5$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,25$	0,3374	0,0751	0,0351	0,1711	0,0717
$E_s/N_0 = 8$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,20$	0,3247	0,0501	0,0201	0,1915	0,0488
$E_s/N_0 = 10$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,15$	0,4430	0,0151	0,0151	0,2580	0,0580

relação sinal ruído E_s/N_0 , a banda Doppler normalizada B_dT e o passo do quantizador δ . É possível estimar os cinco parâmetros do MA, α , β , ξ , q e Q , utilizando-se a minimização da divergência, mensurada pela distância Kullback-Leibler [14], com a restrição que o CDCE e o MA tenham o mesmo coeficiente de correlação, a mesma probabilidade de ocorrer uma recepção correta e a mesma probabilidade de ocorrer um apagamento, isto é, $Cor_{\text{CDCE}} = Cor_{\text{MA}}$, $P_{\text{CDCE}}(0) = P_{\text{MA}}(0)$ e $P_{\text{CDCE}}(1) = P_{\text{MA}}(1)$. A divergência de n -ésima ordem é expressa por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D_n (P_{\text{CDCE}} \parallel P_{\text{MA}}), \quad (3.67)$$

onde $\frac{1}{n} D_n (P_{\text{CDCE}} \parallel P_{\text{MA}})$ é a distância normalizada de n -ésima ordem entre as distribuições de ruído do CDCE e do MA, P_{CDCE} e P_{MA} , respectivamente, e

$$D_n (P_{\text{CDCE}} \parallel P_{\text{MA}}) = \sum_{Z^n \in \{0,1,2\}^n} P_{\text{CDCE}}(Z^n) \log_2 \frac{P_{\text{CDCE}}(Z^n)}{P_{\text{MA}}(Z^n)}, \quad (3.68)$$

onde $P_{\text{CDCE}}(Z^n)$ é dado por (3.44) e $P_{\text{MA}}(Z^n)$ é calculado matricialmente por (2.30), utilizando-se as matrizes $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$ e $\mathbf{P}(2)$, dadas em (3.1)-(3.3). A Tabela 3.2 mostra os parâmetros obtidos com a minimização de $D_3(P_{\text{CDCE}} \parallel P_{\text{MA}})$ para valores relevantes dos parâmetros do CDCE.

Para mensurar a exatidão do modelo MA em aproximar o CDCE, será feita uma comparação entre suas funções autocorrelação. A utilização da função autocorrelação para testar a exatidão de

um modelo foi proposta em [34] e é largamente utilizada na literatura [18, 35–37]. A função autocorrelação do CDCE é dada por:

$$\begin{aligned}
 R(m) = \mathbf{E}[Z_i, Z_{i+m}] &= 1.1.P(Z_i = 1, Z_{i+m} = 1) + 1.2.P(Z_i = 1, Z_{i+m} = 2) \\
 &+ 2.1.P(Z_i = 2, Z_{i+m} = 1) + 2.2.P(Z_i = 2, Z_{i+m} = 2),
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

onde

$$\begin{aligned}
 P(Z_i = z_i, Z_{i+m} = z_{i+m}) &= \\
 \int_0^\infty \int_0^\infty q_{0,z_i}(a_1)q_{0,z_{i+m}}(a_2) \frac{4a_1a_2}{1-\rho^2} e^{-(a_1^2+a_2^2)/(1-\rho^2)} I_0\left(\frac{2\rho a_1a_2}{1-\rho^2}\right) da_1da_2.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

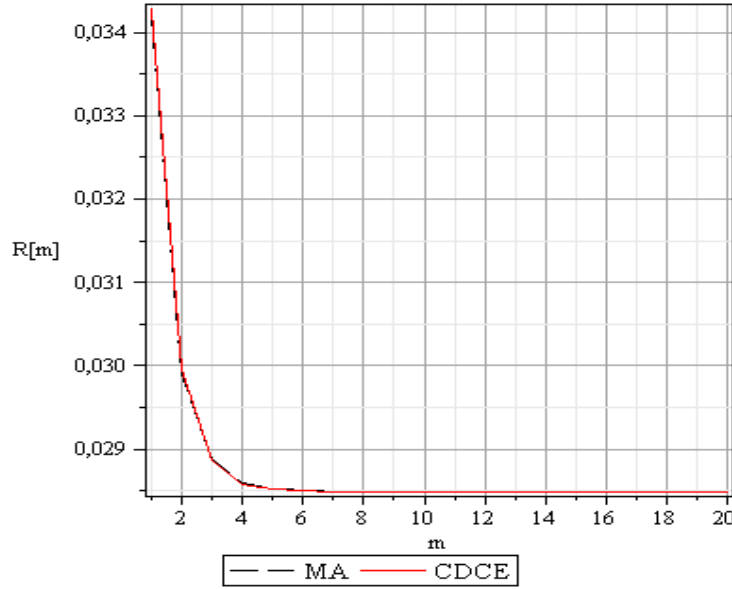


Figura 3.6: Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,1$, $\delta = 0,25$ e $E_s/N_0 = 5$ dB.

As curvas da função autocorrelação para 20 valores de m do CDCE e do MA são comparadas nas Figuras 3.6 e 3.7. Os parâmetros do modelo CDCE são $B_dT = 0,1$, $E_s/N_0 = 5$ dB (Figura 3.6) e $E_s/N_0 = 10$ dB (Figura 3.7). É possível notar que, na Figura 3.6, as curvas são praticamente idênticas, o que mostra que o MA possui um comportamento muito parecido com o CDCE para os parâmetros mencionados. O mesmo pode ser dito para a Figura 3.7, apesar da pequena divergência observada em $2 < m < 4$.

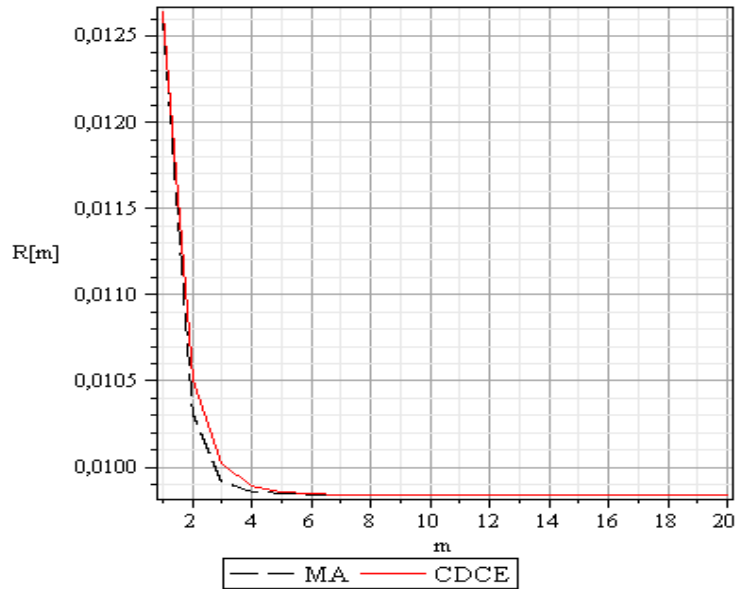


Figura 3.7: Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,1$, $\delta = 0,15$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.

As Figuras 3.8 e 3.9 também ilustram o comportamento da função autocorrelação para 20 valores de m do CDCE e do MA, porém, para um CDCE com desvanecimento mais lento, com $B_dT = 0,01$, sendo $E_s/N_0 = 5$ dB e $E_s/N_0 = 10$ dB, respectivamente. Pode-se dizer que, em ambos os casos, as curvas do MA aproximam-se razoavelmente das curvas do CDCE.

A Figura 3.10 mostra a mesma comparação feita anteriormente entre a função autocorrelação do CDCE e do MA porém, agora, para um CDCE com desvanecimento ainda mais lento, com $B_dT = 0,001$ e $E_s/N_0 = 10$ dB. É fácil perceber a grande divergência das curvas. Isso decorre do fato de que para obter-se uma modelagem precisa do CDCE com $B_dT \leq 10^{-3}$, deve-se utilizar $P_{\text{CDCE}}(Z^n)$ com $n > 3$. Simulações para a obtenção dessas probabilidades podem ser empregadas. Os resultados deste capítulo mostram que o modelo MA proposto para o canal CDCE é preciso para $B_dT \geq 0,01$ e para uma ampla faixa de E_s/N_0 .

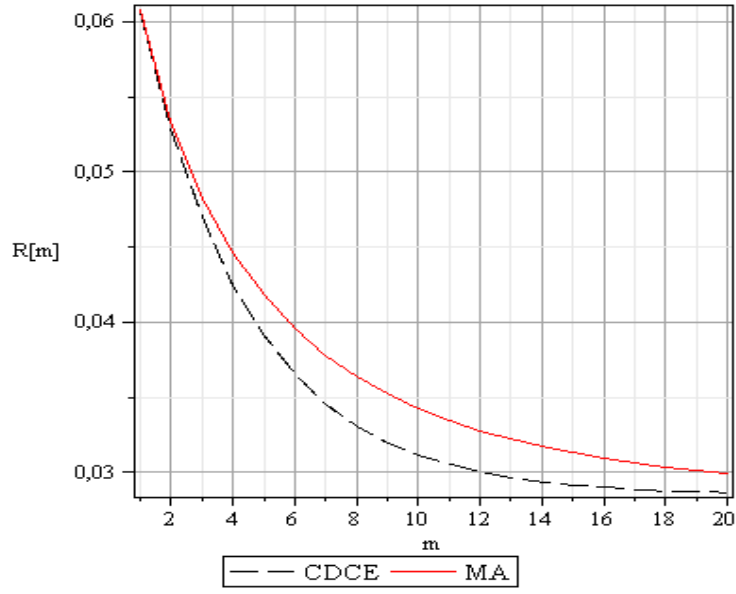


Figura 3.8: Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,25$ e $E_s/N_0 = 5$ dB.

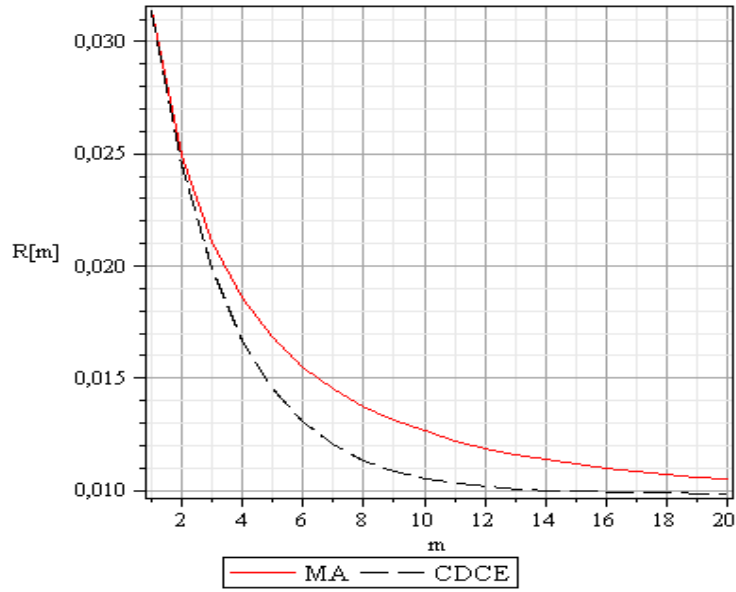


Figura 3.9: Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,15$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.

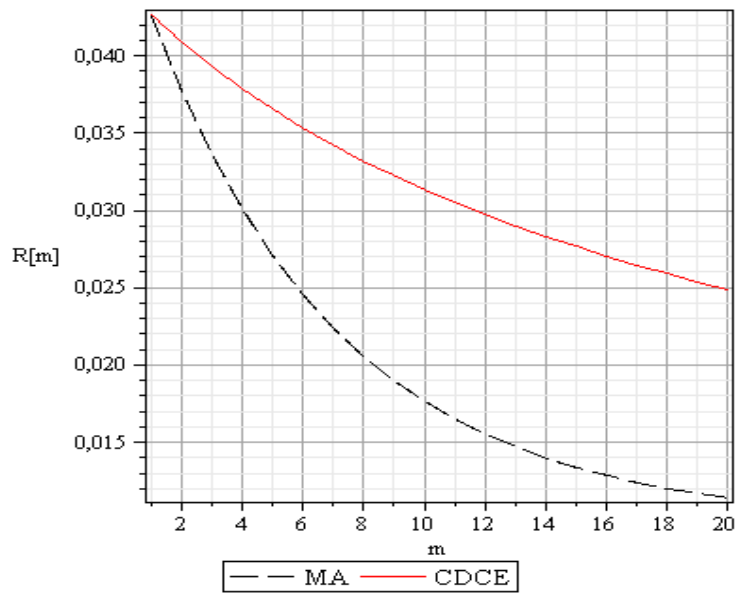


Figura 3.10: Comparação das funções autocorrelação do CDCE e do MA, para $B_dT = 0,001$, $\delta = 0,15$ e $E_s/N_0 = 10$ dB.

DESEMPENHO DE CÓDIGOS DE BLOCO NO CANAL MA

NESTE capítulo, será desenvolvida uma fórmula de recorrência utilizando-se a metodologia descrita em [38], para calcular a probabilidade do canal MA gerar m erros e k apagamentos numa sequência de comprimento n . Em seguida, essa análise será estendida para tratar o caso de um canal MA entrelaçado com nível finito. Finalmente, será feita uma análise do desempenho do canal MA com códigos de bloco entrelaçados.

4.1 Recorrência no MA

O diagrama de blocos de um sistema codificado é mostrado na Figura 4.1. Seja $\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_k)$ uma sequência de k dígitos binários de informação que é a entrada de um codificador de bloco binário, linear, de parâmetros (n, k) e distância de Hamming mínima d_{min} . A saída do codificador é uma palavra-código binária $\mathbf{v} = (v_1 v_2 \dots v_n)$. Os efeitos indesejados da propagação são modelados como uma sequência ternária de ruídos $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \dots z_n)$, modelada estatisticamente pelo MA que, por sua vez, produz a sequência $\mathbf{r} = (r_1 r_2 \dots r_n)$ na entrada do decodificador. A sequência de ruídos é tal que $r_i = 2v_i + (-1)^{v_i} z_i$, ou seja,

$$r_i = \begin{cases} z_i, & \text{se } v_i = 0 \\ 2 - z_i, & \text{se } v_i = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Se $z_i = 1$, um apagamento ocorrerá na saída ($r_i = 1$) independentemente de v_i . Um erro ocorrerá

quando $z_i = 2$, ou seja, $v_i = 0$ e $r_i = 2$ ou $v_i = 1$ e $r_i = 0$. A transmissão será correta se $z_i = 0$, ou seja, $v_i = 0$ e $r_i = 0$ ou $v_i = 1$ e $r_i = 2$. Seja e o número de erros em \mathbf{r} e a a quantidade de apagamentos em \mathbf{r} . Se $2e + a + 1 \leq d_{min}$, o padrão de ruídos é corrigível pelo código, o que implica $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$. Portanto, a probabilidade de uma decodificação correta, denotada por $P(c)$, é dada por:

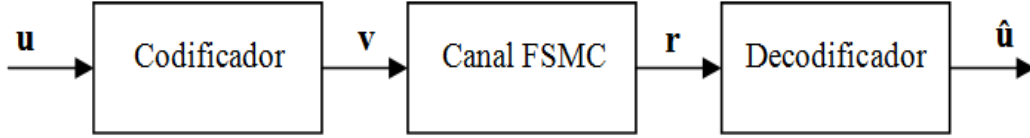


Figura 4.1: Sistema de comunicações codificado.

$$P(c) = P(\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}) = P(2e + a + 1 \leq d_{min}). \quad (4.2)$$

Porém, se $2e + a + 1 > d_{min}$, duas situações podem ocorrer: falha na decodificação, o que irá gerar um apagamento, ou erro de decodificação. Estes dois eventos serão considerados como decodificação sem sucesso. Assim, a probabilidade de uma decodificação sem sucesso, denominada de PCE, é dada por [39]:

$$\text{PCE} = 1 - P(c). \quad (4.3)$$

Define-se $P(m, k, n)$ como a probabilidade de ocorrerem m erros e k apagamentos na sequência \mathbf{r} de comprimento n , ou seja, $P(m, k, n)$ é igual a probabilidade da sequência $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \dots z_n)$ ter m posições iguais a 2 e k posições iguais a 1. Assim, $P(c)$ é a probabilidade de ocorrerem m dígitos incorretos e k apagamentos, de modo que $2m + k + 1 \leq d_{min}$, em uma palavra de comprimento n recebida pelo decodificador. Então

$$P(c) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n P(m, k, n) \quad (4.4)$$

onde $2m + k + 1 \leq d_{min}$.

Portanto, para que seja possível analisar o desempenho de um sistema de comunicações codificado, deve-se calcular $P(m, k, n)$.

Seja \mathcal{R} o corpo dos números reais. Define-se $\mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$ como o conjunto de todas as somas finitas de produtos não comutativos de x_0, x_1 e x_2 , com coeficientes tomados de \mathcal{R} . Seja ζ_n um conjunto arbitrário de seqüências de ruído ternária de comprimento n . Define-se uma série geradora para ζ_n da seguinte forma:

$$F_{\zeta_n} = \sum_{z_n \in \zeta_n} x_{z_1} x_{z_2} \dots x_{z_n} \in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle, \quad (4.5)$$

onde $x_{z_i} \in \{x_0, x_1, x_2\}$, e os indeterminantes x_0, x_1 e x_2 marcam um dígito de ruído igual a 0, 1 ou 2, respectivamente, em cada seqüência pertencente a ζ_n . Denota-se $\zeta_n^{m,k}$ o conjunto de todas as seqüências de comprimento n com m erros e k apagamentos. Então, $P(m, k, n) = P(\zeta_n^{m,k})$.

A probabilidade de um conjunto arbitrário de seqüências de comprimento n , ζ_n , pode ser expressa na forma [40]:

$$P(\zeta_n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\zeta_n}) \mathbf{1}. \quad (4.6)$$

A fim de enumerar o conjunto $\zeta_n^{m,k}$, define-se $\mathcal{R}[[s, w, z]]$ o anel de todas as séries de potências com indeterminantes comutativos s, w e z , e coeficientes tomados de \mathcal{R} . Seja $H(s, w, z)$ uma série geradora definida da seguinte forma:

$$H(s, w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n \in \mathcal{R}[[s, w, z]]. \quad (4.7)$$

em que s, w e z são indeterminantes comutativos que marcam, respectivamente, a quantidade de erros, a quantidade de apagamentos e o comprimento de uma seqüência de ruído. Define-se $[s^m w^k z^n]$ um operador tal que $[s^m w^k z^n]H(s, w, z)$ é o coeficiente do termo $s^m w^k z^n$ na série de potências $H(s, w, z)$, ou seja, $P(m, k, n)$. Assim,

$$P(m, k, n) = [s^m w^k z^n]H(s, w, z). \quad (4.8)$$

Define-se ζ^* como o conjunto de todas as seqüências ternárias de qualquer comprimento, incluindo a seqüência vazia, isto é, $\zeta^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \zeta_n^*$. A série geradora F_{ζ^*} é:

$$\begin{aligned} F_{\zeta^*} &= \sum_{i=0}^{\infty} (x_0 + x_1 + x_2)^i \\ &= (1 - (x_0 + x_1 + x_2))^{-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Com o objetivo de enumerar a quantidade de erros e apagamentos e o comprimento de cada seqüência em F_{ζ^*} e, considerando-se os indeterminantes s, w e z definidos anteriormente, define-se a seguinte série geradora:

$$\begin{aligned}
F(x_0, x_1, x_2, s, w, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i (x_0 + wx_1 + sx_2)^i \\
&= (1 - (z(x_0 + wx_1 + sx_2)))^{-1} \in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle [[s, w, z]]. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

É possível calcular $H(s, w, z)$ substituindo-se, em (4.10), x_{z_i} por $\mathbf{P}(z_i)$ e multiplicando-se a matriz resultante pelo vetor linha $\mathbf{\Pi}^T$ à esquerda e pelo vetor $\mathbf{1}$ à direita [38].

$$H(s, w, z) = \mathbf{\Pi}^T \{ \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zw\mathbf{P}(1) - zs\mathbf{P}(2) \}^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.11)$$

Substituindo-se em (4.8), obtém-se:

$$P(m, k, n) = [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T \{ \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zw\mathbf{P}(1) - zs\mathbf{P}(2) \}^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.12)$$

É possível observar que $H(s, w, z)$ é uma razão de dois polinômios em s, w e z , uma vez que a inversa da matriz $\mathbf{B} \triangleq \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zw\mathbf{P}(1) - zs\mathbf{P}(2)$ é a razão entre a transposta da matriz dos cofatores de \mathbf{B} e seu determinante, isto é, $\mathbf{B}^{-1} = \text{cof}(\mathbf{B})^T / \det(\mathbf{B})$. Desta forma:

$$H(s, w, z) = \frac{\mathbf{\Pi}^T \text{Cof}(\mathbf{B})^T \mathbf{1}}{\det(\mathbf{B})}. \quad (4.13)$$

A partir de $H(s, w, z)$, pode-se obter uma fórmula recursiva para $P(m, k, n)$, como será mostrado a seguir para o caso particular do MA. A matriz \mathbf{B} para o MA, em função das matrizes $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$ e $\mathbf{P}(2)$ definidas em (3.1), (3.2) e (3.3) respectivamente, é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zw\mathbf{P}(1) - zs\mathbf{P}(2) \\
&= \begin{bmatrix} 1 - z + z\xi + zQ - zQ\xi - zw\xi + zwQ\xi & -zQ(1 - \alpha - \beta + w\alpha + s\beta) \\ -zq(1 - \xi + w\xi) & 1 - z + \alpha(z - zq - zw + zwq) + zq + \beta(z - zq - zs + zsq) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Desta forma:

$$\det(B) = 1 + c_1 z + c_2 z s + c_3 z w + c_4 z^2 + c_5 z^2 s + c_6 z^2 w + c_7 z^2 w s + c_8 z^2 w^2, \quad (4.14)$$

onde

$$\begin{aligned}
c_1 &= -Q\xi - 2 + \alpha + \beta + q + \xi + Q - q\alpha - q\beta \\
c_2 &= q\beta - \beta \\
c_3 &= q\alpha + Q\xi - \xi - \alpha \\
c_4 &= Q\alpha + q\alpha + \xi\beta - q\xi\alpha - q\xi\beta - Q\xi\alpha - Q\xi\beta - \alpha - \beta - \xi - q - Q + Q\beta + Q\xi \\
&\quad + Q\alpha + q\beta + q\xi + 1 \\
c_5 &= \beta - q\beta - \xi\beta - Q\beta + q\xi\beta + Q\xi\beta \\
c_6 &= \alpha - q\alpha - 2\xi\alpha - Q\alpha - \xi\beta - q\xi - Q\xi + \xi + 2q\alpha\xi + 2Q\alpha\xi + q\xi\beta + Q\xi\beta \\
c_7 &= \xi\beta - q\xi\beta - Q\xi\beta \\
c_8 &= \xi\alpha - q\xi\alpha - Q\xi\alpha,
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{\Pi}^T \text{cof}(\mathbf{B})^T \mathbf{1} = c_{0p} + c_{1p}z + c_{2p}zs + c_{3p}zw, \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned}
c_{0p} &= 1 \\
c_{1p} &= \frac{Q^2 - q^2\beta - q^2\alpha + Q\xi + 2qQ - qQ\xi - qQ\alpha + q^2 - q - Q + q\alpha - qQ\beta}{Q + q} \\
c_{2p} &= \frac{-q\beta + q^2\beta + qQ\beta}{Q + q} \\
c_{3p} &= \frac{-q\alpha - Q\xi + q^2\alpha + Q^2\xi + qQ\xi + qQ\alpha}{Q + q}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
H(s, w, z) &= \frac{c_{0p} + c_{1p}z + c_{2p}zs + c_{3p}zw}{1 + c_1z + c_2zs + c_3zw + c_4z^2 + c_5z^2s + c_6z^2w + c_7z^2ws + c_8z^2w^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}zs + c_{3_p}zw &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_1 P(m, k, n) s^m w^k z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_2 P(m, k, n) s^{m+1} w^k z^{n+1} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_3 P(m, k, n) s^m w^{k+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_4 P(m, k, n) s^m w^k z^{n+2} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_5 P(m, k, n) s^{m+1} w^k z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_6 P(m, k, n) s^m w^{k+1} z^{n+2} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_7 P(m, k, n) s^{m+1} w^{k+1} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n c_8 P(m, k, n) s^m w^{k+2} z^{n+2}.
\end{aligned}$$

Fazendo-se uma mudança de índices em cada somatório triplo, obtém-se termos apenas com potências $s^m w^k z^n$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}zs + c_{3_p}zw &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P(m, k, n-1) s^m w^k z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} c_2 P(m-1, k, n-1) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_3 P(m, k-1, n-1) s^m w^k z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-2} c_4 P(m, k, n-2) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-2} c_5 P(m-1, k, n-2) s^m w^k z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-2} c_6 P(m, k-1, n-2) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-2} c_7 P(m-1, k-1, n-2) s^m w^k z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_8 P(m, k-2, n-2) s^m w^k z^n.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Como os cinco últimos somatórios triplos de (4.16) só têm efeito a partir de $n = 2$, é possível separar os quatro primeiros somatórios triplos em dois casos: $n \leq 1$ e $n \geq 2$. Então:

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}zs + c_{3_p}zw &= P(0, 0, 0) + P(0, 0, 1)z + P(1, 0, 1)sz + P(0, 1, 1)wz \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n + c_1 P(0, 0, 0)z + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_1 P(m, k, n-1) s^m w^k z^n \\
&+ c_2 P(0, 0, 0)sz + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} c_2 P(m-1, k, n-1) s^m w^k z^n + c_3 P(0, 0, 0)wz \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_3 P(m, k-1, n-1) s^m w^k z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-2} c_4 P(m, k, n-2) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-2} c_5 P(m-1, k, n-2) s^m w^k z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=0}^{n-2} c_6 P(m, k-1, n-2) s^m w^k z^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{m=1}^{n-2} c_7 P(m-1, k-1, n-2) s^m w^k z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} c_8 P(m, k-2, n-2) s^m w^k z^n.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como $P(m, k, n) = 0$ para $m, k, n < 0$ e $m + k > n$, é possível escrever um único índice para os somatórios em m e k , de forma que, reagrupando os termos do lado direito de (4.17), obtém-se:

$$\begin{aligned}
c_{0_p} + c_{1_p}z + c_{2_p}zs + c_{3_p}zw &= P(0, 0, 0) + \{P(0, 0, 1)z + c_1 P(0, 0, 0)z\} + \{P(1, 0, 1) \\
&+ c_2 P(0, 0, 0)\}sz + \{P(0, 1, 1) + c_3 P(0, 0, 0)\}wz + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \{P(m, k, n) \\
&+ c_1 P(m, k, n-1) + c_2 P(m-1, k, n-1) + c_3 P(m, k-1, n-1) \\
&+ c_4 P(m, k, n-2) + c_5 P(m-1, k, n-2) + c_6 P(m, k-1, n-2) \\
&+ c_7 P(m-1, k-1, n-2) + c_8 P(m, k-2, n-2)\} s^m w^k z^n.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Assim, igualando-se os coeficientes de mesma potência em ambos os lados de (4.18), encontra-se:

$$\begin{aligned}
P(0, 0, 0) &= c_{0_p} = 1 \\
c_1 P(0, 0, 0) + P(0, 0, 1) &= c_{1_p} \\
P(0, 0, 1) &= c_{1_p} - c_1 \\
P(1, 0, 1) + c_2 P(0, 0, 0) &= c_{2_p} \\
P(1, 0, 1) &= c_{2_p} - c_2 \\
P(0, 1, 1) + c_3 P(0, 0, 0) &= c_{3_p} \\
P(0, 1, 1) &= c_{3_p} - c_3,
\end{aligned}
\tag{4.19}$$

para $n \geq 2$ e $0 \leq m + k \leq n$, bem como

$$\begin{aligned}
&P(m, k, n) + c_1 P(m, k, n - 1) + c_2 P(m - 1, k, n - 1) + c_3 P(m, k - 1, n - 1) \\
&+ c_4 P(m, k, n - 2) + c_5 P(m - 1, k, n - 2) + c_6 P(m, k - 1, n - 2) + c_7 P(m - 1, k - 1, n - 2) \\
&+ c_8 P(m, k - 2, n - 2) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

Assim, a fórmula de recorrência é dada por:

$$\begin{aligned}
P(m, k, n) &= -c_1 P(m, k, n - 1) - c_2 P(m - 1, k, n - 1) - c_3 P(m, k - 1, n - 1) \\
&- c_4 P(m, k, n - 2) - c_5 P(m - 1, k, n - 2) - c_6 P(m, k - 1, n - 2) - c_7 P(m - 1, k - 1, n - 2) \\
&- c_8 P(m, k - 2, n - 2),
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned}
P(m, k, n) &= 0 \text{ para } m, n, k < 0, m + k > n \\
P(0, 0, 0) &= 1 \\
P(1, 0, 1) &= c_{2_p} - c_2 = -2q^2\beta + Q\beta \\
P(0, 1, 1) &= c_{3_p} - c_3 = Q\alpha + q\xi.
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

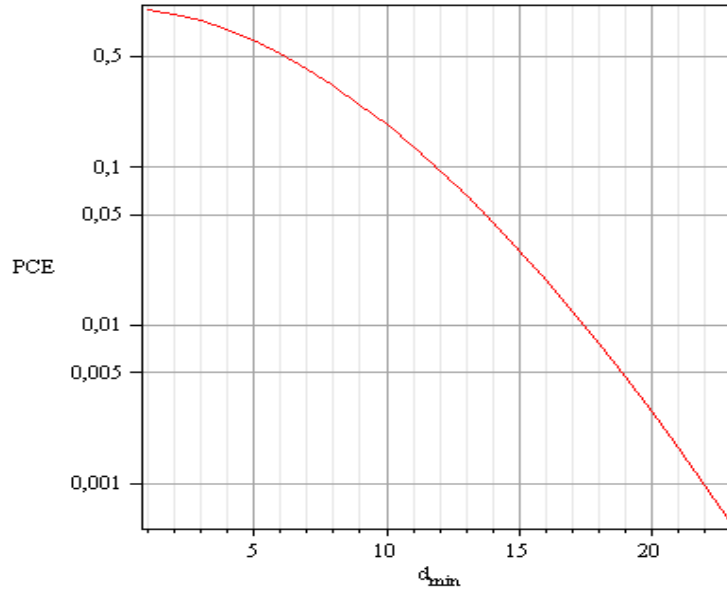


Figura 4.2: PCE versus d_{min} para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, para o MA que modela um CDCE com $E_s/N_0 = 10$ dB, $\delta = 0,15$ e $B_dT = 0,01$.

As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram a variação da PCE em função da distância mínima de um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$ para $E_s/N_0 = 10$ dB e $E_s/N_0 = 12$ dB, respectivamente. Nas Figuras 4.4 e 4.5, é possível observar a variação da PCE em função de E_s/N_0 no MA para $B_dT = 0,01$ e $B_dT = 0,1$, respectivamente.

4.2 Canais com entrelaçamento

O diagrama de blocos de um sistema codificado com entrelaçamento finito é mostrado na Figura 4.6. Seja $\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_j)$ uma seqüência de j dígitos binários de informação que é a entrada de um codificador de bloco binário, linear, de parâmetros (n, j) e distância de Hamming mínima d_{min} . A saída do codificador é uma palavra-código binária $\mathbf{v} = (v_1 v_2 \dots v_n)$ a qual, após passar pelo entrelaçador com nível de entrelaçamento I_d , é representada por $\bar{\mathbf{v}}$. Os efeitos indesejados da propagação são modelados como uma seqüência ternária de ruídos $\mathbf{z}_n = (z_i z_{i+1} \dots z_{i+n-1})$, de comprimento n , produzida pelo canal. A seqüência $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \dots \bar{r}_n)$ chega na entrada do desentrelaçador, no qual a seqüência de ruído em cada linha será separada de I_d posições, ou seja, $\bar{\mathbf{z}}_n = (\bar{z}_i \bar{z}_{i+1} \dots \bar{z}_{i+n-1}) = (z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(n-1)I_d})$. Em seguida, a seqüência \mathbf{r} entra no decodificador e, finalmente, obtém-se $\hat{\mathbf{u}}$ na saída do sistema.

Dada uma seqüência $\bar{\mathbf{z}}_n$ específica, define-se um conjunto \mathcal{X}_n^i formado pela inserção do conjunto $\zeta_{I_d-1}^*$ entre cada dígito da seqüência $\bar{\mathbf{z}}_n$, ou seja, $\mathcal{X}_n^i = \{\zeta_{I_d-1}^* z_i \zeta_{I_d-1}^* z_{i+I_d} \dots \zeta_{I_d-1}^* z_{i+(n-1)I_d}\}$. É

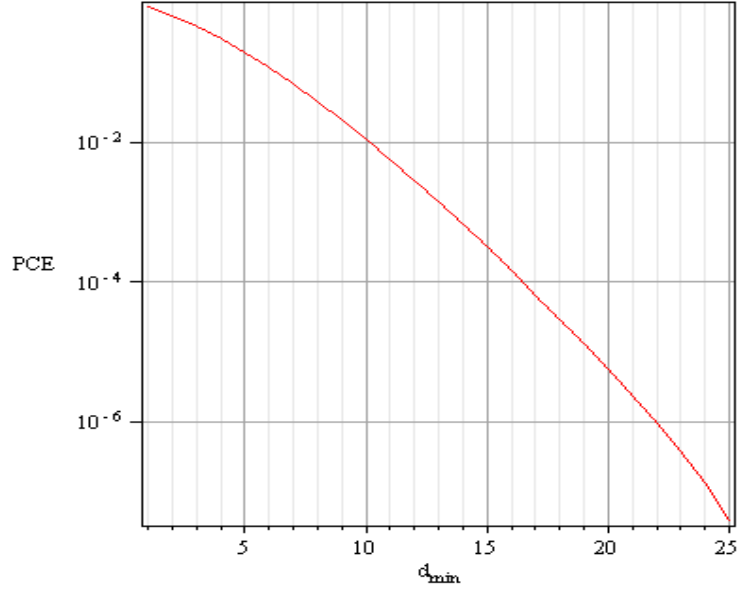


Figura 4.3: PCE versus d_{\min} para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, para o MA que modela um CDCE com $E_s/N_0 = 12$ dB, $\delta = 0,12$ e $B_dT = 0,01$.

importante salientar que o primeiro conjunto $\zeta_{I_d-1}^*$ foi incluído por conveniência. Deve ser notado que a probabilidade de ocorrência da seqüência \overline{z}_n é igual à probabilidade de ocorrência do conjunto \mathcal{X}_n^i , isto é:

$$P(\overline{z}_i \overline{z}_{i+1} \dots \overline{z}_{i+n-1}) = P(z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(n-1)I_d}) = P(\mathcal{X}_n^i). \quad (4.23)$$

Define-se uma série geradora para o conjunto \mathcal{X}_n^i :

$$F_{\mathcal{X}_n^i} = F_{\zeta_{I_d-1}^*}^{x_{z_i}} F_{\zeta_{I_d-1}^*}^{x_{z_{i+I_d}}} \dots F_{\zeta_{I_d-1}^*}^{x_{z_{i+(n-1)I_d}}}, \quad (4.24)$$

onde $F_{\zeta_{I_d-1}^*} = (x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1}$ é a série geradora do conjunto $\zeta_{I_d-1}^*$. A probabilidade da seqüência \mathbf{z}_i é dada por::

$$\begin{aligned} P(z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(n-1)I_d}) &= \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^i}) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \Delta(x_0 + x_1 + x_2) x_{z_{i+kI_d}} \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \{ \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(2) \}^{I_d-1} \mathbf{P}_{(z_{i+kI_d})} \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^{I_d-1} \mathbf{P}_{(z_{i+kI_d})} \right) \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

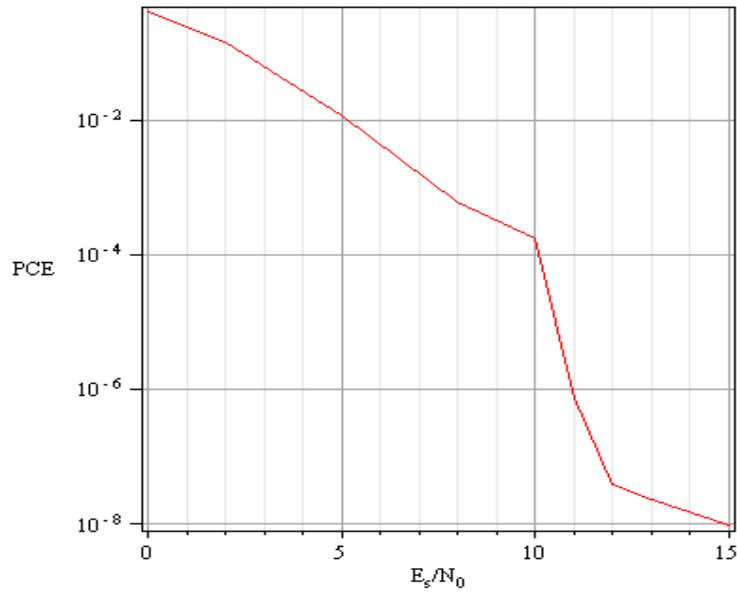


Figura 4.4: Variação da PCE versus E_s/N_0 para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, em um canal MA modelado para um CDCE com $B_dT = 0,01$ e com valores de δ que maximizam a capacidade para cada valor de E_s/N_0 .

Em seguida, será determinada a probabilidade do MA entrelaçado, com nível de entrelaçamento I_d , gerar m dígitos errados e k dígitos de apagamento em uma palavra recebida de comprimento n em cada linha do entrelaçador, denotada por $P^{I_d}(m, k, n)$. Seja o conjunto $\mathcal{X}_n^{m,k}$ a união de todos os conjuntos $\mathcal{X}_n^{i,j}$, no qual a seqüência \mathbf{z}'_n possui m erros e k apagamentos. Portanto, observa-se que $P^{I_d}(m, k, n) = P(\mathcal{X}_n^{m,k})$. Assim, é possível determinar-se $P^{I_d}(m, k, n)$ calculando-se inicialmente uma expressão para a série geradora de $\mathcal{X}_n^{m,k}$ e utilizando-se a mesma idéia contida em (4.6), isto é:

$$P^{I_d}(m, k, n) = \mathbf{\Pi}^T(\Delta F_{\mathcal{X}_n^{m,k}})\mathbf{1}. \quad (4.26)$$

Define-se o conjunto \mathcal{X}^* como a união de todos os conjuntos \mathcal{X}_n^* para todas as seqüências produzidas pelo canal entrelaçado. A série geradora para \mathcal{X}_n^* é:

$$F_{\mathcal{X}_n^*} = \left(F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_2 \right)^n \in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle. \quad (4.27)$$

Considerando-se \mathcal{X}^* como a união de todos os conjuntos \mathcal{X}_n^* para todos os valores de n , isto é, $\mathcal{X}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_n^*$, então a série geradora de \mathcal{X}^* é dada por:

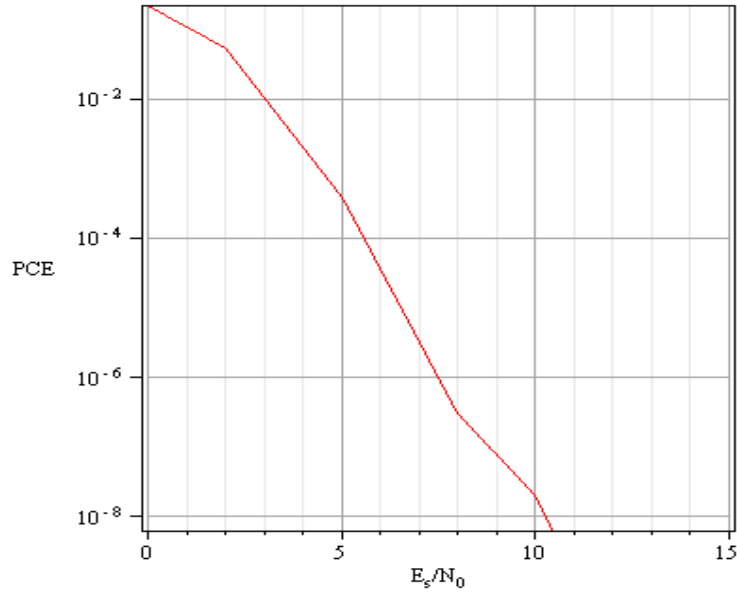


Figura 4.5: Variação da PCE versus E_s/N_0 para um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$, em um canal MA modelado para um CDCE com $B_dT = 0, 1$ e com valores de δ que maximizam a capacidade para cada valor de E_s/N_0 .

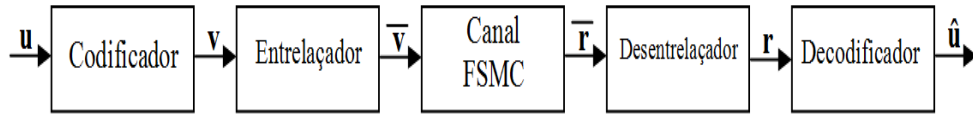


Figura 4.6: Sistema de comunicações com entrelaçamento.

$$\begin{aligned}
 F_{\mathcal{X}^*} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{\mathcal{X}_n^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_2 \right)^n \\
 &= \left(1 - ((x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_0 + (x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_1 + (x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_2) \right)^{-1} \\
 &\in \mathcal{R} \langle\langle x_0, x_1, x_2 \rangle\rangle .
 \end{aligned}$$

Utilizando os indeterminantes s, w e z para enumerar a quantidade de erros, a quantidade de apagamentos e o comprimento de cada seqüência em $F_{\mathcal{X}^*}$, respectivamente, define-se a seguinte série geradora:

$$\begin{aligned}
 F^{I_d}(x_0, x_1, x_2, s, w, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + w F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 + s F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_2 \right)^i \\
 &= \left(1 - z((x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_0 + w(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_1 + s(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_2) \right)^{-1} \\
 &\in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle [[s, w, z]].
 \end{aligned}$$

Desta forma, é possível observar a seguinte relação:

$$F_{\mathcal{X}_n^{m,k}} = [s^m w^k z^n] F^{I_d}(x_0, x_1, x_2, s, w, z) \in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle. \quad (4.28)$$

Portanto, $F_{\mathcal{X}_n^{m,k}}$ enumera as seqüências de erros produzidos pelo canal entrelaçado com m erros, k apagamentos e comprimento n . Utilizando-se (4.26) e (4.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, k, n) &= P(\mathcal{X}_n^{m,k}) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^{m,k}}) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T (\Delta F^{I_d}(x_0, x_1, x_2, s, w, z)) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T (\Delta(1 - z((x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_0 + w(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_1 + s(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_2))^{-1}) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T (\Delta(1 - z(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} (x_0 + wx_1 + sx_2))^{-1}) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T (\mathbf{I} - z\mathbf{P}^{I_d-1} \{\mathbf{P}(0) + w\mathbf{P}(1) + s\mathbf{P}(2)\})^{-1}) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{I_d-1} \{z\mathbf{P}(0) + zw\mathbf{P}(1) + zs\mathbf{P}(2)\})^{-1}) \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Utilizando os mesmos procedimentos da Seção 4.1, é possível obter-se uma fórmula recursiva para $P^{I_d}(m, k, n)$, dada por:

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, k, n) &= b_1 P^{I_d}(m, k, n-1) + b_2 P^{I_d}(m-1, k, n-1) + b_3 P^{I_d}(m, k-1, n-1) \\ &\quad + b_4 P^{I_d}(m, k, n-2) + b_5 P^{I_d}(m-1, k, n-2) + b_6 P^{I_d}(m, k-1, n-2) \\ &\quad + b_7 P^{I_d}(m-1, k-1, n-2) + b_8 P^{I_d}(m, k-2, n-2), \end{aligned}$$

para $n \geq 2$, $0 \leq m + k \leq n$, onde

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} (-q^2 - Q^2 - q\alpha - q\beta_q^2\alpha + q^2\beta + Qq\alpha + Qq\beta + q + Q - Q\xi + Q^2\xi - 2qQ + qQ\xi) \\
&\quad - \frac{q+Q - Q\beta - Q\alpha - q\xi}{q+Q} \\
b_2 &= -\frac{Q\beta + (-Qq\beta + q\beta - q^2\beta)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\
b_3 &= -\frac{Q\alpha + q\xi + (-\alpha qQ - \alpha q^2 + \alpha q + \xi Q - \xi Q^2 - qQ\xi)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\
b_4 &= -\frac{(-Q - q^2\alpha - q^2\beta - q^2\xi - Q^2\beta - Q^2\alpha - Q^2\xi + 2qQ + q\alpha + q\beta + q\xi + Q\beta + Q\alpha + Q\xi - q + q^2}{q+Q} \\
&\quad + \frac{+Q^2 + q^2\xi\alpha + q^2\xi\beta + Q^2\xi\beta + Q^2\xi\alpha + 2qQ\beta\xi - 2qQ\alpha - 2qQ\beta + 2qQ\alpha\xi - 2qQ\xi - q\beta\xi - q\alpha\xi}{q+Q} \\
&\quad - \frac{Q\xi\beta - Q\xi\alpha)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\
b_5 &= -\frac{(q\beta\xi + q^2\beta + Q^2\beta - q^2\xi\beta - Q^2\xi\beta + 2qQ\beta - 2qQ\beta\xi - q\beta - Q\beta + Q\xi\beta)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\
b_6 &= -\frac{(q^2\alpha - 2q^2\xi\alpha + Q^2\alpha - 2Q^2\xi\alpha + q^2\xi - q^2\xi\beta - Q^2\xi\beta + Q^2\xi + 2qQ\xi - 2qQ\xi\beta - 4qQ\alpha\xi + 2qQ\alpha}{q+Q} \\
&\quad - \frac{q\xi + q\beta\xi + q\alpha\xi - q\alpha + 2Q\xi\alpha - Q\alpha - Q\xi\beta - Q\xi)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\
b_7 &= -\frac{(2qQ\beta\xi - q\beta\xi - Q\beta\xi + Q^2\beta\xi + q^2\beta\xi)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\
b_8 &= -\frac{(q^2\xi\alpha + \xi\alpha q^2 + 2qQ\alpha\xi - q\alpha\xi - Q\alpha\xi)(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q}, \tag{4.30}
\end{aligned}$$

com as mesmas condições iniciais dadas em (4.22). É possível perceber que fazendo-se $I_d = 1$ em (4.30), isto é, sem utilização do entrelaçamento, chega-se a (4.15). Deve ser dito que o canal entrelaçado, que engloba o entrelaçador, o MA e o desentrelaçador, corresponde a um novo modelo de canal de estado finito, cuja matriz de transição da cadeia de Markov é \mathbf{P}^{I_d} [38].

A Figura 4.7 ilustra a variação da PCE em função da distância mínima de um código de bloco de comprimento $n = 63$, tendo I_d como parâmetro, para $E_s/N_0 = 5$ dB. Valores combinados de d_{min} e I_d podem ser escolhidos para obter-se um certo desempenho. É possível observar, na Figura 4.8, que para $I_d \geq 20$ o canal se comporta como um canal sem memória. Em outras palavras, valores de $I_d > 20$ introduzem um maior atraso e requerem mais processamento do sistema sem nenhum ganho considerável de desempenho. Desta forma, é possível avaliar o compromisso entre a distância mínima do código e o valor do nível de entrelaçamento para se obter um certo desempenho.

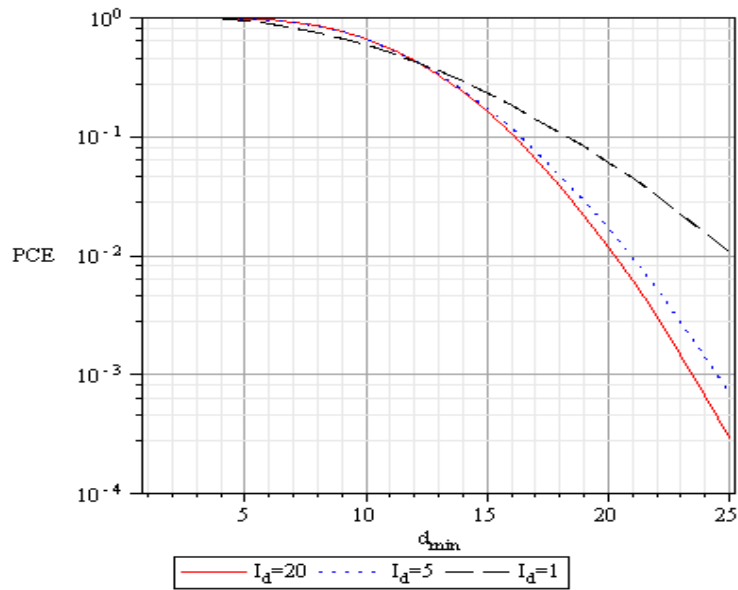


Figura 4.7: PCE versus d_{min} tendo I_d como parâmetro para o canal MA que modela um CDCE com parâmetros $E_s/N_0 = 5$ dB, $B_dT = 0,01$ e $\delta = 0,25$, com um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$.

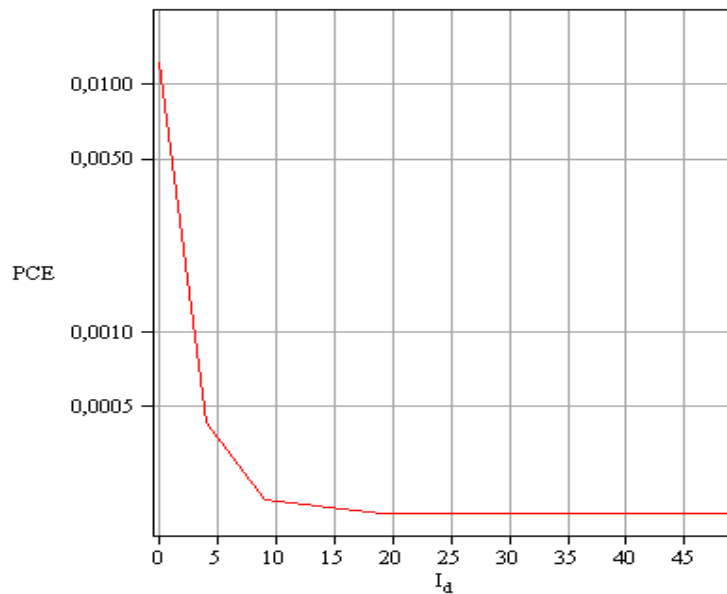


Figura 4.8: PCE versus I_d para um MA que modela um CDCE com parâmetros $E_s/N_0 = 10$ dB, $B_dT = 0,01$ e $\delta = 0,15$, com um código de bloco binário, linear, de comprimento $n = 63$ e $d_{min} = 17$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

NESTA dissertação, foi proposto um modelo de canal de estados finitos não binário, com três níveis de quantização, denominado modelo com apagamento e denotado por MA. Este foi idealizado a fim de que haja uma menor perda de informação, quando comparado a FSMC binários, com apenas dois níveis de quantização.

Foram descritas as matrizes de distribuição de erros, acertos e de apagamentos, bem como a matriz de transição de estados, em função dos parâmetros α, β, ξ, q e Q do MA. Também foi mostrado o canal discreto com correlação exponencial (CDCE), o qual deseja-se modelar com o uso do MA. O valor do passo do quantizador δ foi determinado através dos cálculos da capacidade do canal MA para 1 e 2 utilizações, de modo a maximizar esta capacidade, para diferentes valores dos parâmetros do canal discreto com correlação exponencial, B_dT e E_s/N_0 . Sabendo-se o passo adequado do quantizador, foi possível obter as probabilidades de decodificação sem sucesso do CDCE, as quais foram utilizadas para determinação dos parâmetros do MA através da minimização da distância de Kullback-Leibler. Para avaliar a exatidão do modelo MA em aproximar o CDCE, foi realizada uma comparação entre as funções autocorrelação de ambos, as quais tiveram suas expressões desenvolvidas neste trabalho. Desta maneira, verificou-se que o MA descreve, estatisticamente e de maneira satisfatória, o CDCE quando $B_dT \geq 0,01$, para uma ampla faixa de E_s/N_0 . O CDCE com correlação ainda mais lenta, isto é, $B_dT < 0,01$, é passível de ser representado pelo MA, desde que as probabilidades $P_{\text{CDCE}}(Z^n)$ sejam obtidas para $n > 3$, de modo que o comportamento do CDCE seja descrito de maneira mais precisa.

Em seguida, foi desenvolvida uma expressão de recorrência para o cálculo da probabilidade da decodificação sem sucesso, ou seja, a probabilidade do canal MA gerar m erros e k apagamentos

numa seqüência de comprimento n . Em complemento a essa investigação, foi obtida uma expressão para avaliar o comportamento do canal com o uso do entrelaçamento finito. Os resultados mostraram que o canal com nível de entrelaçamento $I_d = 10$, com $B_d T = 0,01$, apresenta valores de PCE menores do que quando o entrelaçamento não é utilizado ($I_d = 1$). Da mesma forma, verificou-se que o canal com nível de entrelaçamento $I_d \geq 20$ se comporta como um canal sem memória. Assim, conclui-se que valores muito altos de I_d requerem maior capacidade de processamento e introduzem um maior atraso no sistema sem, no entanto, trazer nenhum benefício considerável.

5.1 Sugestões para futuros estudos

Outros tópicos que podem ser abordados em pesquisas futuras:

- ▷ Parameterizar o modelo MA para canais com desvanecimento com diferentes funções autocorrelação (por exemplo, a proposta por Clarke [41]) e diferentes funções densidades de probabilidade da amplitude do desvanecimento (por exemplo: Rice, Nakagami);
- ▷ Propor modelos com mais níveis de quantização e avaliar o ganho em relação a modelos com decisão abrupta;
- ▷ Vários algoritmos de decodificação têm sido propostos com o intuito de explorar a memória de canais de estados finitos binários [42–44]. Estes trabalhos podem ser estendidos para o modelo MA com o intuito de analisar conjuntamente os benefícios da memória e decisão suave.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Nuaymi, *Wimax - Technology for Broadband Wireless Access*, 1st ed. John Wiley, 2007.
- [2] K. Jack, *Video Demystified*, 4th ed. Elsevier Inc., 2005.
- [3] K. Pahlavan and P. Krishnamurthy, *Principles of Wireless Networks*. Prentice-Hall, 2002.
- [4] L. N. Kanal and A. R. K. Sastry, "Models for channels with memory and their applications to error control," *Proc. of the IEEE*, vol. 66, no. 7, pp. 724–744, July 1978.
- [5] S. Tsai, "Markov characterization of the HF channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 17, no. 1, pp. 24–32, Feb. 1969.
- [6] C. Pimentel and I. F. Blake, "Non-interleaved Reed-Solomon coding performance on finite state channels," *IEEE Int. Conf. Communication*, vol. 3, pp. 1493–1497, 1997.
- [7] M. Mushkin and I. Bar-David, "Capacity and coding for the Gilbert-Elliot channel," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 35, no. 6, pp. 1277–1290, Nov. 1989.
- [8] R. L. Dobrushin and M. S. Pinsker, "Memory increases transmission capacity," *Probl. Pered. Inform.*, vol. 5, no. 1, pp. 94–95, 1969.
- [9] E. N. Gilbert, "Capacity of a burst-noise channel," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 39, pp. 1253–1266, Sep. 1960.
- [10] E. O. Elliot, "Estimates of error rates for codes on burst-noise channels," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 42, pp. 1977–1997, Sep. 1963.
- [11] B. D. Fritchman, "A binary channel characterization using partitioned markov chains," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 221–227, Apr. 1967.
- [12] R. G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communications*. New York: Wiley, 1968.

- [13] F. Babich, O. Kelly, and G. Lombardi, "Generalized Markov modeling for flat fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 547–551, Apr. 2000.
- [14] L. Zhong, F. Alajaji, and G. Takahara, "A binary communication channel with memory based on a finite queue," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 8, pp. 2815–2840, Aug. 2007.
- [15] L. Wilhelmsson and L. B. Milstein, "On the effect of imperfect interleaving for the Gilbert-Elliott channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, pp. 681–688, May 1999.
- [16] H. Turin and R. van Nobelen, "Hidden Markov modeling of flat fading channels," *IEEE J. Select Areas Commun.*, vol. 16, pp. 1809–1817, Dec. 1998.
- [17] J. Yee and E. Weldon, "Evaluation of the performance of error-correcting codes on a Gilbert channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 2316–2323, Aug. 1995.
- [18] C. Pimentel, T. H. Falk, and L. Lisbôa, "Finite-state markov modeling of correlated rician fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, no. 5, pp. 1491–1501, Sep. 2004.
- [19] H. S. Wang and N. Moayeri, "Finite-state Markov channel - a useful model for radio communication channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 44, no. 1, pp. 163–171, Feb. 1995.
- [20] J. Y. Chouinard, M. Lecours, and G. Y. Delisle, "Estimation of Gilbert's and Fritchman's models parameters using the gradient method for digital mobile radio channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 37, no. 3, pp. 158–166, Aug. 1988.
- [21] F. Swarts and H. C. Ferreira, "Markov characterization of digital fading mobile VHF channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 43, no. 4, pp. 977–985, Nov. 1994.
- [22] V. Y. Y. Chu and P. Sweeney, "Characterizing error sequences of low earth orbit satellite channel and optimization with hybrid-arq schemes," *Proc. Global Telecommun. Conf. 98, Sydney, Australia*, vol. 5, pp. 2930–2935, Nov. 1998.
- [23] A. I. Drukarev and K. P. Yiu, "Performance of error-correcting codes on channels with memory," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 34, no. 6, pp. 513–521, Jun. 1986.
- [24] N. Phamdo and F. Alajaji, "Soft-decision demodulation design for COVQ over white, colored and ISI Gaussian channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 1499–1506, Sep. 2000.
- [25] J. Singh, O. Dabeer, and U. Madhow, "Transceiver design with low-precision analog-to-digital conversion: An information-theoretic perspective," 2008, submitted to *IEEE Trans. Inf. Theory*. Preprint available at arXiv:0804.1172v1.

- [26] F. I. Alajaji and N. C. Phamdo, "Soft-decision COVQ for Rayleigh-fading channels," *IEEE Commun. Letters*, vol. 2, no. 6, pp. 162–164, June 1998.
- [27] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed. Wiley-Interscience, 2006.
- [28] R. M. Gray, *Entropy and Information Theory*. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [29] C. Pimentel and J. V. C. da Rocha, "On the power spectral density of constrained sequences," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 55, no. 3, pp. 409–416, Mar. 2007.
- [30] Y. Chen and C. Tellambura, "Infinite series representation of the trivariate and quadrivariate rayleigh distribution and their applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, no. 12, pp. 2092–2101, Dec. 2005.
- [31] D. K. Hutchenson and D. L. Noneaker, "Improved bounds on the performance of convolutional codes over the correlated rayleigh-fading channel," *Proc. IEEE World Commun. and Networking Conf.*, pp. 599–604, 2008.
- [32] K. S. Miller, "Complex Gaussian processes," *SIAM Review*, vol. 11, no. 4, pp. 544–567, Oct. 1969.
- [33] P. Sadegui, R. A. Kennedy, P. B. Rapajic, and R. Shams, "On finite-state Markov channel modeling of fading channels: Principles and applications," Aug. 2007.
- [34] C. Tan and N. C. Beaulieu, "On first-order Markov modeling for the Rayleigh fading channel," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 2032–2040, Dec. 2000.
- [35] L. Zhong, F. Alajaji, and G. Takahara, "A model for correlated rician fading channels based on a finite queue," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 1, pp. 79–89, Jan. 2008.
- [36] W. Kumwilaisak, C. Kuo, and D. Wu, "Fading channel modeling via variable-length Markov chain technique," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 1338–1358, May 2008.
- [37] A. E. Drougas, A. D. Panagopoulos, and P. G. Cottis, "Stochastic verification of the first-order Markovian assumption of rain attenuation for satellite channel dynamic modeling," *IEEE Commun. Letters*, vol. 12, pp. 663–665, Sep. 2008.
- [38] R. P. Ramos, "Análise de desempenho de códigos de bloco em canais com memória usando uma técnica enumerativa," *Dissertação de Mestrado*, Fev. 2001, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFPE.

- [39] C. Pimentel and I. F. Blake, "Concatenated coding performance for FSK modulation on time-correlated Rician fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 12, pp. 1610–1618, 1998.
- [40] R. P. Ramos and C. Pimentel, "Análise de desempenho de códigos de bloco em canais de estados finitos entrelaçados," *Proc. IX Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica, João Pessoa, PB*, pp. 405–499, Ago. 2000.
- [41] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile-radio reception," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957–1000, 1968.
- [42] J. Garcia-Frias, "Decoding of low-density parity-check codes over finite-state binary markov channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, pp. 1840–1843, Nov. 2004.
- [43] A. W. Eckford, F. R. Kschischang, and S. Pasupathy, "Analysis of low-density parity check codes for the Gilbert-Elliott channels," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 51, pp. 3872–3889, Nov. 2005.
- [44] T. Li and O. M. Collins, "A successive decoding strategy for channels with memory," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, pp. 628–646, Feb. 2007.

SOBRE O AUTOR



O autor nasceu em Recife, Pernambuco, no dia 1º de agosto de 1982. Concluiu o curso Técnico em Eletrônica em julho de 2001 no Centro Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco. Em agosto de 2005, formou-se em Engenharia Elétrica, modalidade Eletrônica, pela Escola Politécnica da Universidade de Pernambuco.

Ja atuou na Empresa Brasileira de Telecomunicações (Embratel) e na Telemar Norte Leste. Desde fevereiro de 2005, atua na Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) onde, atualmente, ocupa o cargo de Especialista em Regulação de Serviços Públicos de Telecomunicações. Entre suas áreas de interesse estão comunicação digital e processamento de

sinais.

Endereço: SAUS, Qd. 6, Bl. E, 6º andar, ala sul

CEP:70070-940 Brasília-DF

e-mail: imlm@click21.com.br

Esta dissertação foi diagramada usando L^AT_EX 2_ε¹ pelo autor.

¹L^AT_EX 2_ε é uma extensão do L^AT_EX. L^AT_EX é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema T_EX, que foi desenvolvido por Donald E. Knuth. T_EX é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática (A_MS). O estilo usado na formatação desta dissertação foi escrito por Dinesh Das, Universidade do Texas. Modificado em 2001 por Renato José de Sobral Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, e em 2005 por André Leite Wanderley.