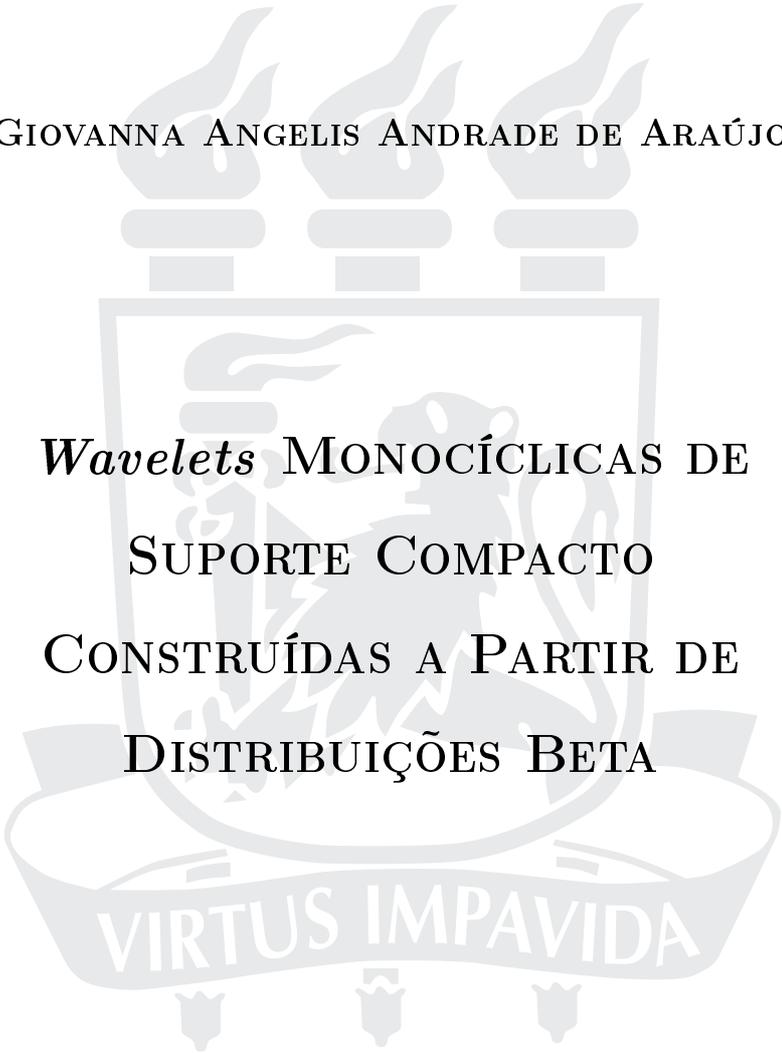


UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GIOVANNA ANGELIS ANDRADE DE ARAÚJO



*Wavelets* MONOCÍCLICAS DE  
SUPORTE COMPACTO  
CONSTRUÍDAS A PARTIR DE  
DISTRIBUIÇÕES BETA

RECIFE, MARÇO DE 2007.

GIOVANNA ANGELIS ANDRADE DE ARAÚJO

*Wavelets* MONOCÍCLICAS DE  
SUPORTE COMPACTO  
CONSTRUÍDAS A PARTIR DE  
DISTRIBUIÇÕES BETA

**Dissertação** submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Mestre em Engenharia Elétrica**

**ORIENTADOR: PROF. HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, DOCTEUR**

Recife, Março de 2007.

©Giovanna Angelis Andrade de Araújo, 2007

**A663w**

**Araújo, Giovanna Angelis Andrade de**

*Wavelets* monocíclicas de suporte compacto construídas a partir de distribuições beta / Giovanna Angelis Andrade de Araújo. – Recife: O Autor, 2007.

128 f., il., gráfs., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2007.

Inclui bibliografia, apêndices e anexo.

**1. Engenharia Elétrica. 2. Wavelets Beta. 3. Suporte Compacto. 4. Distribuições de Probabilidade. I. Título.**

**621.3 CDD (22.ed.)**

**UFPE/BCTG/2007-69**



**Universidade Federal de Pernambuco**

**Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE  
TESE DE MESTRADO ACADÊMICO DE

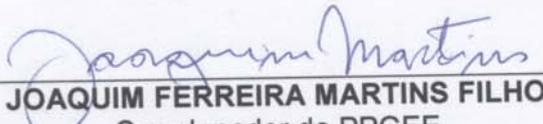
**GIOVANNA ANGELIS ANDRADE DE ARAÚJO**

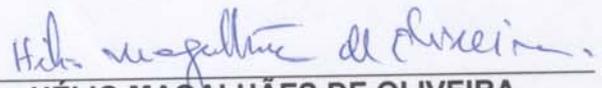
TÍTULO

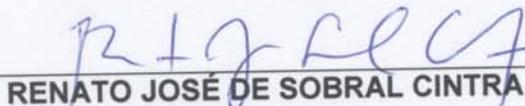
**“WAVELETS MONOCÍCLICAS DESUORTE COMPACTO  
CONSTRUÍDAS A PARTIR DE DISTRIBUIÇÕES BETA”**

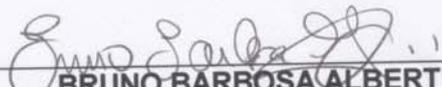
A comissão examinadora composta pelos professores:  
HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA, DES/UFPE, BRUNO BARBOSA  
ALBERT, DEE/UFPB e RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA,  
DE/UFPE, sob a presidência do primeiro, consideram a candidata  
**GIOVANNA ANGELIS ANDRADE DE ARAÚJO APROVADA.**

Recife, 19 de março de 2007.

  
\_\_\_\_\_  
JOAQUIM FERREIRA MARTINS FILHO  
Coordenador do PPGEE

  
\_\_\_\_\_  
HÉLIO MAGALHÃES DE OLIVEIRA  
Orientador e Membro Titular Interno

  
\_\_\_\_\_  
RENATO JOSÉ DE SOBRAL CINTRA  
Membro Titular Externo

  
\_\_\_\_\_  
BRUNO BARBOSA ALBERT  
Membro Titular Externo

A São Francisco, quem  
admiro, por seu exemplo  
de vida, dedicação e amor  
sincero.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer a todos que estiveram presentes nestes dias tão difíceis, e que estenderam sua mão e confortaram e me alegraram e confiaram em mim. E especialmente:

A Deus, que foi meu guardião e guia de todas as horas.

Aos professores:

Hélio Magalhães de Oliveira,

Valdemar C. da Rocha, Jr.

Fernando M. Campello de Souza,

Ricardo M. Campello de Souza,

Rafael Dueire Lins,

Milde Maria da Silva Lira,

Ronaldo R. B. de Aquino,

por terem me proporcionado o aprendizado, algo que, para mim, não tem preço.

Ao meu filho:

Wahriman Andrade de Araújo,

por me amar, mesmo na ausência.

Aos meus queridos:

Franklin Sales de Araújo,

Andréa Sousa de Araújo,

José Wilson Alves de Andrade,

pelo carinho e amizade que me dedicaram. E por existirem.

E aos companheiros, colegas de curso que tornaram esta jornada mais prazerosa.

Resumo da Dissertação apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários  
para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica

***Wavelets* MONOCÍCLICAS DE SUPORTE  
COMPACTO CONSTRUÍDAS A PARTIR DE  
DISTRIBUIÇÕES BETA**

**Giovanna Angelis Andrade de Araújo**

`giovanna.angelis@gmail.com`

Março/2007

**Orientador:** Prof. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur

**Área de Concentração:** Comunicações

**Palavras-chaves:** wavelets beta, suporte compacto, distribuições de probabilidade.

**Número de páginas:** 137

## Resumo

Esta dissertação se propõe a investigar a representação de sinais no plano “tempo-frequência” e, mais especificamente, os problemas relativos à resolução de sinais. O princípio da incerteza de Gabor-Heisenberg para sinais e *wavelets* é analisado criteriosamente. Versões de Gnedenko-Kolmogorov do tipo “Teorema Central do Limite” são avaliadas, procurando elucidar sua relevância no contexto da resolução de sinais. Finalmente, o conceito de derivada *Blur* é usado para propor uma nova família de *wavelets* - as *wavelets* beta - construídas a partir de distribuições beta de probabilidade. Essas *wavelets* são atrativas por terem suporte compacto, são monocíclicas, possuem descrição analítica e podem ser consideradas como uma generalização suavizada das *wavelets* de Haar. Sua relevância decorre do Teorema Central do Limite aplicado a *wavelets* de suporte compacto. Campos promissores para aplicação destas *wavelets* são mencionados.

**Palavras chaves:** *wavelets beta, suporte compacto, distribuições de probabilidade.*

Abstract of Dissertation presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering

**COMPACTLY SUPPORTED ONE-CYCLIC *Wavelets*  
DERIVED FROM BETA DISTRIBUTIONS.**

**Giovanna Angelis Andrade de Araújo**

`giovanna.angelis@gmail.com`

Mars/2007

**Supervisor:** Prof. Hélio Magalhães de Oliveira, Docteur

**Area of Concentration:** Communications

**Keywords:** beta wavelets, compact support, distributions.

**Number of pages:** 137

## Abstract

In this thesis is intended to investigate signal representations in the time-frequency plane, and more specifically issues concerning signals resolutions. The Gabor-Heisenberg uncertainty principle for signal and *wavelets* is carefully examined. Gnedenko-Kolmogorov versions of “Central Limit Theorems” are evaluated, so as to enlighten their relevance in the signal resolution framework. Finally, the “blur derivative” concept is applied to derive a new wavelet family - the beta *wavelets* - which are based on beta probability distributions. Such *wavelets* have compact support, they also have close expressions. In fact the proposed *wavelets* are a generalization of Haar *wavelets* after a smoothing process. The central limit theorem applied to wavelets of compact support support their relevance. Finally, potential fields of application for the introduced wavelets are also mentioned.

**Keywords:** *beta wavelets, compact support, distributions.*

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>6</b>
1.1	Histórico . . . . .	6
1.2	<i>Wavelets</i> Contínuas . . . . .	9
1.2.1	Espaço de Funções . . . . .	9
1.2.2	A derivada <i>Blur</i> . . . . .	11
1.2.3	Análise no Plano Tempo-Freqüência . . . . .	14
<b>2</b>	<b>ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO</b>	<b>17</b>
2.1	Bases de <i>Wavelets</i> Ortogonais . . . . .	18
2.2	Aproximação com Multirresolução . . . . .	18
<b>3</b>	<b>TEOREMAS CENTRAIS DO LIMITE</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>A ANÁLISE DA INCERTEZA NA TRANSMISSÃO DE INFORMAÇÃO</b>	<b>46</b>
4.1	Decomposição de um sinal . . . . .	47
4.2	Sinal Complexo . . . . .	49
4.3	Formulação Rigorosa das Relações de Incerteza . . . . .	51
4.4	O Sinal Elementar . . . . .	56
4.5	Sinais Transmitidos em Tempo Mínimo . . . . .	60
<b>5</b>	<b>WAVELETS BETA</b>	<b>64</b>
5.1	Condições de Admissibilidade e Regularidade . . . . .	64
5.1.1	Admissibilidade . . . . .	65
5.1.2	Regularidade . . . . .	65
5.1.3	Operadores Diferenciais Multiescala . . . . .	66
5.2	Preliminares e uma Visão Geral . . . . .	68

5.2.1	Revisando o Teorema Central do Limite . . . . .	70
5.3	<b>WAVELETS Beta: Novas Wavelets de suporte compacto . . . . .</b>	<b>73</b>
5.4	<i>Wavelets</i> Beta de Ordem $N$ . . . . .	77
6	<b>ESTUDO DA RESOLUÇÃO DAS WAVELETS BETA DE 1ª ORDEM</b>	<b>82</b>
6.1	Análise de Resolução . . . . .	82
7	<b>ESTUDO DA PROPRIEDADE DA ORTOGONALIDADE EM <i>Wavelets</i> BETA</b>	<b>86</b>
7.1	Função Escala . . . . .	86
7.2	Ortogonalidade das <i>Wavelets</i> Beta de 1ª Ordem . . . . .	88
8	<b>DISCRETIZAÇÃO DA <i>Wavelet</i> BETA</b>	<b>91</b>
8.1	Discretização da <i>Wavelet</i> Beta por um Sistema Multirresolução Ortogonal . . . . .	91
9	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>95</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>97</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>101</b>
B.1	Momentos . . . . .	101
B.2	Momentos da função Gaussiana . . . . .	102
B.3	Séries de Potências de $A(\omega)$ e $\phi(\omega)$ . . . . .	102
B.4	Convolução de dois pulsos . . . . .	104
B.5	Espectro Periódico em Freqüência . . . . .	104
	<b>Apêndice C</b>	<b>107</b>
C.1	A Desigualdade de Schwartz e Sinais Elementares . . . . .	107
C.2	Sinais Transmitidos em Tempo Mínimo . . . . .	112

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Wavelet de Haar . . . . .	13
1.2	Wavelet de Daubechies-4 . . . . .	13
1.3	Wavelet Chapéu Mexicano . . . . .	13
1.4	Wavelet Beta $\alpha = 5 \beta = 5$ . . . . .	16
1.5	Transformada de Fourier de uma Wavelet Beta $\alpha = 5 \beta = 5$ . . . . .	16
3.1	Pulso Retangular, $n = 1$ . . . . .	26
3.2	Pulso Triangular - aproximação por uma convolução com dois pulsos retangulares - $n = 2$ . . . . .	26
3.3	Pulso Triangular - aproximação de $f(t)$ por uma convolução com três pulsos retangulares - $n = 3$ . . . . .	26
3.4	Componente par e envoltória gaussiano . . . . .	30
3.5	Quando um sinal $f(t)$ tende a uma gaussiana . . . . .	30
3.6	Transformada de Fourier da seqüência de pulsos finita $f_i(t)$ . . . . .	31
3.7	Seqüência de pulsos finitos com envoltória senoidal . . . . .	31
3.8	Transformada de $f_0(t)$ e de $f_{i0}(t)$ para valores truncados de $ \omega  = \frac{\pi}{T}$ . .	31
3.9	Sinal $f_0(t)$ finito, e o resultado da convolução de $f_{i0}(t)$ , que tende a uma curva finita, mas quando $i \rightarrow \infty$ tenderá a uma curva gaussiana . . . .	32
3.10	Seqüência de pulsos equidistantes finitos, com envoltória gaussiana. . .	32
3.11	Transformada de Fourier de $f_0(t)$ . . . . .	32
3.12	Função densidade constituída por dois pulsos gaussianos. . . . .	33
3.13	Resultado da convolução de $f_i(t)$ , resultando numa seqüência de pulsos finitos com envelope gaussiano. . . . .	33
3.14	Função densidade constituída por dois pulsos gaussianos. . . . .	34
3.15	Transformada de Fourier de $ F_i(\omega) $ e suas aproximações por Gauss e Poisson. . . . .	34

3.18	Aproximação da convolução por uma distribuição beta . . . . .	44
4.1	Diagrama de informação no plano tempo $\times$ frequência. . . . .	47
4.2	Envelope de um sinal elementar . . . . .	57
4.3	Representação do sinal por uma matrix de amplitude complexa . . . . .	58
4.4	Sinal tipo senoidal . . . . .	60
4.5	Sinal tipo cossenoidal . . . . .	60
4.6	Espectro de um sinal que pode ser transmitido no menor tempo possível por um filtro passa-banda; e o sinal no domínio do tempo. . . . .	63
5.1	Magnitude do espectro $\Psi_{BETA}(\omega)$ para algumas <i>wavelets</i> beta, $ \Psi_{BETA}(\nu \alpha, \beta)  \times$ $\nu$ para: a) <i>Wavelets</i> beta simétricas $\alpha = \beta = 3$ (sólida), $\alpha = \beta =$ $4$ (pontilhada) and $\alpha = \beta = 5$ (tracejada); b) <i>Wavelets</i> beta assimétricas $\alpha = 3, \beta = 4$ (solida) e $\alpha = 3, \beta = 5$ (pontilhada). Em ambos os gráficos o eixo das frequências é normalizado $\nu = \omega T(\alpha, \beta)$ . . . . .	78
5.2	Função escala e <i>wavelet</i> para diversos parâmetros:a) $\alpha = 2, \beta = 3$ b) $\alpha = \beta = 3$ c) $\alpha = 3, \beta = 4$ d) $\alpha = 4, \beta = 3$ e) $\alpha = \beta = 5$ f) $\alpha = 3, \beta = 7$ g) $\alpha = 5, \beta = 17$ . . . . .	79
5.3	<i>Wavelets</i> beta de ordens mais altas para diversos parâmetros: a) $N = 3,$ $\alpha = 5, \beta = 7$ ; b) $N = 5, \alpha = 8, \beta = 11$ . . . . .	80
5.4	<i>Wavelets</i> Beta visualizadas no <i>Matlab</i> <sup>TM</sup> usando o comando <i>wavemenu</i> . O sinal analisado é um sinal FSK. Esta decomposição wavelet pode ser usado para implementar um eficiente discriminador de frequências. . . . .	81
6.1	Espectro da <i>Wavelet</i> mãe de Haar . . . . .	84
6.2	Espectro da <i>Wavelet</i> mãe Beta $\alpha = 5 \beta = 5$ . . . . .	84

# LISTA DE TABELAS

5.1	Versões diferentes do Teorema Central do Limite: Distribuições Ilimitadas, Distribuições Causais e Distribuições de Probabilidade de Suporte Compacto. . . . .	71
6.1	Resolução das <i>Wavelets</i> Haar e Beta . . . . .	85

# 1 | INTRODUÇÃO

## 1.1 Histórico

A primeira menção sobre *wavelets* aparece no apêndice da tese de doutorado de Alfred Haar em 1909 [4], onde se fala estritamente em análise escalonada. As *wavelets* de Haar, embora de suporte compacto (anulam-se completamente fora de um intervalo finito de tempo), nem ao menos são continuamente diferenciáveis [1]. Estas *wavelets* permaneceram no anonimato por muitos anos e por um período relativamente longo, elas continuaram a constituir a única base ortonormal de *wavelets* conhecida. [3]

No início da década de 80, Alex Grossman e Jean Morlet introduziram as *wavelets* tal e qual são conhecidas atualmente. Yves Meyer [26] construiu uma das primeiras *wavelets* não triviais e suaves, ou seja, continuamente diferenciáveis, embora não fossem *wavelets* de suporte compacto. Em 1985, Stéphane Mallat [25] estabeleceu a ligação desta teoria com o processamento digital de sinais, quando usou as *wavelets* de Meyer em seus trabalhos, para verificar o incremento de detalhes em uma imagem analisada para sair de uma versão grosseira da imagem para uma imagem de maior resolução, em seus diferentes níveis de detalhes (Análise da Resolução Múltipla, ou MRA) Mal-

lat usou os filtros espelhados em quadratura e algoritmos piramidais. Na década de 90 Ingrid Daubechies [1] construiu o mais usado conjunto de *wavelets* ortogonais de suporte compacto . Estas *wavelets* são obtidas numericamente e sua função de escala não possui os momentos nulos, estes trabalhos constituem os alicerces das aplicações atuais de *wavelets*. Em 1989, Coifman sugeriu a Daubechies a construção de uma base ortonormal de *wavelets* na qual não somente a wavelet, como também a função de escala, tivessem momentos nulos, assim surgiram as *coiflets*, foram chamadas assim estas *wavelets* desenvolvidas por Daubechies em homenagem ao seu idealizador intelectual [3]. A vantagem de uma *wavelet* possuir vários momentos nulos nos conduz a uma alta taxa compressão, posto que os coeficientes de *wavelets* das escalas mais finas de uma função são essencialmente nulos onde a função é suave.

As *wavelets* oferecem uma técnica elegante na representação dos níveis de detalhes presentes nos sinais. Elas constituem uma ferramenta matemática para decompor uma função hierarquicamente, possibilitando que uma função seja descrita por uma parte grosseira, e a outra em que apresentem os detalhes — desde os menos delicados aos mais finos.

Esse instrumento vem para suprir uma das grandes desvantagens da análise de Fourier (espectro), que provém do fato que ela apresenta apenas resolução no domínio freqüencial e não no tempo. Isto significa que, embora capaz de determinar o conteúdo de freqüências presentes em um sinal, não há noção do “quando”, ou seja, em qual intervalo de tempo elas ocorrem [2]. A Transformada em tempo curto de Fourier (*STFT*) melhora isso mais ainda fornece um comportamento médio no domínio da freqüência das componentes presentes na janela da transformada. A partir desse entendimento, podemos encarar as *wavelets* como uma ferramenta matemática para se representar o incremento de informações entre duas escalas ou resoluções sucessivas [3]. Uma larga

variedade de *wavelets* pode ser usada, cada uma delas apresentando diferentes compromissos entre o grau de compacticidade da “base” de funções e o grau de suavidade das formas de onda [1].

A Transformada de Wavelet constitui uma ferramenta moderna que possibilita a unificação de um grande número de técnicas de análise e processamento de sinais, incluindo por exemplo a Série de Fourier, a Transformada de Fourier, a Transformada de Gabor em Tempo Curto, os Espectrogramas, como casos particulares, permitindo a análise de sinais não-estacionários, incluindo aqueles de banda larga [1].

Devido suas propriedades particulares, as *wavelets* são aplicáveis em diversas áreas que variam desde a Matemática, grupo de re-normalização em Mecânica Estatística, problemas de Computação Gráfica e também englobam a análise de sinais na Biologia, Medicina, Astronomia, Acústica, Engenharia Nuclear, Neurofisiologia, Música, Ressonância Magnética, identificação de vozes, optica, fenômenos com turbulências, previsão de terremotos, radar e sonar, estudo de padrões em fractais, visão humana e computacional, análise multirresolução para visão artificial em computadores [3]. O emprego de *wavelets* em processamento de voz tem se revelado particularmente atrativo, especialmente devido ao fato que os modelos mais apropriados para a resposta de frequências da cóclea do ouvido humano empregaram filtros com fator de qualidade constante (*constant-Q analysis*) [1].

As *wavelets* constituem hoje uma das ferramentas mais potentes do Processamento Digital de Sinais (PDS). De um modo geral, o PDS inclui as seguintes operações: transdução de um fenômeno físico (ex. luz refletida, movimento do ar, contração muscular...) em um sinal elétrico; armazenamento e manipulação do sinal visando extrair ou codificar informações, e interpretações relativas à informação extraída. É exatamente nas últimas etapas que as *wavelets* relevam-se particularmente valiosas [1].

## 1.2 Wavelets Contínuas

Por que *wavelets*? Em que esta ferramenta pode ser mais potente que a análise espectral clássica de Fourier? De onde surgiram as *wavelets*? Há vantagens no uso da análise *wavelet* ao invés da análise de Fourier, por exemplo, em situações em que os sinais contêm descontinuidades e/ou variações abruptas e curtas (e.g., tipo centelha-mento). Uma das características centrais é ser bem adaptada a sinais de curta duração e com variações muito rápidas, tais como sinais transitórios, sísmicos, etc. [1].

Algumas dessas perguntas já foram respondidas no nosso breve histórico, outras serão oportunamente respondidas no decorrer do trabalho.

Em virtude de algumas limitações da análise de Fourier para analisar de sinais no domínio freqüencial, não é possível conhecer em qual tempo uma determinada componente de freqüência ocorreu.

Foram propostas diversas estratégias para solucionar este problema [34], entre elas a mais difundida é aquela proposta por Gabor, que introduziu a “Transformada de Fourier para Tempo Curto” (STFT), onde o sinal é avaliado a partir de uma janela de curta duração de tempo, na qual o sinal pode ser considerado aproximadamente estacionário.

$$\text{STFT}(\tau, \omega) \triangleq \int_a^b f(t) \cdot J(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (1.1)$$

Aqui,  $J(\cdot)$  representa uma forma de “janelamento”, deslocada para o instante  $\tau$ .

Ao usar-se a Transformada de *Wavelets* uma janela  $J(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t}$  é adotada, onde a janela agora é a própria *wavelet*.

### 1.2.1 Espaço de Funções

Existem algumas condições para que um sinal seja considerado *wavelet*.

O espaço de funções  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  é aquele das funções  $f$ , definidas em  $\mathbb{R}$ , assumindo valores em  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ , tais que haja uma norma:

$$\|f\|_p \triangleq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (1.2)$$

Para o caso particular de  $p = 2$ , define-se o produto interno de funções  $f$  e  $g$ , onde  $g^*$  é o conjugado de  $g$ , ou seja

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g^*(t) dt,$$

resultando em

$$\|f\|_2 \triangleq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

- Espaço  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow f \in \mathcal{L}^1$ , traduz funções que são as funções integráveis e absolutamente integráveis.

Assim temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty \quad (1.4)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (1.5)$$

- Espaço  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow f \in \mathcal{L}^2$ , traduz funções que são as funções quadrado integráveis e de energia finita.

Estas funções são descritas como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt < \infty, \quad (1.6)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty. \quad (1.7)$$

A seguir estudar-se-á as condições que atendidas por um sinal que possuam suporte compacto.

### Definição 1.1 *Sinais de Suporte Compacto*

*Diz-se que um sinal é de suporte compacto se existe um intervalo fechado e limitado fora do qual  $f(t) = 0$ .*

Temos também a definição das condições que são atendidas por todos os sinais que são *wavelets*.

### Definição 1.2 *Wavelets*

*Uma wavelet é uma função  $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  tal que a família de funções*

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), \quad (1.8)$$

*em que  $j$  e  $k$  são inteiros arbitrários, constitui uma base ortogonal para  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Para cada wavelet, existe uma função escala apropriada.*

Se  $a$  e  $b$  forem finitos,  $f \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$ , segue-se então da igualdade de Cauchy-Schwartz (1.9) que:

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty, \quad (1.9)$$

#### 1.2.2 A derivada *Blur*

A derivada *Blur*, também conhecida por transformada de *wavelet*, elimina a janela de Gabor na base de sinais, ou seja, e incorpora-se a janela da equação (1.1) como supra mencionado. Segue a definição da transformada *wavelet*

$$CWT(s, \tau) \triangleq \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi^*\left(\frac{t - \tau}{s}\right) dt. \quad (1.10)$$

O sinal será comprimido no domínio da transformada *wavelet* sempre que a constante  $s$  for  $s < 1$  e expandido sempre que  $s > 1$ . A transformada de *wavelet* não tem apenas uma função para ser usada como base da transformação, o que acontece com a transformada de Fourier onde a função usada é  $\{e^{i\omega t}\}$ , as funções de base podem ser quaisquer desde que os critérios de ortogonalidade sejam respeitados e que  $s \geq 2$ . Se  $s = 1$ , teríamos o mesmo espaço de resoluções, como  $s \in \mathbb{N}_*$  então para que a mudança de resolução ocorra  $s \geq 2$ , usualmente na literatura encontramos  $s = 2$  para que o “passo” da mudança de um espaço para outro não perca os detalhes. Para os sinais *wavelets*, de acordo com a definição destes sinais.

$$\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = 0.$$

Quando  $\langle f(t), g(t) \rangle = 0$ , então estas funções são ditas serem ortogonais.

A seguir temos alguns exemplos de *wavelets* clássicas de suporte compacto como por exemplo *wavelet* de Haar, que é ortogonal mas não é suave e a *wavelet* de Daubechies que apesar de também ser ortogonal não é suave, também não possui função analítica que a represente, e por fim a *wavelet* Chapéu Mexicano que embora ortogonal e suave tem de suporte infinito.

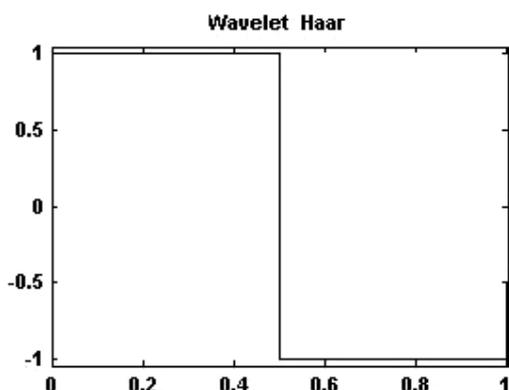


Figura 1.1: Wavelet *de Haar*

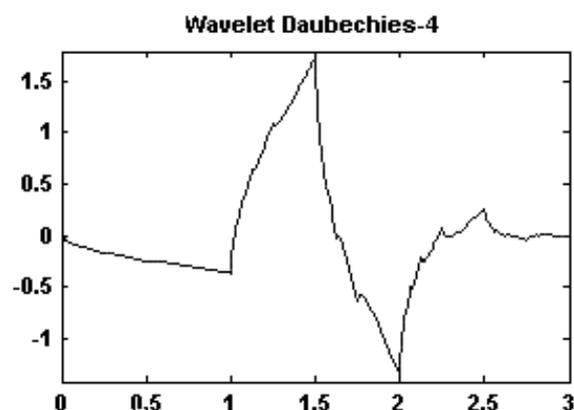


Figura 1.2: Wavelet *de Daubechies-4*

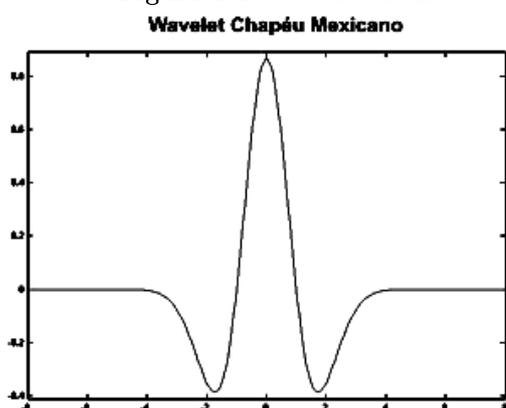


Figura 1.3: Wavelet *Chapéu Mexicano*

Da derivada *Blur* vamos provar nos capítulos mais adiante que a é possível a partir de uma versão grosseira do sinal obtido pela ponderação deste sinal com uma distribuição de probabilidade gerar *wavelets*. assim é possível definir *wavelet* beta como

**Definição 1.3 Wavelets *Beta*** São wavelets *suaves* obtidas pela derivada da distribuição beta com  $n > 2$ , onde este limite inferior foi constatado por inspeção, como será discutido mais adiante com da seguinte forma, para que estas wavelets sejam *suaves*. Seja  $\psi(t)$  uma wavelet e  $\phi(t)$  uma distribuição de probabilidade normalizada associada a esta wavelet.

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n \phi(t)}{dt^n}. \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Análise no Plano Tempo-Freqüência

A transformada de Fourier tem uma significativa interpretação na análise de sinais, sendo relevante na maioria das muitas aplicações. Uma função  $f \in \mathcal{L}^2$  é considerada um sinal analógico de energia finita. É interessante observar que embora não seja um sinal analógico convencional, a distribuição de probabilidade beta se comporta como um destes sinais, ao menos no que diz respeito a continuidade e energia, por isso possui transformada. A transformada desses sinais é denotada por

$$\mathcal{F}(w) = \mathfrak{F}[f(t)].$$

Considere que a transformada clássica de Fourier onde  $\mathfrak{F}$  é o operador transformada de Fourier [2], que conduz ao espectro desse sinal. Na análise de sinais, os sinais analógicos são definidos no domínio do tempo e em seu espectro no domínio da freqüência. Neste trabalho considerar-se-á o tempo e freqüência como variáveis reais.

Em que  $\mathcal{F}(w)$  é dada pela definição da transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cdot f(t) dt.$$

Uma identidade relevante é a preservação do produto interno após uma mudança de domínio [2]. A seguir temos um produto interno entre duas funções no domínio do tempo  $f$  e  $g$  e a preservação deste no domínio da freqüência com uma constante de ajuste,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \langle \mathcal{F}, \mathcal{G} \rangle .$$

Como conseqüência, vê-se que a energia de um sinal analógico é igual ao seu conteúdo avaliado no domínio espectral com um ajuste de  $\frac{1}{2\pi}$ .

Mostra-se que a norma discutida em 1.3 é preservada, e

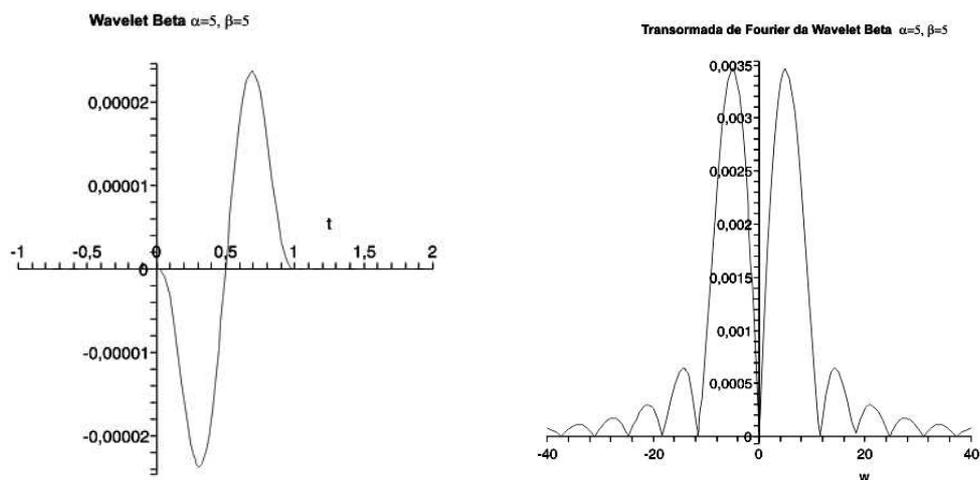
$$\|f\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}(w)\|^2,$$

Observe que a transformada de Fourier é que uma transformada em que  $CWT(s, \tau)$  de  $f(t)$  (veja Equação (1.10)) em que  $\psi(t) = e^{j\omega t}$ . Sendo assim a transformada *wavelet* pode ser considerada como uma forma mais geral da transformada de Fourier. No entanto, a transformada de Fourier perde as informações relativas a localização temporal, sobre em que instante uma dada freqüência ocorreu num dado sinal, ela também utiliza informações passadas e futuras do sinal, para analisá-lo em uma única freqüência.

Sabe-se que a freqüência de um sinal é diretamente proporcional ao tamanho de seu ciclo [2], e que para obter a informação sobre altas freqüências deve-se usar o intervalo de tempo mais curto para a informação ser mais precisa, do que para baixas freqüências, onde o intervalo de tempo deve ser longo. Pois o que a análise de Fourier fornece é uma média do comportamento das freqüências presentes no sinal, assim nota-se que para adequação da informação é preciso usar janelas tempo-freqüência flexível, que sejam estreitas em altas freqüências e largas em baixas freqüências.

A transformada *wavelet* definida acima em 1.10 possui precisamente essas propriedades. As figuras que seguem são da uma *wavelet* beta, e seu espectro (veja o capítulo 5):

Este trabalho contém nos capítulos seguintes uma revisão sobre análise multirresolução, formulação das *wavelets* beta baseado no teorema do limite central e um estudo de resolução baseado nos estudos de Gabor. Também é realizado um estudo sobre ortogonalidade destas *wavelets* e encontra-se a respectiva função escala. Por fim é su-



**Figura 1.4:** Wavelet Beta  $\alpha = 5 \beta = 5$  **Figura 1.5:** Transformada de Fourier de uma Wavelet Beta  $\alpha = 5 \beta = 5$

gerida uma proposta de discretização baseada em filtros para estes sinais proposta por C.B.Amar em seu artigo “Beta wavelets. Synthesis and Application to Lossy Image Compression.”[23].

# 2 ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO

Descreveu-se anteriormente que é possível construir *wavelets* ao escalonar e deslocar qualquer função ou sinal, desde que atenda as condições de admissibilidade, considere uma família de *wavelets* onde  $s = 2^j$  e  $j \in \mathbb{Z}$ , então

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left( \frac{t - 2^j n}{\sqrt{2^j}} \right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}. \quad (2.1)$$

é uma base ortogonal em  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Ocultos nessa expressão estão vastos estudos dentro da análise harmônica [8] e do processamento de sinais [27]. Observe que poderia-se escolher qualquer escala em que  $s \in \mathbb{N}$  e  $s \geq 2$ , mas escalas maiores representam passos maiores ao passar de uma aproximação de uma resolução para outra.

*Wavelets* em que  $a = 2$  que são dilatadas de  $2^j$  trazem variações na resolução do sinal de  $2^{-j}$ . É importante lembrar que  $a \in \{\mathbb{N}_* > 1\}$ , mas para que a mudança de uma resolução para outra não se perca em detalhes, é importante que o “passo” de mudança de um espaço para o outro seja o menor possível. A construção dessas bases estão relacionadas às aproximações multirresolução do sinal. Segue uma associação entre as bases *wavelets* e os filtros espelhados, que são usados em bancos de filtros multirresolução [24]. Esses bancos de filtros implementam as transformadas rápidas

*wavelets* que requerem  $O(N)$  operações para sinais de tamanho  $N$ , em que  $O(\cdot)$  é o *big O* de Landou [37]. O projeto de filtros *wavelets* espelhados também gera uma base ortogonal e novas classes de *wavelets* ortogonais, incluindo as *wavelets* regulares de suporte compacto. No espaço multidimensional, as bases *wavelets* em  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  são construídas separadamente como o produto de funções de uma variável.

## 2.1 Bases de *Wavelets* Ortogonais

A busca por bases de *wavelets* ortogonais conduz ao estudo de aproximações em multirresolução. Para  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , a soma parcial dos coeficientes  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$  pode ser interpretada como a diferença entre as diferenças em duas escalas de resolução  $2^{-j+1}$  e  $2^j$ . O que a multirresolução faz é calcular a aproximação do sinal em várias escalas de resolução com projeção ortogonal em diferentes espaços  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Ver-se-á adiante que as aproximações multirresolução são inteiramente caracterizadas por filtros discretos que governam a perda de “informação” na passagem de uma escala de menor resolução para outra de maior resolução. Estes filtros oferecem algoritmos simples para projetar e sintetizar bases de *wavelets* ortogonais [24].

## 2.2 Aproximação com Multirresolução

Usando a técnica de análise de multirresolução é possível escolher apenas os detalhes mais relevantes para um determinado processo sob investigação.

A aproximação de uma função  $f$  em uma resolução  $2^{-j}$  é a descrição de  $f$  em um reticulado discreto que dá a média de  $f$  nas vizinhanças de  $2^j$  [24]. Assim a multirresolução é um reticulado de aproximações das amostras do sinal em que os espaços de sinais com menos detalhes fazem parte da coleção dos sinais com maiores detalhes. Formalmente isto significa que a representação de uma função em uma escala

$2^{-j}$  é a projeção ortogonal de um sinal em um espaço  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Isto mostra que a análise multirresolução pode ser caracterizada completamente por um filtro discreto que governa a mudança de resoluções. Estes filtros discretos nada mais são do que um procedimento para projetar e sintetizar bases *wavelets* ortogonais. O espaço  $V_j$  reagrupa todas as possíveis aproximações da resolução  $2^{-j}$ . A projeção ortogonal da função  $f$  é a função  $f_j \in V_j$  que minimiza  $\|f - f_j\|$ . A seguinte definição é introduzida por Mallat [25] e Meyer [26], na qual estão especificados as propriedades dos espaços multirresolução. Destaca-se que a resolução  $2^j$  é a resolução inversa a  $2^{-j}$ . Segue a definição formal de multirresolução.

**Definição 2.1** (*Multirresoluções*) *Uma seqüência  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespaços fechados em  $L^2(\mathbb{R})$  constitui um espaço de multirresolução se as seguintes 5 propriedades forem satisfeitas:*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j, \quad (2.2)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j, \quad (2.3)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}, \quad (2.4)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \quad (2.5)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{fecho} \left( \bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j \right) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}). \quad (2.6)$$

*Assim existe um  $\phi$  tal que  $\{\phi(t - n)\}, n \in \mathbb{Z}$  é uma base de Riesz de  $V_0$  ( veja proposição a seguir, para entende o que são as bases de Riesz).*

Segue-se uma explanação intuitiva dessas propriedades matemáticas. A propriedade (2.2) significa que  $V_j$  é invariante a uma translação proporcional a escala de  $2^j$ . Como ver-se-á adiante, esse espaço pode ser interpretado como um reticulado com intervalos de  $2^{-j}$ , que representa a aproximação do sinal na resolução  $2^{-j}$ . A propriedade (2.3) na verdade representa as propriedades de causalidade, as quais garantem que uma aproximação na resolução  $2^{-j}$  contém toda a informação necessária para fazer uma aproximação grosseira dos sinais que estejam compreendidos na resolução  $2^{-j-1}$ . A dilatação de uma função em  $V_j$  em passos de 2 juntamente com a Equação (2.4) fornece uma aproximação mais grosseira que na resolução  $2^{-j-1}$ . Assim quando a resolução  $2^{-j}$  vai a zero como em (2.5) implica que perdem-se todos os detalhes do sinal assim a projeção destes sinais nas funções de base do espaço  $V_j$  será

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \| P_{V_j} f \| = 0. \quad (2.7)$$

Por outro lado, quando a resolução  $2^{-j}$  vai a infinito, a propriedade (2.6) impõe que o sinal de aproximação converge para o sinal original, ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \| f - P_{V_j} f \| = 0. \quad (2.8)$$

Quando a resolução  $2^{-j}$  aumenta, o erro de aproximação  $\| f - P_{V_j} f \|$  decai, o que depende sobretudo da regularidade de  $f$ . Na referência [24], descreve-se a relação desse erro com a regularidade uniforme de Lipschitz para  $f$ .

A existência de uma base de Riesz [24]  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  para  $V_0$  permite o uso do teorema da discretização. Assim, a função  $\phi$  pode ser interpretada como uma célula de resolução. Assim,  $A > 0$  e  $B > 0$  tal que qualquer função qualquer  $f \in V_0$  pode ser unicamente decomposta em

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\theta(t-n), \quad (2.9)$$

com

$$A\|f(t)\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a[n]|^2 \leq B\|f(t)\|^2. \quad (2.10)$$

Essa “regularidade” de energia garante que as expansões do sinal em uma base  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  são estáveis. Usando as propriedades de dilatação do sinal (2.4) e a expansão em (2.9), pode-se verificar que a família  $\{2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz de  $V_j$  com os mesmos limites de vizinhança  $A$  e  $B$  para todas as escalas  $2^{-j}$ . A proposição que se segue constitui uma condição necessária e suficiente para que  $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  seja uma base de Riesz.

**Proposição 2.1** *Uma família  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz para o espaço  $V_0$  se e somente se gera esse espaço e existem  $A > 0$  e  $B > 0$  tais que*

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad \frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega - 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}. \quad (2.11)$$

*Demonstração:* Qualquer  $f \in V_0$  pode ser decomposto como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\phi(t-n). \quad (2.12)$$

A transformada de Fourier desta equação implica em

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{A}(\omega)\Phi(\omega), \quad (2.13)$$

em que  $\mathcal{A}(\omega)$  é a transformada de Fourier  $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]e^{-jn\omega}$  e  $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\phi(t)\}$ .

A norma de  $f$  pode então ser escrita como

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathcal{A}(\omega + 2k\pi)|^2 |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{A}(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

pois  $\mathcal{A}(\omega)$  é  $\pi$  periódica. Assim, a família  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é uma base de Riesz se e somente se

$$A\|f\|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathcal{A}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(n)|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{2.15}$$

Se as funções  $\phi$  satisfizerem a Equação (2.11), então a Equação (2.15) pode ser derivada da Equação (2.14). A independência linear de  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é consequência do fato que (2.15) é válida para qualquer  $a[n]$  que satisfaça (2.12). Se  $f = 0$ , então necessariamente  $a[n] = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . A família expressa por  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é então uma base de Riesz.

A consequência é que se  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  constitui uma base de Riesz, então a Equação (2.15) é válida para qualquer  $a[n] \in l^2(\mathbb{Z})$ . Se ambas as fronteiras, superior e inferior, da expressão (2.11) não forem satisfeitas para todos  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , então pode-se existir uma função  $\mathcal{A}(\omega)$  não nula e de período  $2\pi$ , cujo suporte corresponde as frequências que são verificadas na Equação (2.11) Assim, a dedução das Equações (2.14) e (2.15) não será válida para  $a[n]$ , o que é contra a hipótese de  $a[n]$  ser uma base de Riesz. ■

# 3 | TEOREMAS CENTRAIS DO LIMITE

O Teorema Central do Limite é um teorema bastante conhecido na literatura da matemática [22], baseado em conceitos probabilísticos e em provas matemáticas. Aqui serão tratados tanto os casos discretos como o caso contínuo, que apresentam dois resultados diferentes. Na seqüência, será mostrado, por meio da avaliação do Teorema Central do Limite, como usá-lo para aproximar uma convolução de  $n$  funções. O teorema garante que, se as funções densidades de probabilidade  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  forem contínuas, então o produto de suas transformadas de Fourier, sob certas condições,

$$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \cdots F_n(\omega)$$

então  $F(\omega)$  tende a uma função Gaussiana quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é

$$F(\omega) \sim e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} - j\eta\omega}, \quad (3.1)$$

em que a variância  $\sigma$  e a média ou primeiro momento  $\eta$  são dados por

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n, \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Onde  $\eta_i$  são os primeiros momento de  $F_1(\omega), F_2(\omega), \dots$  respectivamente. E  $\sigma_i$  são os segundos momentos ou variâncias de  $f_i(t)$  para  $\forall i \in \mathbb{N}$ .

Assim da Equação (3.1), usando o limite para argumentar o que é conhecido na literatura como Teorema de Helly [38], concluimos que a transformada inversa de  $F(\omega)$  é dada por

$$f(t) = f_1(t) * \dots * f_n(t),\tag{3.3}$$

também tende a um pulso Gaussiano quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$f(t) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\eta)^2}{2\sigma^2}}\tag{3.4}$$

que é a inversa do limite de  $F(\omega)$ . Duas condições que se seguem garantem a validade da Equação (3.1), que apesar de não serem as mais gerais, cobrem uma vasta quantidade de aplicações. As condições são:

- O terceiro momento das funções  $f_i(t)$  ser finito, e para todo  $i$  ser menor que uma constante  $C$  arbitrária.
- A soma das dispersões tenderem a infinito com  $n$ , isto é

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\tag{3.5}$$

A primeira condição é satisfeita se as funções  $f_i(t)$  forem nulas além de  $|t| = T$ . A segunda condição é verdadeira se as dispersões forem maior que uma constante positiva. Isso é verdade, por exemplo, se todas as funções  $f_i(t)$  forem iguais.

Por razões ilustrativas, para  $\omega \neq 0$ , a função definida na Equação (3.1) tende a zero quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Por esta razão, na formulação mais comum do teorema, a mudança de variável  $y = \sigma\omega$  é introduzida e toma a seguinte notação:

$$F\left(\frac{y}{\sigma}\right) \sim e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{jny}{\sigma}}. \quad (3.6)$$

**Exemplo 3.1** Pulso Retangular. *Antes de provar o teorema, usa-se um exemplo simples de uma função  $f(t)$  que tende rapidamente a um valor assintótico. Por simplicidade, é assumido que  $f_i(t)$  tem a forma de um pulso retangular, como na Figura 3.1.*

A Equação

$$f_1(t) = \dots = f_n(t) = U(t) - U(t - 1), \quad (3.7)$$

descreve esse pulso em que  $U(t)$  é o degrau unitário de Heaviside.

Expandindo  $(1 - e^{j\omega})^n$  e considerando o fato que  $V^n(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $U_n(t)$ . Assim é mostra-se que a função  $f(t)$  obtida pela convolução na Equação (3.3) resulta em

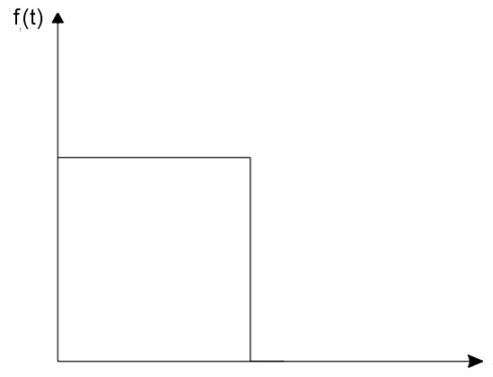
$$f(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k U_{-n}(t - k), \quad (3.8)$$

Em que

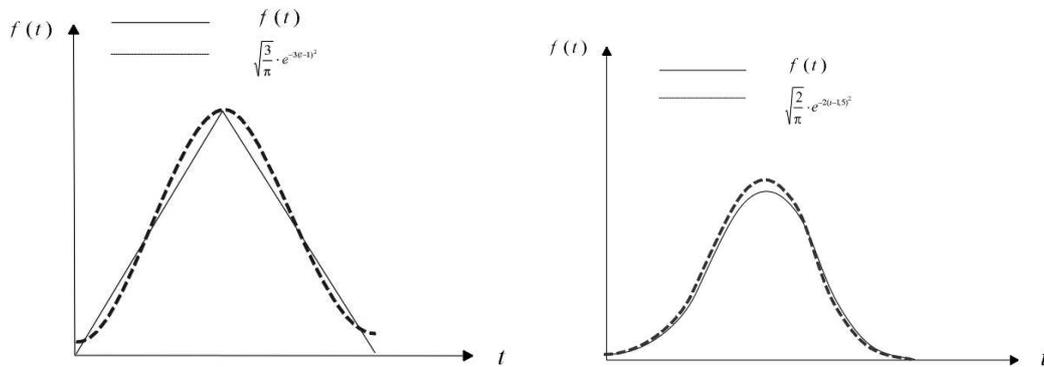
$$U_{-n}(t) = U(t) * \dots * U(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} U(t). \quad (3.9)$$

Seja  $V(\omega)$  a transformada de Fourier da função Degrau Unitário de  $U(t)$ . O teorema dos deslocamentos estabelece que

$$f(t - t_0) \rightarrow F(\omega)e^{j\omega t_0}. \quad (3.10)$$



**Figura 3.1:** Pulso Retangular,  $n = 1$



**Figura 3.2:** Pulso Triangular - aproximação por uma convolução com dois pulsos retangulares -  $n = 2$  **Figura 3.3:** Pulso Triangular - aproximação de  $f(t)$  por uma convolução com três pulsos retangulares -  $n = 3$

Os primeiros e segundos momentos de  $f_i(t)$  são  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  respectivamente, então, partindo do teorema do Momento (Apêndice B), obtém-se

$$\eta_i = \frac{1}{2}, \quad \sigma^2 = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Assim para

$$\begin{aligned} n = 2 & : \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 & \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{1}{6} \\ n = 3 & : \quad \eta = \frac{3}{2} & \sigma^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Assim, as aproximações às curvas Gaussianas correspondentes à Equação (3.8) tem seus parâmetros dados por

$$n = 2 : \sqrt{\frac{3}{\pi}} e^{-3(t-1)^2} \quad n = 3 : \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2(t-1,5)^2},$$

como mostrado nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3. Mesmo para pequenos valores de  $n$ , a versão (3.4) constitui uma boa estimativa de  $f(t)$ .

Voltando para a prova da Equação (3.1). Desde que  $f_i(t)$  não seja um trem de impulsos o espectro de Fourier de  $A_i(\omega)$  é sempre menor que a unidade, para qualquer  $\omega \neq 0$ ,

$$A_i(\omega) < 1 \quad \omega \neq 0 \quad (3.11)$$

Assim sendo, (veja a Figura 3.4) uma constante  $\omega_0$  suficientemente pequena pode ser encontrada tal que

$$A_i(\omega) < A_i(\omega_0) \quad \text{para } |\omega| > \omega_0. \quad (3.12)$$

Agora escolhe-se  $\omega$  tão pequeno, tal que  $A_i(\omega)$  e  $e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$  possam ser aproximadas por séries de Taylor em que os termos com potência  $n \geq 3$  são desprezados e  $A_i(\omega)$  possa ser aproximada por uma parábola no intervalo  $|\omega| < \omega_0$  (veja o apêndice B para entender a representação de  $A(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  em série de potências). Assim depois de uma aproximação chega-se:

$$\left. \begin{aligned} A_i(\omega) &\simeq 1 - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \\ e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} &\simeq 1 - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \end{aligned} \right\} \text{ para } |\omega| < \omega_0. \quad (3.13)$$

É possível verificar das condições acima que é possível satisfazer (3.12) e (3.13) para cada valor de  $i$  com o mesmo valor da constante  $\omega_0$ . Para  $\omega > \omega_0$  [veja (3.12) e (3.13)]

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= A_1(\omega) \dots A_n(\omega) < A_1(\omega_0) \dots A_n(\omega_0) \\
&\sim e^{-\frac{\sigma_1^2 \omega_0^2}{2}} \dots e^{-\frac{\sigma_n^2 \omega_0^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2 \omega_0^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Mas,  $\sigma \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  veja a Figura 3.5, assim:

$$A(w) \rightarrow 0 \text{ para } |\omega| > \omega_0.$$

No intervalo  $|\omega| < \omega_0$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= A_1(\omega) \dots A_n(\omega) \simeq e^{-\frac{\sigma_1^2 \omega^2}{2}} \dots e^{-\frac{\sigma_n^2 \omega^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Como  $e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$  tende a zero para  $|\omega| > \omega_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , pode-se concluir que

$$A(\omega) \sim e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}. \quad (3.14)$$

A fase de  $f(t)$  em (3.8) pode ser aproximada observando que os valores significativos de  $F(\omega)$  tendem a zero para  $n \rightarrow \infty$ , em um pequeno intervalo próximo a origem tem-se

$$\phi(\omega) \simeq \eta \omega.$$

Tentou-se acima mostrar os principais elementos que norteiam o teorema central do limite, a seguir uma prova completa é fornecida.

## Seqüência de Pulsos Equidistantes

É investigado a forma que  $f(t)$  tende quando  $f_i(t)$  é uma seqüência de pulsos equidistantes com área total igual a um (Pente de Dirac) e  $i \rightarrow \infty$ .

$$f_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik} \delta(t - kT) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{ik} = 1. \quad (3.15)$$

Vê-se que a média  $\eta_i$  e a variância  $\sigma^2$  são dadas por

$$\eta_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kT a_{ik} \quad \sigma^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (kT - \eta_i) a_{ik} \quad (3.16)$$

A transformada  $F_i(\omega)$  de  $f_i(t)$  é periódica para todo  $i$ , com período

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Desta forma, o produto  $F(\omega) = F_1(\omega) \dots F_n(\omega)$  é periódico com mesmo período. Assim, ao realizar a convolução  $f(t)$  de  $f_i(t)$ , como em (3.3), conclui-se que  $\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta[t - (t_1 + t_2)]$ , (veja apêndice B), assim  $f(t)$  também é um trem de impulso

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t - kT) \quad (3.17)$$

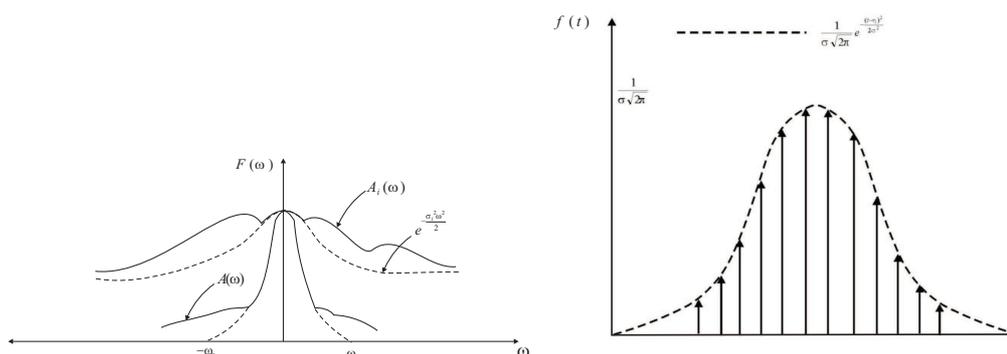
com média  $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$  e variância  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ .

Da Equação (3.9) e do Apêndice B.5 é possível estabelecer a seguinte versão do Teorema Central do Limite, a forma assintótica do pente  $f(t)$  é expressa por

$$f(t) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\eta)^2}{2\sigma^2}} s_\tau(t) \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

em que o trem de impulso

$$s_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$$



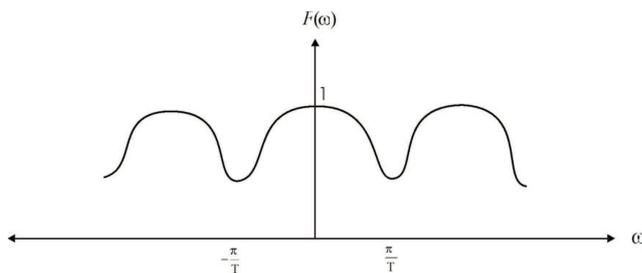
**Figura 3.4:** *Componente par e envoltória gaussiano* **Figura 3.5:** *Quando um sinal  $f(t)$  tende a uma gaussiana*

é uma seqüência de pulsos equidistantes. Assim  $f(t)$  tende a um pente cuja envoltória é a curva gaussiana da Figura 3.5. Esse resultado segue da Equação (3.8) e da discussão contida no apêndice B. De fato, se  $F(\omega)$  está truncado para valores acima de  $|\omega| = \frac{\pi}{\tau}$ , a função  $F_{i0}(\omega)$  das Figuras 3.8 e resulta em uma transformada para  $f_{i0}(t)$  que é contínua; de fato, esse é a envoltória de  $f_i(t)$ . De acordo com a Equação (3.8), o produto

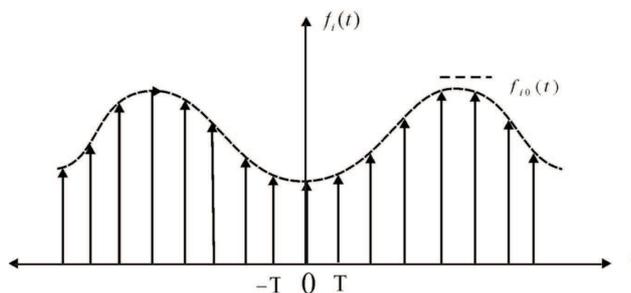
$$F_0(\omega) = F_{10}(\omega) \cdot F_{20}(\omega) \cdots F_{n0}(\omega)$$

tende a uma curva Gaussiana, como nas Figuras 3.10 e 3.11. O mesmo ocorrerá à sua repetição periódica. Assim o espectro de  $F(\omega)$  é dado por

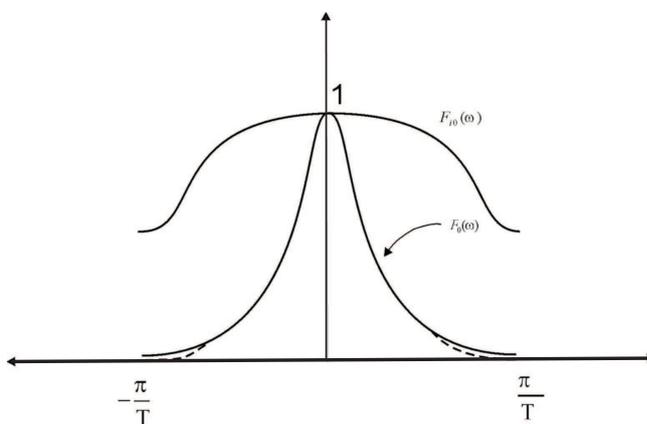
$$F(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_0\left(\omega + \frac{2n\pi}{\tau}\right),$$



**Figura 3.6:** Transformada de Fourier da seqüência de pulsos finita  $f_i(t)$



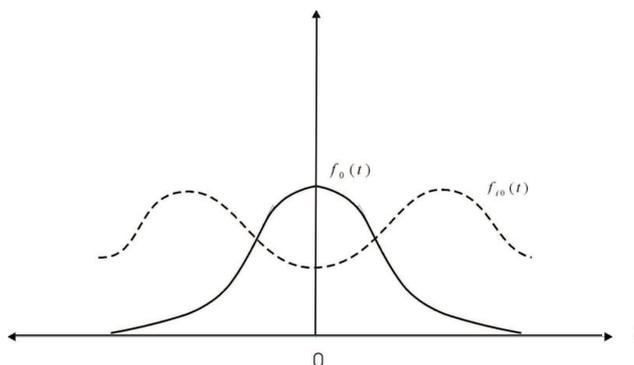
**Figura 3.7:** Seqüência de pulsos finitos com envoltória senoidal



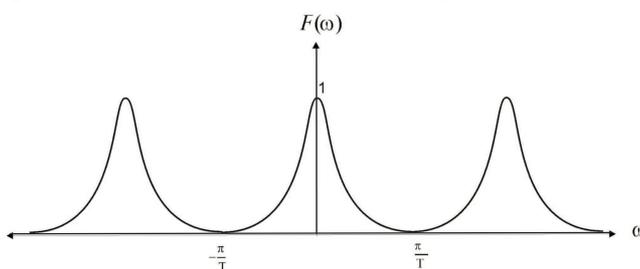
**Figura 3.8:** Transformada de  $f_0(t)$  e de  $f_{i0}(t)$  para valores truncados de  $|\omega| = \frac{\pi}{T}$

é a transformada da seqüência de pulsos da Equação (3.18). Tomando o momento em ambos os lados na Equação (3.18), pode ser mostrado que  $\eta$  e  $\sigma$  tem valores próprios como em (3.3).

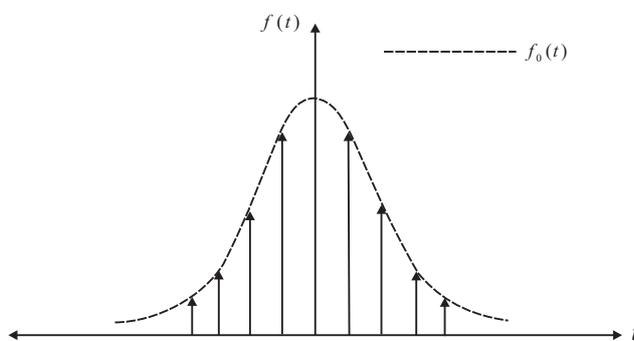
**Exemplo 3.2** Teorema de Bernoulli. *Suponha que as funções densidades que constituem a seqüência de pulsos são iguais e consistem em dois impulsos e são definidas de*



**Figura 3.9:** Sinal  $f_0(t)$  finito, e o resultado da convolução de  $f_{i_0}(t)$ , que tende a uma curva finita, mas quando  $i \rightarrow \infty$  tenderá a uma curva gaussiana



**Figura 3.10:** Seqüência de pulsos equidistantes finitos, com envoltória gaussiana.

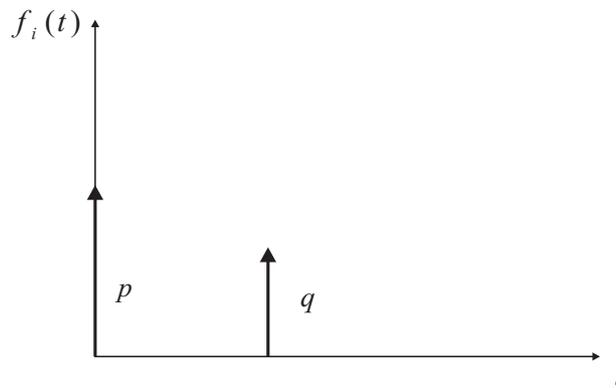


**Figura 3.11:** Transformada de Fourier de  $f_0(t)$ .

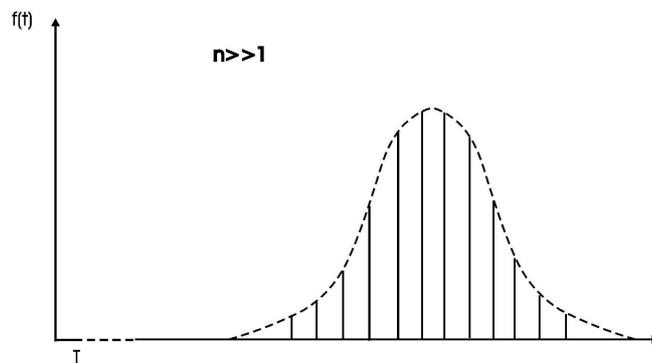
de acordo com

$$f_1(t) = \dots = f_n(t) = p\delta(t) - q\delta(t - \tau) \quad p + q = 1 \quad (3.19)$$

como na Figura 3.2, constatamos que esta convolução tende a um pente de Dirac com envelope gaussiano.



**Figura 3.12:** Função densidade constituída por dois pulsos gaussianos.

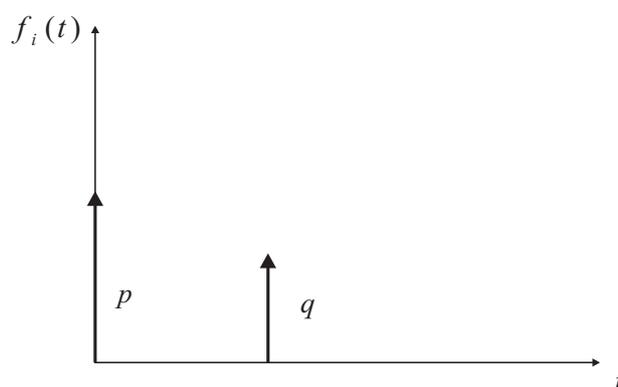


**Figura 3.13:** Resultado da convolução de  $f_i(t)$ , resultando numa seqüência de pulsos finitos com envelope gaussiano.

$$f(t) \sim \frac{1}{\tau \sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(t-nq\tau)^2}{2n\tau^2 pq}} s_\tau(t) \quad (3.20)$$

para  $n \rightarrow \infty$  (veja a Figura 3.2). Isto é decorrente da convolução entre as funções na Equação (3.3). Assim, quando  $n \rightarrow \infty$  resulta na Equação (3.18) o que é possível verificar substituindo os valores dos primeiros e segundos momentos usando a Equação (3.2). Em que as médias  $\eta_i$  e as variâncias  $\sigma_i$  das densidades são

$$\eta_i = q\tau \quad e \quad \sigma_i^2 = \tau^2 pq.$$



**Figura 3.14:** Função densidade constituída por dois pulsos gaussianos.

ω |  
SON  
S  
D

**Figura 3.15:** Transformada de Fourier de  $|F_i(\omega)|$  e suas aproximações por Gauss e Poisson.

Assim

$$\eta = nq\tau \quad e \quad \sigma^2 = n\tau^2 pq.$$

Pela prova do teorema central do limite, temos uma boa estimativa para  $f(t)$  provido que, não apenas  $n$  mas também  $nq$  forem grandes o suficiente.

Um caso interessante a ser analisado é

$$q \ll 1$$

como acontece na Figura 3.14. Se  $n$  é tão grande que  $nq \gg 1$ , então a estimativa da Equação (3.20) está garantida. Um caso importante de ser analisado é para  $n$  de dimensões  $1/q$ . Tem-se da Equação (3.19) que

$$F(\omega) = p + qe^{-j\omega\tau}. \quad (3.21)$$

Desde  $q \ll 1$ ,  $F(\omega)$  pode ser aproximada por

$$F(\omega) \simeq e^{q(e^{-j\omega\tau}-1)}. \quad (3.22)$$

De fato,

$$e^{q(e^{-j\omega\tau}-1)} \simeq 1 + qe^{-j\omega\tau} - 1 = p + qe^{-j\omega\tau}. \quad (3.23)$$

Então

$$F(\omega) \simeq e^{nq(e^{-j\omega\tau}-1)}. \quad (3.24)$$

Assim,  $f(t)$  é dada por uma densidade de Poisson (veja o apêndice B), com  $\lambda = nq$ . Assim reafirmando, se e somente se  $nq \gg 1$ , então a Equação (3.24) é equivalente a equação (3.20). Na Figura 3.15 mostra-se  $|F_i(\omega)|$ ,  $|F(\omega)|$  para  $n$  de ordem superior a  $1/q$  e  $F(\omega)$  para  $n \gg 1/q$ .

## Ajuste do Erro

O cálculo da convolução de  $n$  sinais como na Figura (3.14) é, de modo geral, complicada. Entretanto, desde que  $f(t)$  tende a uma função conhecida como a da equação (3.4) quando  $n \rightarrow \infty$ , é natural o uso da forma assintótica de  $f(t)$  para analisá-la. Se  $f(t)$  é aproximada pela curva Gaussiana na Figura 3.14, é possível definir uma função de erro

$$\epsilon(t) \triangleq f(t) - \frac{1}{\sigma} G\left(\frac{t-\eta}{\sigma}\right) \quad (3.25)$$

em que

$$G(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (3.26)$$

Para grandes valores de  $n$  este erro é pequeno, mas para valores moderados de  $n$  ele deixa de ser desprezível. A seguir, procura-se uma forma de calcular  $\epsilon(t)$  em função dos momentos de  $f(t)$ .

## Polinômios de Hermite

Pode ser assumido *a priori* que  $\eta = 0$ . Isto pode ser comparado a um deslocamento para origem no eixo do tempo. O erro será escrito como a soma

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\sigma} G\left(\frac{t}{\sigma}\right) \sum_{k=3}^{\infty} C_k H_k\left(\frac{t}{\sigma}\right), \quad (3.27)$$

em que as funções  $H_k(t)$  são os bem conhecidos polinômios de Hermite

$$\begin{aligned} H_k(t) &= (-1)^k e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= t^k - \binom{k}{2} t^{k-2} + 1 \cdot 3 \binom{k}{4} t^{k-4} - \dots \end{aligned}$$

formando um sistema ortogonal completo [31]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) H_m(t) dt = \begin{cases} n! \sqrt{2\pi}, & \text{para } n = m \\ 0, & \text{para } n \neq m \end{cases}$$

Para avaliar a constante  $C_k$ , toma-se o momento em ambos os lados da Equação (3.27). Os momentos  $A_k$  da função Gaussiana são dadas por (veja o apêndice B)

$$A_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad A_{2n+1} = 0 \quad (3.28)$$

e o  $n$ -ésimo momento  $a_{nk}$

$$a_{nk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-\frac{t^2}{2}} H_k(t) dt \quad (3.29)$$

da função  $G(t)H_k(t)$  pode ser obtido das equações de 3.28 a (3.29).

As seguintes equações resultam

$$a_{nk} = A_{n+k} - \binom{k}{2} A_{n+k-2} + 1 \cdot 3 \binom{k}{4} A_{n+k-4} - \dots \quad (3.30)$$

$$a_{nk} = 0 \quad \text{se } n+k \text{ for ímpar ou } k > n \quad (3.31)$$

$$a_{nn} = n! \quad (3.32)$$

Com  $m_n$  sendo o  $n$ -ésimo momento de  $f(t)$  assim o  $n$ -ésimo momento de  $\epsilon(t)$  é

$$\begin{aligned} 3!\sigma^3 C_3 &= m_3 \\ 4!\sigma^4 C_4 &= m_4 - \sigma^4 A_4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$n!\sigma^n C_n + a_{n(n-2)}\sigma^n C_{n-2} + \dots = m_n - \sigma^n A_n.$$

Desta forma, o coeficiente  $C_n$  pode ser encontrado sucessivamente. Se a função  $f(t)$  for par então  $C_{2n+1} = 0$ . Mantendo apenas os termos da Equação (3.27), temos a seguinte aproximação para uma função par usando o ajuste de erro da Equação (3.25):

$$f(t) \simeq \bar{f}(t) = \frac{1}{\sigma} G\left(\frac{t}{\sigma}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{4!} \left( \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 \right) \left[ \left( \frac{t}{\sigma} \right)^4 - 6 \left( \frac{t}{\sigma} \right)^2 + 3 \right] \right\}, \quad (3.34)$$

pois

$$A_4 = 3 \quad H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3.$$

**Exemplo 3.3** Suponha que as funções  $f_i(t)$  sejam todas iguais ao pulso retangular da Figura 3.16 para  $n = 3$ . Essa convolução é obtida pelo deslocamento da função descrita na Equação (3.8) do exemplo 3.1, a qual corresponde à linha sólida da Figura 3.16. Desde que  $\sigma = \frac{1}{2}$ , a aproximação pela Gaussiana se torna igual a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2t^2}$$

que corresponde a linha pontilhada da Figura 3.16. Assim, pode-se observar que  $f(t)$  é par e seu quarto momento é dado por  $m_4 = \frac{13}{80}$ . Da Equação (3.34) obtém-se a seguinte correção de primeira ordem mostrada na Figura 3.16. O erro de primeira ordem  $\epsilon(t) = f(t) - \bar{f}(t)$  da correção de  $f(t)$  é mostrado na Figura 3.17.

### Teorema do Limite Central para Funções Causais

Usado funções  $f(t)$  causais, é possível mostrar que a sua convolução tende a uma distribuição também causal. Entretanto, a gaussiana estimada na Equação (3.8) não é zero para  $t < 0$ , independente de quão largo seja  $\eta$ . Assim é desejável modificar o teorema central do limite para que  $f(t)$  tenda a uma função causal quando  $n \rightarrow \infty$ .

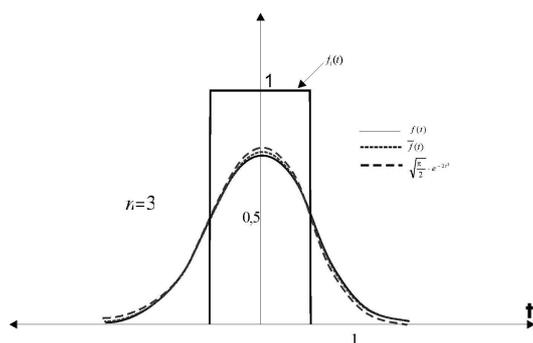


Figura 3.16

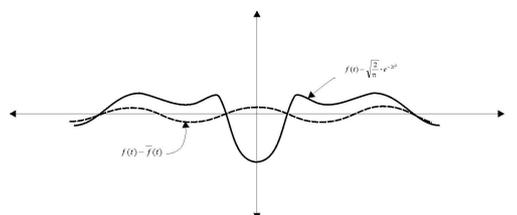


Figura 3.17

Isso pode ser obtido como se segue. Considere a função

$$s(t) \triangleq \frac{t^\alpha e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} U(t) \quad (3.35)$$

também conhecida como distribuição de densidade  $\chi^2$ . Sua transformada de Fourier é dada por

$$S(\omega) = \frac{1}{(1 + j\beta\omega)^{\alpha+1}}. \quad (3.36)$$

O espectro que  $S(\omega)$  pode ser escrito como o produto de  $n$  funções características, onde  $n$  é o valor mais próximo de  $\alpha$ . Assim, de acordo com as Equações (3.1) e (3.4), em que  $s(t)$  é a aproximação de uma Gaussiana por uma função causal, quando  $\alpha$  assume valores elevados. Assim, deduz-se a seguinte versão para funções causais:

$$f(t) \simeq \frac{t^\alpha e^{-\frac{t}{\beta}}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} \quad \text{para } n \rightarrow \infty, \quad (3.37)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são tais que a média e a variância são iguais em ambos os lados da Equação (3.37). Para determinar o  $k$ -ésimo momento de  $B_k$  de  $s(t)$ , usa-se:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty t^k t^\alpha e^{-\frac{t}{\beta}} dt \\ &= (\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+k) \beta^k \end{aligned} \quad (3.38)$$

com o auxílio de

$$\int_0^\infty e^{pt} t^\alpha dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \quad (3.39)$$

para calcular (3.38). assim, usando  $\eta$  e  $\sigma$  que foram calculados na Equação (3.3), temos

$$(\alpha+1)\beta = \eta \quad (\alpha+1)(\alpha+2)\beta^2 = \sigma^2 + \eta^2.$$

Deste modo,  $\alpha$  e  $\beta$  são dados por:

$$(\alpha + 1) = \frac{\eta^2}{\sigma^2} \quad \beta = \frac{\sigma^2}{\eta} \quad (3.40)$$

e a Equação (3.37) fornece uma aproximação causal para  $f(t)$ . Do resultado acima, é possível chegar à seguinte aproximação:

$$\frac{1}{(\beta_1 p + 1)(\beta_2 p + 1) \dots (\beta_n p + 1)} \simeq \frac{1}{(\beta p + 1)^{\alpha+1}}, \quad (3.41)$$

em que

$$(\alpha + 1) = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \beta_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n \beta_i^2} \quad \beta = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}{\sum_{i=1}^n \beta_i},$$

desde que a condição  $\alpha \gg 1$  seja satisfeita. Se  $\alpha$  for substituído pelo seu inteiro mais próximo, introduz-se um pequeno erro, se  $\alpha \gg 1$ ; assim obtém-se uma aproximação em forma racional para  $f(t)$ .

*Correção de Erro com Polinômios de Laguerre.* Fazendo o mesmo que na Equação (3.27), o erro pode ser expresso como

$$\epsilon(t) = f(t) - s(t), \quad (3.42)$$

assim tem-se a série

$$\epsilon(t) = s(t) \sum_{i=3}^n D_k L_k^{(\alpha)} \left( \frac{t}{\beta} \right). \quad (3.43)$$

Em função dos polinômios generalizados de Laguerre

$$\begin{aligned}
L_k^{(\alpha)}(t) &= \frac{t^{-\alpha} e^{-t}}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^{\alpha+k} e^{-t}) \\
&= \frac{-1}{k!} \left[ t^k - \binom{k}{1} (k+\alpha) t^{k-1} + \dots \pm (k+\alpha)(k-1+\alpha) \dots (1+\alpha) \right].
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Para encontrar as constantes  $D_k$ , é preciso encontrar os momentos da função  $s(t)L_k^{(\alpha)}\left(\frac{t}{\beta}\right)$

$$b_{nk} = \int_0^\infty t^n s(t) L_k^{(\alpha)}\left(\frac{t}{\beta}\right) dt. \tag{3.45}$$

Das Equações (3.38) e (3.44)

$$b_{nk} = \frac{(-1)^k}{k!} \left[ B_{n+k} - \binom{k}{1} (k+\alpha) B_{n+k-1} + \dots \right]. \tag{3.46}$$

Uma vez que os polinômios  $L_k^{(\alpha)}(t)$  são ortogonais

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t) L_m^{(\alpha)}(t) dt = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} & \text{para } m = n \\ 0, & \text{para } m \neq n. \end{cases} \tag{3.47}$$

Conclui-se que

$$b_{nn} = (-1) B_n \quad b_{nk} = 0 \quad \text{para } n < k. \tag{3.48}$$

Tomando os momentos em ambos os lados da Equação (3.42), obtém-se finalmente

$$\begin{aligned}
(-1)^3 B_3 D_3 &= m_3 - B_3 \\
\dots\dots\dots & \\
(-1)^n B_n D_n + b_{n(n-1)} D_{n-1} + \dots \pm b_{n3} D_3 &= m_n - B_n \\
\dots\dots\dots &
\end{aligned} \tag{3.49}$$

em que  $m_n$  são os momentos de  $f(t)$ . Se apenas os primeiros termos da Equação (3.43) forem considerados, deriva-se a seguinte aproximação para  $f(t)$ :

$$f(t) \simeq s(t) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{m_3}{B_3} \right) L_3^{(\alpha)} \left( \frac{t}{\beta} \right) \right] U(t) \quad (3.50)$$

**Exemplo 3.4** Apresenta-se agora uma estimativa para a função causal  $f(t)$  da Figura 3.3, discutida no exemplo 3.1. Assim

$$\eta = \frac{3}{2} \quad \sigma^2 = \frac{1}{4}$$

da Equação (3.40) temos

$$\alpha = 8 \quad \beta = \frac{1}{6}.$$

Então, aproximando  $f(t)$  (veja o apêndice B)

$$f(t) \sim \frac{6^9}{8!} t^8 e^{-6t} U(t)$$

a correção do erro de primeira ordem é dada pela equação 3.50

$$f(t) \simeq \frac{6^9}{8!} t^8 e^{-6t} \left[ 1 - \frac{3}{55} (2t^3 - 66t^2 + 110t - 55) \right] U(t),$$

desde que  $m_3 = \frac{9}{2}$  e  $B_3 = \frac{55}{12}$ .

## Funções Limitadas no Tempo

Se as funções  $f_i(t)$  são nulas fora de um intervalo de tempo finito  $(a_i, b_i)$ , assim, a convolução  $f(t)$  também será nula fora de um intervalo  $(a, b)$  dado por

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \quad b = \sum_{i=1}^n b_i.$$

Deste modo podemos reformular o teorema central do limite de modo que  $f(t)$  seja nula fora do intervalo  $(a, b)$ . Isto pode ser obtido do modo a seguir:

Fazendo uma mudança linear da variável  $t$ , é possível assumir sem perda de generalidade que

$$a = 0 \quad b = 1. \quad (3.51)$$

A função

$$p(t) = \begin{cases} Mt^\alpha(1-t)^\beta & \text{para } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.52)$$

Também conhecida como distribuição de densidade beta [36], será usada para aproximar  $f(t)$  para valores elevados de  $n$ .

$$f(t) \sim p(t) \quad n \longrightarrow +\infty. \quad (3.53)$$

A justificativa da Equação (3.53) é semelhante a justificativa de (3.37). A constante  $M$  é calculada de modo que a área de  $p(t)$  seja unitária, assim, tem-se:

$$M = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}. \quad (3.54)$$

Os expoentes  $\alpha$  e  $\beta$  escolhidos vão determinar o valor de  $\eta$  e  $\sigma^2$ . O  $n$ -ésimo momento  $F_n$  de  $p(t)$  é calculado como:

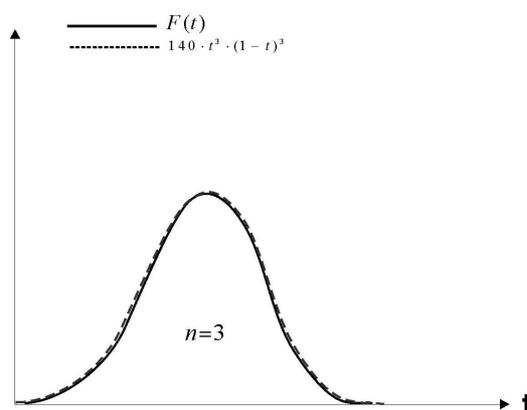
$$F_n = \frac{(2\alpha + 2)(2\alpha + 4) \dots (2\alpha + 2n)}{\nu(\nu + 2) \dots (\nu + 2n - 1)} \quad \nu = 2\alpha + 2\beta + 4. \quad (3.55)$$

Deste modo, os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  precisam ser dados por

$$\alpha + 1 = \frac{\eta(\eta - \eta^2 - \sigma^2)}{\sigma^2} \quad \beta + 1 = \frac{(1 - \eta)(\alpha + 1)}{\eta}. \quad (3.56)$$

como pode ser observado de (3.55).

O erro  $f(t) - p(t)$  pode ser representado como série, semelhante a 3.43, em termo dos polinômios de Jacobi [35].



**Figura 3.18:** *Aproximação da convolução por uma distribuição beta*

$$J_n(\alpha + 1, \alpha + \beta + 1; t),$$

pois a função  $p(t)$  gera os pesos ortogonais a estes polinômios no intervalo  $(0, 1)$ . O resultado é semelhante a 3.43, mas os detalhes serão omitidos.

É preciso aplicar (3.53) para  $f(t)$  do exemplo 3.4. Desde que  $f(t)$  seja zero fora do intervalo  $(0, 3)$ , é preciso escalonar  $t$  por  $3t$  para satisfazer (3.51); assim a densidade se torna

$$F(t) = 3f(3t)$$

resultando, que a média e a variância são dadas por

$$\eta = \frac{1}{2} \quad \sigma^2 = \frac{1}{36}$$

Da Equação (3.54) e da Equação (3.56), obtém-se

$$M = 140 \quad \alpha + 1 = 4 \quad \beta + 1 = 4.$$

Assim

$$F(t) \sim 140t^3(1-t)^2 \quad \text{para } 0 < t < 1.$$

As duas funções acima são ilustradas na Figura 3.18.

# 4

## A ANÁLISE DA INCERTEZA NA TRANSMISSÃO DE INFORMAÇÃO

### Princípio da Incerteza Aplicado a Sinais

Gabor apresentou sua nova interpretação de sinais, pela primeira vez para a comunidade científica em 1945 em seu artigo “*Theory of Communications*” [14] onde apresentou uma maneira inédita de abordar a descrição de sinais, através do que ele denominou de “diagrama de informação”, e subdividiu este diagrama em “quanta” de informação, assim determinando uma equação que fornece a área, como também quais os sinais que possuem a menor área neste diagrama.

A expansão em sinais elementares é um processo que sugere um novo método de descrição que fica entre os extremos que são a análise temporal e a análise espectral. Pode-se estudar estes sinais elementares usando as áreas elementares do diagrama de informação, ao qual está associada aos sinais de transmissão em tempo mínimo em um canal limitado em frequência. Deste modo, o canal é particionado em que as subdivisões são analisadas no limite como ver-se-á adiante.

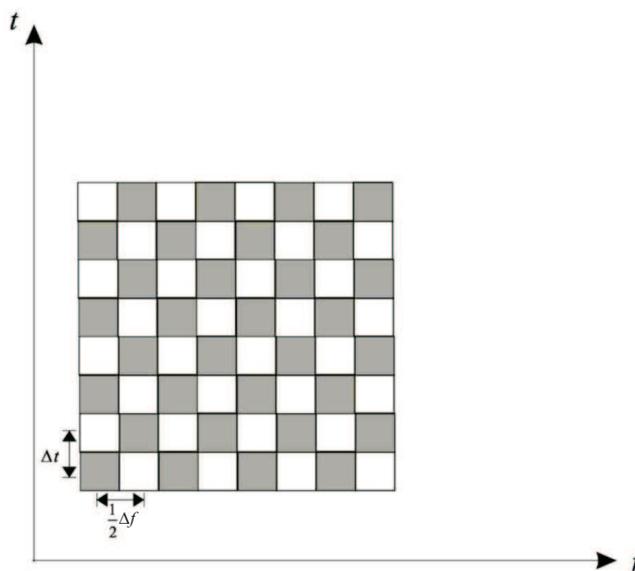


Figura 4.1: Diagrama de informação no plano tempo  $\times$  frequência.

## 4.1 Decomposição de um sinal

Suponha que se deseja transmitir uma mensagem, e esta seja uma função do tempo, e que tenha uma quantidade infinita de informação. Considere que a função  $s(t)$  existe em um intervalo de tempo  $\tau$  e subdivide-se este intervalo em  $N$  subintervalos, de modo, a obter uma unidade elementar de informação. Como estes intervalos podem ser subdivididos infinitamente, isto conduz uma idéia falha de que uma quantidade infinita de informação poderia ser transmitida.

Uma forma de representar este sinal a ser transmitido é por meio de polinômios ortogonais, onde os coeficientes destes polinômios são os momentos do sinal  $s(t)$ , e assim estes coeficientes poderiam ser considerados como os dados especificados para transmissão. Isto equivale a ajustar  $s(t)$  pelo método dos mínimos quadrados. Onde os coeficientes do polinômio são os momentos com ordem coincidindo com a ordem os expoentes do polinômio da série de Taylor deste sinal, onde a expressão dos momentos é dada por

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n s(t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como também

$$(-j)^n m_n = \frac{d^n S(0)}{d\omega^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Antes de introduzir os pares de transformadas, neste capítulo - por uma questão de analogia - para trabalhar com as mesmas expressões que Gabor[40] usou, usar-se-á a frequência  $f$  que nada mais é  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

É importante considerar o fato de que, a maior parte da teoria das comunicações foi construída com base na reciprocidade da integral de Fourier, em que  $s(t)$  e  $S(f)$  são pares de transformadas.

Assim é sabido que cada instrumento tem uma resposta tempo/frequência, não sendo possível distinguir fase, mas isto já é suficiente para o estudo aqui presente, onde a área elementar está diretamente relacionada a leitura quase independente do instrumento.

Sem se aprofundar nos detalhes, os instrumentos físicos para análise no diagrama tempo/frequência possuem retângulos de área elementar da ordem unitária, de forma diferente, mas nunca de área menor que  $\frac{1}{2}$ .

Veremos que o fato da área elementar ser maior ou igual a  $\frac{1}{2}$  independe do instrumento. As ferramentas hoje disponíveis para tratar este fenômeno provem da teoria quântica e pela formulação do “Princípio da Incerteza de Heisenberg” que trouxe simplicidade para esta análise tempo/frequência.

Todas as relações de incerteza foram obtidas em parte graças aos trabalhos de W. Pauli [40], [29], [30]; e são consequência direta da identidade matemática:

$$\Delta t \Delta f \simeq 1 \quad (4.1)$$

onde  $\Delta t$  e  $\Delta f$  são incertezas intrínsecas da definição de tempo e frequência. Na teoria das comunicações esta identidade está intimamente relacionada ao princípio fundamental da comunicação.

## 4.2 Sinal Complexo

Apenas para aplicar um formalismo simples e elegante da Mecânica Quântica, será conveniente expressar a amplitude do sinal  $s(t)$  de um modo diferente.

Introduzindo agora o que se conhece por uma função “cissoidal” simples temos  $\psi = cis(2\pi f_0 t)$ . Em que uma função “cissoidal” é derivada de  $\psi(t) = a \cos(\omega t) + b \text{sen}(\omega t)$ . Tomando as primeira letras – uma vez que a frequência é única – temos “ $c$  de cosseno  $i$  da parte complexa e  $s$  de seno” formando assim  $cis$ , ou seja,  $\psi(t) = (a + ib)cis(2\pi f_0 t)$  que é o que chamaremos de sinal “cissoidal”. este é um sinal complexo em frequência única.

Há muito tempo tem sido reconhecido que realizar operações matemáticas com a exponencial complexa  $e^{j\omega t}$  - geralmente chamada de  $cis(\omega t)$  - que tem uma certa vantagem sobre as funções seno e cosseno. Há duas formas de introduzir a exponencial complexa. Uma das formas é escrevendo sob a forma:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad \text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \quad (4.2)$$

Ou ainda:

$$\cos(\omega t) = \text{Re}\{e^{j\omega t}\} \quad \text{sen}(\omega t) = \text{Im}\{e^{j\omega t}\}. \quad (4.3)$$

Por outro lado, o formalismo da mecânica quântica favorece um segundo método

chamado de sinal analítico – por isto ele será adotado, o qual é expresso pela função complexa (sinal analítico):

$$\psi(t) = s(t) + j\hat{s}(t) = (a - jb) \cdot e^{j\omega t},$$

em que  $a$  e  $b$  é a amplitude das componentes senoidais de  $s(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \text{sen}(\omega t)$  e  $\hat{s}(t) = a \cdot \text{sen}(\omega t) - b \cdot \cos(\omega t)$ .

A passagem de  $s(t)$  para  $\psi(t)$  é equivalente a: “Suprimir as amplitudes que pertencem as frequências negativas, e multiplicar as amplitudes das frequências positivas por dois.”

E  $\hat{s}(t)$  é a transformada de Hilbert de  $s(t)$ , e pode ser dada por

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}. \quad (4.4)$$

E isto pode ser entendido como a abreviação do limite que segue:

$${}_{vp} \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{t-\tau} + \int_{t+\tau}^{\infty} \right]$$

o que também é conhecido como “Valor Principal de Cauchy” de uma integral imprópria.

Também é possível expressar  $s(t)$  por  $\hat{s}$  como segue:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (4.5)$$

Estas funções  $s(t)$  e  $\hat{s}(t)$  são pares de “Transformada de Hilbert” [31].

Na teoria de sinais analíticos não é possível distinguir eixo real de uma variável complexa. Podemos desenhar qualquer linha reta no plano complexo, que deixe os pólos em um dos lados, e os valores de duas funções conjugadas ao longo desta linha, e assim obter um par de funções em quadratura.

### 4.3 Formulação Rigorosa das Relações de Incerteza

Usando o sinal complexo  $\psi(t)$  para descrever o sinal no tempo, é possível associá-lo com isto a descrição em frequência através da transformada de Fourier de  $\psi(t)$  dada por  $\Psi(f)$ , em que

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (4.6)$$

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (4.7)$$

Para especificar um sinal finito, podemos fazê-lo através dos momentos  $M_0, M_1, \dots$  existem alguns métodos que depois de algumas alterações quantitativas servirão para esta especificação. A primeira destas modificações é em vez de utilizar como peso a função  $s(t)$  usa-se:

$$\psi^*(t)\psi(t) = [s(t)]^2 + [\hat{s}(t)]^2 \quad (4.8)$$

Este sinal pode ser considerado um sinal de potência. Uma outra modificação é usar em vez dos próprios momentos, valores normalizados pelo momento nulo  $M_0$ . Assim, os momentos de  $\psi(t)$  são obtidos por

$$\bar{t} = \frac{\int \psi^* t \psi dt}{\int \psi^* \psi dt} \quad \bar{t}^2 = \frac{\int \psi^* t^2 \psi dt}{\int \psi^* \psi dt} \quad \dots \quad \bar{t}^n = \frac{\int \psi^* t^n \psi dt}{\int \psi^* \psi dt}. \quad (4.9)$$

Pelo teorema de Stieltjes [39], se todos os valores médios forem conhecidos, a função peso  $\psi^* \psi = |\psi|^2$  também o será, exceto possivelmente por alguma constante que venha a aparecer. O sinal  $\psi$  pode ser determinado apenas pela observação dos valores absolutos, quanto a sua fase esta permanece desconhecida.

Do mesmo modo define-se os momentos em frequência  $f^n$  do sinal como segue:

$$\bar{f} = \frac{\int \Psi^* f \Psi df}{\int \Psi^* \Psi df} \quad \bar{f}^2 = \frac{\int \Psi^* f^2 \Psi dt}{\int \Psi^* \Psi df} \quad \dots \quad \bar{f}^n = \frac{\int \Psi^* f^n \Psi df}{\int \Psi^* \Psi df}. \quad (4.10)$$

Agora se torna perceptível o motivo pelo qual foi introduzido um sinal complexo anteriormente. Ao adotar um sinal real, as funções de ponderação teriam que ser funções pares e a freqüência seria nula. É neste ponto em que métodos físicos e os métodos de Fourier não estão em perfeito acordo. Mas é possível suprimir as freqüências negativas ao introduzir-se o sinal analítico.

Usando as Equações (4.6) e (4.7)  $\psi$  e  $\Psi$ , uma determina a outra, isto precisa ser verdade para expressar as freqüências através de  $\psi$  e, conseqüentemente, o tempo por  $\Psi$ . Isto pode ser verificado usando as relações recíprocas a seguir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi df \quad (4.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* f^n \Psi df = \left( \frac{1}{2\pi j} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{d^n}{dt^n} \psi dt, \quad (4.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* t^n \psi df = \left( \frac{-1}{2\pi j} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{d^n}{df^n} \Psi dt. \quad (4.13)$$

A primeira das Equações acima, isto é (4.11), é também conhecido como teorema da energia de Parseval (Rayleigh 1889). As outras relações vem da identidade da transformada com produto interno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t) \psi_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(f) \Psi(-f) df, \quad (4.14)$$

usando integrais, assumindo que  $\psi$  e  $\Psi$  são infinitamente deriváveis. Estas relações são amplamente usadas e podem ser resumidas em instruções simples: quando se de-seja representar algum dos valores médios da Equação (4.9) por meio de integrais na freqüência, substitua  $\psi$  por  $\Psi$ , e a quantidade  $t$  pelo operador  $-\frac{1}{2\pi j} \frac{d}{df}$ . Isto pode

ser chamado de “tradução” do domínio do tempo para a frequência. Por outro lado, fazendo a mudança de  $\Psi$  para  $\psi$  e da frequência  $f$  para  $\frac{1}{2\pi j} \frac{d}{dt}$ , tem-se uma “tradução” da frequência para o tempo. Isto é equivalente a uma regra da mecânica quântica na qual  $\rho_x$  é substituído pelo operador  $\frac{\hbar}{2\pi j} \frac{d}{dx}$ , em que  $x$  é a coordenada conjugada do momento  $\rho_x$ .

Aplicando a regra tem-se:

$$f = \frac{1}{2\pi j} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \frac{d}{dt} \psi dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dt}. \quad (4.15)$$

Considere uma função analítica escolhida uma frequência única para trabalhar, mas em vez de  $j$  para representar a parte complexa use  $i$ ,  $\psi(t) = (a - ib)e^{i2\pi f_0 t}$ , assim ao expandir esta expressão em senos e cossenos, tem-se  $\psi(t) = (a - ib)[\text{sen}(2\pi f_0 t) + i \cos(2\pi f_0 t)]$ .

Deste modo obtemos o valor de  $f_0$  para frequências médias de  $\bar{f}$ , e similarmemente  $\bar{f}^n = \bar{f}_0^n$ . Os momentos no tempo  $\bar{t}^n$ , são nulos para as potências ímpares e infinita para as potências pares  $n > 1$ . Esta função deve ser considerada como um caso limite, como esta teoria só é aplicada para sinais de duração finita cujo espectro não se estenda ao infinito, uma condição que é verificada pela maioria dos sinais reais.

Estas definições e regras permitem formular a relação de incerteza quantitativamente. *A priori* fixa-se um valor de tempo médio e a frequência média do sinal, usando as Equações (4.9), (4.10), (4.15). Estes tempos médios e frequências médias não contam os “momentos” em que houve transmissão de dados como na transmissão contínua, que corresponde ao sinal em algum instante “ $t$ ” e frequência “ $f$ ”. consideraremos  $\bar{t}$  e  $\bar{f}$  como referências, não como variáveis. Os dois primeiros dados serão determinados pelo valor médio quadrático de tempo e frequência, ou seja:

$$\bar{t}^2 \triangleq \frac{\int \psi^* t^2 \psi dt}{\int \psi^* \psi dt} \quad (4.16)$$

$$\bar{f}^2 \triangleq \frac{\int \Psi^* f^2 \Psi dt}{\int \Psi^* \Psi df} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\int \psi^* \frac{d^2}{dt^2} \psi dt}{\int \psi^* \psi dt} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\int \frac{d\psi^*}{dt} \frac{d\psi}{dt} dt}{\int \psi^* \psi dt} \quad (4.17)$$

A segunda destas seqüências em (4.17) foi “traduzida” para o domínio do tempo, como explicado anteriormente, e modificado por integração parcial para explicitar a natureza positiva de  $\bar{f}^2$ .

Pode ser observado que  $\bar{t}^2$  e  $\bar{f}^2$ , e em geral todos os valores médios de ordem par, permanecem inalterados se  $s(t)$  ou  $\hat{s}(t)$  forem substituídos no lugar de  $\psi(t) = s(t) + \hat{s}(t)$ . Então poderemos usar sinais reais em vez de sinais complexos, mas mantém-se a notação  $\psi$  para simplificar algumas expressões analíticas e enfatizar a semelhança com o formalismo da mecânica quântica, para manter a abordagem inicial de Gabor.

Agora define-se a “duração efetiva”  $\Delta t$ , e a “frequência efetiva”  $\Delta f$  de um sinal pelas equações:

$$\begin{aligned} \Delta t &\triangleq [2\pi \overline{(t - \bar{t})^2}]^{\frac{1}{2}}, \\ \Delta f &\triangleq [2\pi \overline{(f - \bar{f})^2}]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

em outras palavras, a duração efetiva é definida como  $\sqrt{2\pi}$  vezes o valor r.m.s, é o desvio do sinal pelo seu valor médio  $\bar{t}$ ; para a frequência efetiva é similar, sendo  $\sqrt{2\pi}$  vezes o desvio de  $f$  em relação a  $\bar{f}$ . O uso de  $\sqrt{2\pi}$ , será elucidado mais à frente.

Usando a identidade a seguir:

$$\overline{(t - \bar{t})^2} = t^2 - \bar{t}^2 \quad \text{e} \quad \overline{(f - \bar{f})^2} = f^2 - \bar{f}^2, \quad (4.18)$$

$\Delta t$  e  $\Delta f$  podem ser expressos por meio de (4.16) e (4.17). As expressões se tornam mais simples se a origem da escala do tempo se deslocadas no tempo para  $\bar{t}$  e na frequência por  $\bar{f}$ . Ambas as transformações são realizadas com a introdução de uma nova escala:

$$\tau = (t - \bar{t}) \quad (4.19)$$

e um novo sinal:

$$\psi(\tau) = \psi(t)e^{-j2\pi\bar{f}\tau}. \quad (4.20)$$

Exprimindo  $t$  e  $\psi$  por novas quantidades  $\tau$  e  $\psi$ , é sabido que, exceto pelo fator  $2\pi$ ,  $(\Delta t)^2$  e  $(\Delta f)^2$  assumem a mesma forma que as Equações (4.16) e (4.17) para  $\bar{t}^2$  e  $\bar{f}^2$ . Multiplicando as duas equações obtém-se:

$$(\Delta t \Delta f)^2 = \frac{1}{4} \left[ 4 \frac{\int \psi^* \tau^2 \psi d\tau}{\left[ \int \psi^* \psi \right] d\tau} \right]. \quad (4.21)$$

Mas, pelo uso da identidade matemática “desigualdade de Schwartz”, devido a Weyl e Pauli, a expressão entre colchetes é sempre maior que a unidade para qualquer  $\psi$ , para o qual a integral exista. Daí, segue-se então a relação de incerteza:

$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{2}. \quad (4.22)$$

Esta é a identidade matemática que é o princípio fundamental das comunicações. Vemos que a duração r.m.s. definem um sinal e a freqüência r.m.s. define uma área mínima no diagrama de informação de Gabor.

A relação (4.22) é simétrica em tempo e freqüência e sugere que uma nova representação do sinal pode ser encontrada, na qual  $t$  e  $f$  podem ser tratados como partes permutáveis. Além disso sugere que é possível dá uma interpretação mais concreta ao diagrama de informação, ao dividi-los em células de dimensão  $\frac{1}{2}$  e associar a cada célula um “sinal elementar”, o qual representa a transmissão de um “datum”, em que “datum” é definido a partir deste momento como sendo a informação elementar.

## 4.4 O Sinal Elementar

O avanço desta teoria ocorreu juntamente com a mecânica quântica [29, 30]. De fato, estes resultados podem ser obtidos apenas trocando a coordenada  $x$  por  $t$ , e o momento  $p$ , por  $f$ , e a constante de Planck  $h$  pela unidade.

O primeiro problema surge da desigualdade (4.22), onde se deseja conhecer a forma do sinal que atinge o menor valor possível, ou seja, qual a forma do sinal que o produto  $\Delta t \Delta f$  se torna uma igualdade?

A obtenção da forma deste sinal é descrita em detalhes em [14], aqui usaremos apenas os resultados. O sinal que ocupa área mínima no diagrama *tempo*  $\times$  *freqüência*, ou seja,  $\Delta t \Delta f = \frac{1}{2}$  que é o produto de uma oscilação em qualquer freqüência com um pulso gaussiano. Na forma complexa, tem-se:

$$\psi(t) = e^{-\alpha^2(t-t_0)^2} \text{cis}(2\pi f_0 t + \phi) \quad (4.23)$$

$\alpha$ ,  $t_0$ ,  $f_0$  e  $\phi$  são constantes, que podem ser interpretadas como “modelador” do pulso, o tempo em que ocorre o primeiro pico, a freqüência e a fase da oscilação modulada, respectivamente. A constante  $\alpha$  está relacionada com  $\Delta t$  e  $\Delta f$  pelas relações:

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \Delta f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \alpha$$

Como é esperado de uma condição de simetria, da qual foi derivada, o espectro é da mesma forma analítica:

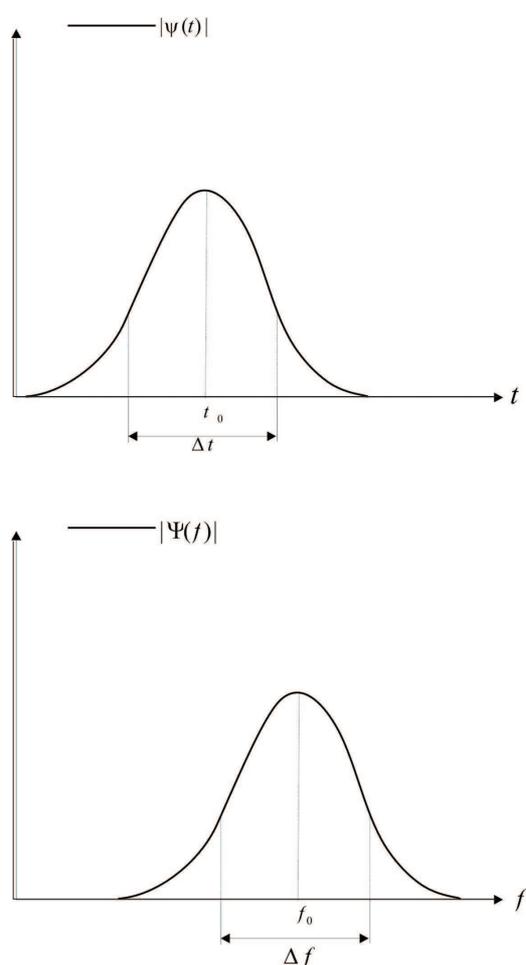
$$\Psi(f) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha^2}(f-f_0)^2} \text{cis}(-2\pi(f-f_0) + \phi) \quad (4.24)$$

as envoltórias de ambos os sinais e seus espectros, ou seus valores absolutos e seu espectro tem a forma de uma distribuição gaussiana, como ilustrado na Figura 4.2. A

largura de ambos são relacionadas reciprocamente.

Devido as propriedades do pulso Gaussiano, ele é usado como referência sobre a qual se constitui a análise de sinais em ambos os domínios, tempo e freqüência.

Propõe-se que o sinal obtido de acordo com a equação acima seja definido como um sinal elementar. No diagrama de informação ele pode ser representados por retângulos de lados  $\Delta t$  e  $\Delta f$ , área de  $\frac{1}{2}$ , e centro  $(t_0, f_0)$ .



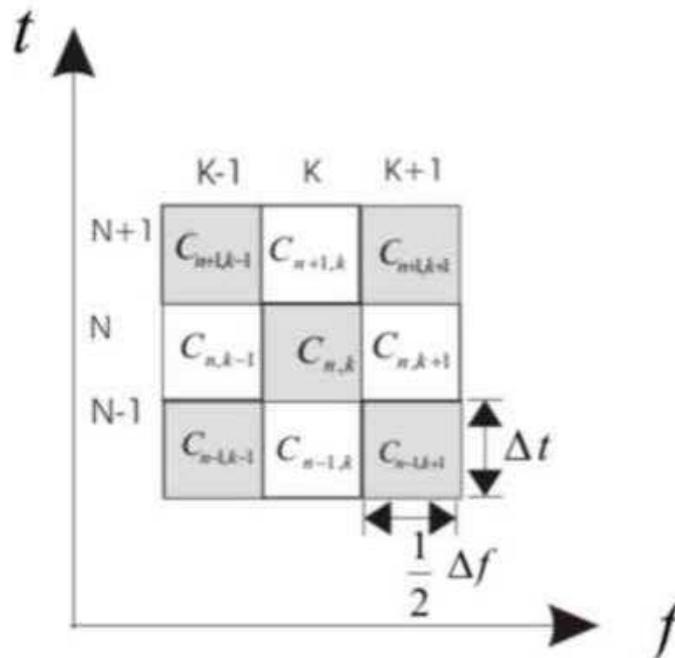
**Figura 4.2:** *Envelope de um sinal elementar*

A expansão em sinais elementares é um processo no qual a análise de Fourier e a derivação no tempo são casos especiais. O primeiro é obtido com  $\alpha = 0$ ; o segundo  $\alpha \rightarrow \infty$ , onde este sinal  $\psi(t)$  se torna um “Impulso de Dirac”.

É suficiente para explicar a expansão em sinais elementares, dividir em duas partes:

- Tome as divisões de áreas de tamanho unitário, as quais estão associadas aos “datums”. Dividindo assim o diagrama de informação de forma simples e simétrica.
- Tome as divisões de áreas elementares no limite.

O primeiro passo corresponde a divisão da região de informação, em um reticulado com distâncias  $\Delta t$  e  $\frac{1}{2\Delta t}$  respectivamente, como ilustrado na Figura 4.3. As áreas elementares tem sufixo  $n$  na descrição do tempo e  $k$  na descrição da frequência.



**Figura 4.3:** Representação do sinal por uma matriz de amplitude complexa

O centro das linhas (horizontalmente) pode ser em  $t_n = n\Delta t$ , considerando que por conveniência medimos o tempo a partir de zero nestas linhas. A expansão dá a seguinte fórmula:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{nk} e^{-\pi \frac{(t-n\Delta t)^2}{(2\Delta t)^2}} \text{cis} \left( \frac{2\pi kt}{\Delta t} \right) \quad (4.25)$$

Os mesmos coeficientes aparecerão ao expandir  $\Psi(f)$  em vez de  $\psi(t)$ .

Como os sinais na Equação (4.25) não são ortogonais, os seus coeficientes  $C_{nk}$ , são obtidos por aproximação sucessivas. Escolha-se arbitrariamente umas das linhas em  $n$ :

$$\psi(t)e^{\pi \frac{(t-n\Delta t)^2}{2\Delta t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{nk} \cdot cis \left( \frac{2\pi kt}{\Delta t} \right)$$

Esta aproximação representa corretamente a série no intervalo em que ela é válida mas não fora dele. O valor de  $C_{nk}$  converge rápido, pois o valor exponencial decai muito rapidamente, que apenas nas vizinhanças da  $n$ -ésima fileira de sinais elementares se sente as influências de uma região sobre a outra.

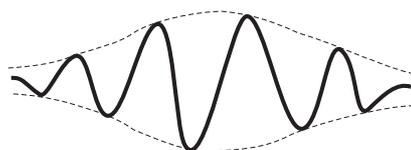
Esta expansão dá um valor complexo  $C_{nk}$ , para cada duas áreas elementares de dimensão  $\frac{1}{2}$ . A razão entre a parte real e a parte imaginária pode ser interpretada como a razão entre os seguintes sinais reais:

$$\frac{\delta_c(t)}{\delta_s(t)} = e^{-\alpha^2(t-t_0)^2} \frac{\cos 2\pi f_0(t-t_0)}{\text{sen} 2\pi f_0(t-t_0)}, \quad (4.26)$$

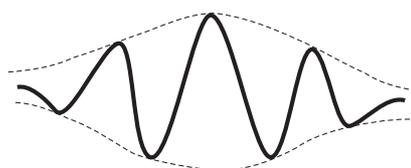
em que  $\alpha^2 = \frac{\pi}{2(\Delta t)^2}$ . Estes sinais podem ser chamados sinais “tipo seno” e “tipo cosseno”. Eles são ilustrados nas Figuras 4.4 e 4.5. Podem ser usados para obter uma expansão real, e assim alocarmos um “datum” em um círculo de área  $\frac{1}{2}$ . Para isso é preciso uma expansão menos simétrica que a anterior, pois a amplitude de um sinal “tipo cosseno”, pode não ser do mesmo tipo. Parte Real dos Sinais elementares:

Na teoria das comunicações uma expansão por números complexos pode vir a ser mais simples que por números reais.

A expansão em “datum” é, em geral, um processo inconveniente, já que os sinais elementares não são ortogonais. Se apenas resultados aproximados são necessários, podemos ignorar os efeitos da interferência na borda de cada sinal elementar. Isto é possível se considerarmos que um sinal tem cerca de 76,8% da sua energia dentro da



**Figura 4.4:** *Sinal tipo senoidal*



**Figura 4.5:** *Sinal tipo cossenoidal*

banda  $\Delta t$  ou  $\Delta f$ , e apenas 11,6% fora da banda para cada lado.

Mesmo havendo sobreposição, isto tem poucas conseqüências na prática, que é uma questão levantada devido o considerável interesse teórico que a mesma desperta. O princípio da causalidade exige as informações referentes a um dado instante  $t$  dependa apenas de instantes anteriores ao mesmo. Mas esta análise não será possível para sinais elementares se não for considerado uma “sobreposição do futuro”. De fato, a causalidade só existe na “linguagem temporal”: mesmo que o domínio da frequência seja usada como referência, este tipo de incerteza é conhecida na física moderna como “quebra da causalidade”. Mas uma análise mais rigorosa só será possível se usarmos um osciloscópio ideal, e assim em nenhum instrumento real de medição, a causalidade no sentido estrito da palavra, não é aplicável na prática, o que impede os engenheiros de usarem a integral de Fourier que é um método completamente não causal para descrição de sinais.

## 4.5 Sinais Transmitidos em Tempo Mínimo

Os sinais elementares os quais foram discutidos na última seção, asseguram a melhor utilização da área de informação, uma vez que oferecem o menor produto entre duração

efetiva  $\Delta t$  e banda efetiva  $\Delta f$ . Como consequência, se for determinada uma frequência efetiva para o canal, o sinal que será transmitido no menor intervalo de tempo terá envelope:

$$\psi(t) = e^{-2\pi(\Delta f)^2(t-\bar{t})^2} \quad (4.27)$$

e sua transformada de Fourier:

$$\Psi(f) = e^{-\frac{\pi}{2}\left(\frac{f-\bar{f}}{\Delta f}\right)^2}. \quad (4.28)$$

Mas o problema que surge na prática é algo diferente. A banda efetiva não é fixada antecipadamente, mas a banda total é conhecida, ou seja,  $f_2 - f_1$  é conhecida, e fora desse intervalo a amplitude será zero. Assim encontrar o sinal que será transmitido pelo canal com menor tempo efetivo, reduz ao problema de encontrar o espectro de  $\Psi(f)$  que assume o valor mínimo para:

$$\Delta t = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\int_{f_1}^{f_2} \frac{d\Psi^*}{df} \frac{d\Psi}{df} df}{\int_{f_1}^{f_2} \Psi^* \Psi df} \quad (4.29)$$

em que  $\Psi(f)$  tem valor nulo fora do intervalo  $f_2 - f_1$ . E isto é equivalente dizer que  $\Psi(f)$  anula-se nos limites de  $f_2$  e  $f_1$ . Por outro lado se  $\Psi(f)$  tem valor finito dentro do intervalo e anula-se fora, a descontinuidade no numerador da Equação (4.29) divergente. Este fato é bem conhecido por Gabor, em que a quebra de frequências no infinito, tem um decaimento hiperbólico, que não é rápido o suficiente para fazer  $\bar{f}^2$  finito.

No apêndice C, em que é provado que o sinal que pode ser transmitido em tempo mínimo tem que ser solução da equação diferencial:

$$\frac{d^2\Psi}{df^2} + \Delta\Psi = 0, \quad (4.30)$$

em que  $\Delta$  é uma constante desconhecida, mas que pode ser calculada, com auxílio das condições que impõem que  $\Psi(f)$  tem que ser nulo nos limites da banda de transmissão. Assim, todas soluções possíveis são da forma:

$$\text{sen} \left( k\pi \frac{f - f_1}{f_2 - f_1} \right) \quad (4.31)$$

para  $k$  inteiro. Isto é referido como  $k$ -ésima característica para a função de transmissão através de um filtro passa-banda, e sua duração efetiva de:

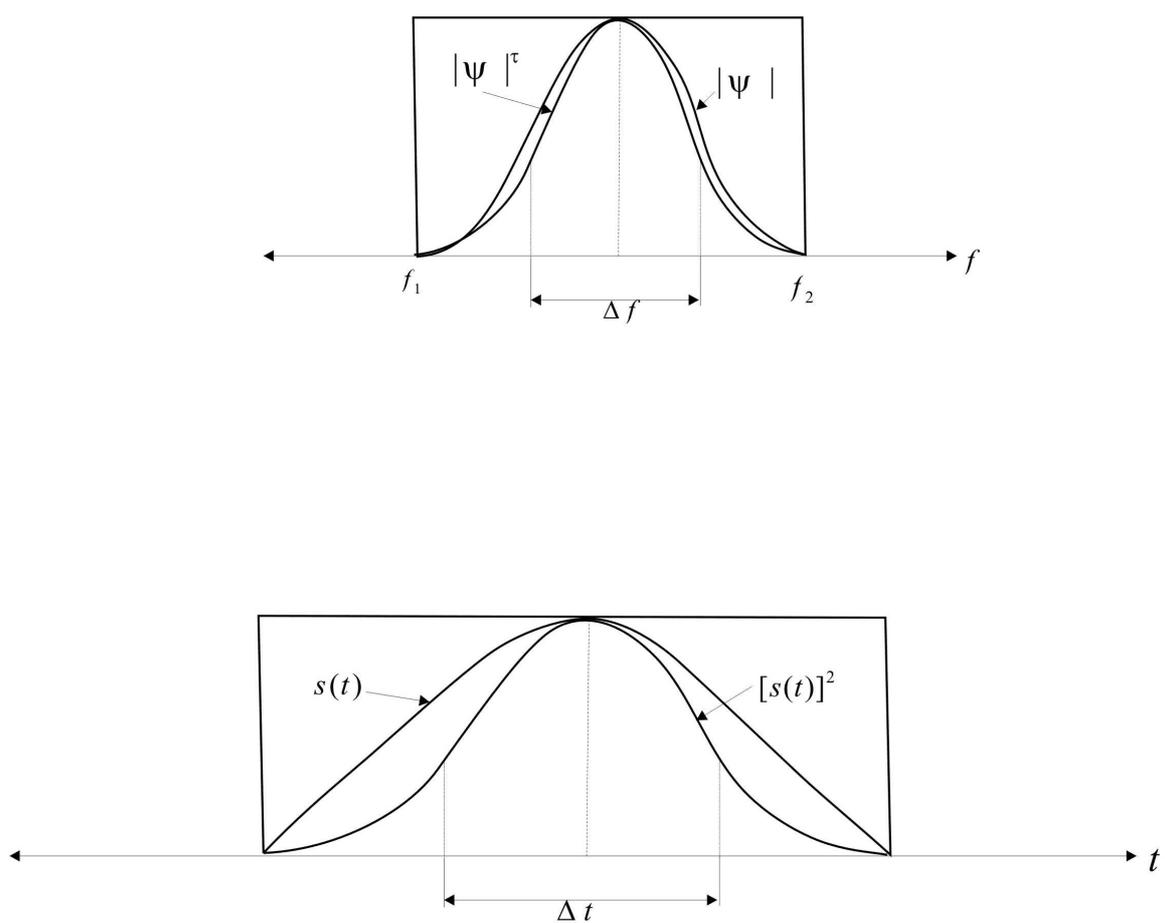
$$\Delta t = \frac{k}{f_2 - f_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (4.32)$$

e banda efetiva de:

$$\Delta f = (f_2 - f_1) \sqrt{\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\pi k^2}} \quad (4.33)$$

A menor duração de  $\Delta t$  ocorre para  $k = 1$ , ou seja, a função característica fundamental é ilustrada na Figura 4.6

O produto do sinal  $\Delta t \Delta f$  é o menor para  $k = 1$ , este valor é de 0,571, isto não é muito mais que o mínimo absoluto.



**Figura 4.6:** Espectro de um sinal que pode ser transmitido no menor tempo possível por um filtro passa-banda; e o sinal no domínio do tempo.

# 5 | WAVELETS BETA

Aqui são introduzidos novas *wavelets* de suporte compacto, relacionadas com a distribuição beta. Elas podem ser construídas a partir de distribuições de probabilidades por intermédio das derivadas *Blur*. Estas novas *wavelets* tem apenas um ciclo, sendo assim chamadas *wavelets* monocíclicas. Elas podem ser consideradas com uma variedade suave das *wavelets* de Haar, cuja forma pode ser ajustada através de dois parâmetros  $a$  e  $b$ . Muitas expressões para *wavelets* beta e funções de escala, como também seu espectro estão em estudo. E sua importância surge da aplicação do Teorema Central do Limite para sinais compactos.

## 5.1 Condições de Admissibilidade e Regularidade

Existem basicamente duas condições a serem atendidas para que um sinal se torne de interesse para ser tratado como *wavelet*.

- Admissibilidade, que é a condição mínima necessária que o sinal deve atender para ser uma *wavelet*;
- Regularidade, que está ligada a suavidade do sinal e seus momentos.

### 5.1.1 Admissibilidade

Esta condição é a condição mínima necessária para que um sinal seja uma *wavelet*. A Transformada de *Wavelets* é uma transformada reversível e aplicável ao Teorema de Parseval, desde que satisfaça a condição de admissibilidade [23]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (5.1)$$

Dois resultados surgem devido esta condição:

- A transformada é reversível, pois todas as funções que são quadrado integrável satisfazem a condição de admissibilidade, podendo ser utilizada para analisar e reconstruir qualquer sinal;
- A função é nula na frequência zero  $|\Psi(\omega)|^2_{\omega=0} = 0$ . Isso garante que a *wavelet* seja um sinal oscilatório, onde seus valores positivos e negativos cancelem-se mutuamente, não havendo nível DC no sinal. Isto garante que  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$ ;

### 5.1.2 Regularidade

A condição de Regularidade requer que a *wavelet* mãe seja suave e que seja concentrada tanto no domínio do tempo como da frequência e que as derivadas da *wavelet* também oscile. Como resultado desta condição surge o conceito de momentos que se anulam. Mas para o melhor entendimento analisa-se os operadores diferenciais multiescala, os quais resultarão em [23]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt \quad m \in [0, M] \quad (5.2)$$

### 5.1.3 Operadores Diferenciais Multiescala

A proposição que segue [24], prova que a wavelet com  $n$  momentos evanescente podem ser escritas como a  $n^{\text{ésima}}$  derivada da função distribuição de probabilidade  $\phi$ , interpretando a transformada *wavelet* como um operador multiescala. Será proposto que  $\psi$  tem um decaimento rápido, isto implicará que para cada redução no expoente  $m \in \mathbb{N}$  vai existir um  $C_m$  tal que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}. \quad (5.3)$$

**Teorema 5.1** *Uma wavelet  $\psi$  com um decaimento rápido tem  $n$  momentos que se anulam se e somente se existe  $\phi$  com um rápido decaimento, tal que:*

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n \phi(t)}{dt^n}. \quad (5.4)$$

*Uma consequência direta disto é:*

$$CWT(a, b) = a^n \frac{d^n}{db^n} (f * \bar{\phi}_a)(b), \quad (5.5)$$

*Em que  $\bar{\phi}_a = a^{\frac{1}{2}} \phi(\frac{-t}{a})$ . E  $\psi$  não terá mais que  $n$  momentos nulos a não ser que  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega \neq 0$ . Observe que sempre que  $\phi$  for uma distribuição isso será verdade pois  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) d\omega = 1 \neq 0$ .*

**Proposição 5.1** *Uma função é continuamente diferenciável com suas fronteiras diferenciáveis se:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{f}(\omega)(1 + |\omega|^p)| d\omega < +\infty \quad (5.6)$$

*Demonstração:* A transformada de Fourier da  $k$  – éxima derivada  $f(t)$  é  $(j\omega)^k \mathcal{F}(\omega)$

*Usando:*

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j\omega t} \hat{f}(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)| d\omega < \infty \quad (5.7)$$

Chega-se a:

$$|f^k(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\bar{\omega})||\omega|^k|d\omega. \quad (5.8)$$

Então a condição (5.6) implica que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\bar{\omega})||\omega|^k|d\omega < +\infty$  para qualquer  $k \leq p$ , deste modo  $f^{(k)}(t)$  fronteiras contínuas.

O rápido decaimento de  $\Psi$  garante que  $\hat{\psi}$  esteja em  $\mathbb{C}^\infty$ . Isto é provado mudando  $f = \Psi$  na proposição anterior teremos a prova. a integral de uma função é igual a sua transformada de Fourier analisada em  $\omega = 0$ . A propriedade da derivada  $(jt)^p f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F^{(p)}(\omega)$  implica que para todo  $k < n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = (j)^k \Psi^{(k)}(0) = 0. \quad (5.9)$$

Pode-se então fazer a seguinte fatoração

$$\Psi(\omega) = (j\omega)^n \Phi(\omega), \quad (5.10)$$

onde  $\Phi(\omega)$  é limitado. O rápido decaimento de  $\phi$  é provado para  $n$ . Para  $n = 1$ ,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \psi(u) du = \int_t^{\infty} \psi(u) du, \quad (5.11)$$

que é devido a (5.3). Observa-se então que ao aumento de 1 na ordem de integração acima de  $n$  o decaimento de  $\phi$  se manterá. Conseqüentemente,  $|\Phi| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt < +\infty$ , pois  $\phi$  tem um rápido decaimento. A transformada de Fourier de (5.4) garante a Equação (5.10), o que implica que  $|\Psi(0)| = 0$ , para  $k < n$ . Se seguirá de (5.9),  $\psi$  tem  $n$  tem momentos nulos.

Para testar se  $\psi$  tem mais que  $n$  momentos nulos, usa-se (5.10) para isto

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n \psi(t) dt = (j)^n \Psi^{(n)}(0) = (-j)^n n! \Phi^{(n)}(0) \quad (5.12)$$

Assim fica claro que  $\psi$  não tem mais que  $n$  momentos nulos se e somente se  $\phi^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \phi(t) dt \neq 0$ .

Deste modo, a transformada wavelet de  $f$  poderá ser escrita como

$$CWT(a, b) = f * \bar{\psi}(u) \quad \text{com} \quad \bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-t}{s}\right) \quad (5.13)$$

■

## 5.2 Preliminares e uma Visão Geral

*Wavelets* estão fortemente conectadas com as distribuições de probabilidade. Recentemente, uma nova visão dentro das **wavelets** foi apresentada, a qual foi referida por Max Born com função-onda [5] a medida em que a Teoria da Informação avança [6]. Muitas *wavelets* contínuas são derivadas de funções densidades de probabilidades (e.g. Sombbrero). Este método também estabelece ligação das distribuição de probabilidades com *wavelets* e derivadas *Blur* [7]. Iniciando este estudo, seja  $P(\cdot)$  uma função distribuição de probabilidade,  $P \in \mathbb{C}^\infty$ , o espaço de sinais complexos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  infinitamente diferenciáveis.

Se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^{n-1} P(t)}{dt^{n-1}} = 0 \quad (5.14)$$

então

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n P(t)}{dt^n} \quad (5.15)$$

é uma *wavelet* gerada por  $P(\cdot)$ . Dada uma *wavelet* mãe  $\psi$  que garanta a condição de admissibilidade [8, 9] então a transformada *wavelet* contínua é definida por

$$CWT(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (5.16)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}.$$

*Wavelets* contínuas de um modo geral não tem suporte compacto, incluindo as de Morlet, Meyer, Mathieu, de Oliveira [10–12]. No caso em que uma *wavelet* seja gerada por uma função de distribuição de probabilidade, temos

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi_n\left(\frac{t-b}{a}\right) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{\partial^n P\left(\frac{t-b}{a}\right)}{\partial t^n}. \quad (5.17)$$

Juntamente

$$\frac{\partial^n P\left(\frac{t-b}{a}\right)}{\partial b^n} = (-1)^n \frac{1}{a^n} P^{(n)}\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (5.18)$$

então

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{\partial^n P\left(\frac{t-b}{a}\right)}{\partial b^n} dt. \quad (5.19)$$

Se a ordem da integração e derivação forem trocadas

$$CWT(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{\partial^n}{\partial b^n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot P\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (5.20)$$

Definindo o sinal filtrado passabaixa como um sinal "*Blur*"

$$\tilde{f}(a, b) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} P\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot P_{a,b}(t) dt, \quad (5.21)$$

uma interpretação interessante pode ser feita: escolha uma escala  $a$  e tome uma versão média (suavizada) do sinal original - como a versão *Blur*  $\tilde{f}(a, b)$ . a derivada

*Blur*

$$\frac{\partial^n}{\partial b^n} \tilde{f}(a, b) \quad (5.22)$$

é a  $n^{\text{ésima}}$  derivada observando um deslocamento do sinal *Blur* de  $b$  com uma escala  $a$ . A derivada *Blur* coincide com a transformada *wavelet*  $CWT(a, b)$  na escala correspondente. O detalhes (alta frequência) são fornecidos pelas derivadas da versão *Blur* do sinal original.

### 5.2.1 Revisando o Teorema Central do Limite

Existe essencialmente três tipos de teorema central do limite: para distribuições ilimitadas, para distribuições causais e para distribuições de suporte compacto [13]. A variável aleatória correspondente a soma de  $N$  independente e identicamente distribuída (i.i.d.) convergem para: uma distribuição Gaussiana, para uma distribuição Chi-quadrado ou uma distribuição Beta (veja tabela 5.1). A Gaussiana tem tido sempre um papel central na engenharia juntamente com sua associação à *wavelet* de Morlet, a qual é conhecida por possuir suporte infinito. A Gaussiana é até o momento a única *wavelet* que alcança o limite inferior desigualdade da incerteza de Gabor [14]. O conceito de Gabor permite concluir que as *wavelets* Gaussianas são mais eficientes ao tratar sinais no domínio tempo-freqüência. Entretanto, nos casos onde a restrição de limitação do sinal for imposta, é esperado que as *wavelets* beta sejam mais eficientes neste domínio de tempo-freqüência. O conceito de entropia da *wavelet* foi recentemente introduzido e a *wavelet* de Morlet também revelou ser uma *wavelet* especial [6, 15]. Entre as *wavelets* de suporte compacto, é esperado que as *wavelets* geradas a partir das distribuições beta possam também desempenhar semelhante papel.

Seja  $p_i(t)$  uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória  $t_i$ , em que

**Tabela 5.1:** Versões diferentes do Teorema Central do Limite: Distribuições Ilimitadas, Distribuições Causais e Distribuições de Probabilidade de Suporte Compacto.

Distribuição Marginal	Distribuição Limite quando $N \rightarrow \infty$
Suporte Ilimitado	$G(t m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$
Distribuição Causal	$\chi^2(t m, \sigma^2) = \frac{t^\alpha \cdot \beta^{-t/\beta}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)}$
Suporte Compacto	$beta(t \alpha, \beta) = K \cdot t^\alpha \cdot (1-t)^\beta, \quad 0 < t < 1$

$i = 1, 2, 3..N$ , ou seja,  $p_i(t) \geq 0$ ,  $(\forall t)$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_i(t) dt = 1. \quad (5.23)$$

Se  $p_i(t) \leftrightarrow P_i(\omega)$ , então  $P_i(0) = 1$  e  $(\forall \omega) |P_i(\omega)| \leq 1$ . Suponham que todas as variáveis sejam independentes. A densidade  $p(t)$  de uma variável aleatória corresponde a soma

$$t = \sum_{i=1}^N t_i \quad (5.24)$$

é dada pelo cálculo da convolução [16]

$$p(t) = p_1(t) * p_2(t) * p_3(t) * \dots * p_N(t). \quad (5.25)$$

Se  $p_i(t) \leftrightarrow P_i(\omega) = |P_i(\omega)| e^{j\Theta_i(\omega)}$ ,  $i = 1, 2, 3..N$  e  $p(t) \leftrightarrow P(\omega) = |P(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}$ , então

$$|P(\omega)| = \prod_{i=1}^N |P_i(\omega)|, \quad \Theta(\omega) = \sum_{i=1}^N \Theta_i(\omega). \quad (5.26)$$

A média e a variância de uma variável aleatória  $t_i$  são, respectivamente

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \cdot p_i(\tau) d\tau, \quad (5.27)$$

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau - m_i)^2 \cdot p_i(\tau) d\tau. \quad (5.28)$$

O que segue pode ser provado a partir dos teoremas [13].

**Teorema 5.2** Teorema Central do Limite para Distribuições de Suporte Ilimitado

*Se as distribuições  $\{p_i(t)\}$  não são distribuições formadas de estruturas periódicas de energia finita, mas de amplitude infinita (tais como um pente Dirac) e  $E(t_i^3) < \infty$ , e*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^2 = +\infty$$

então  $t = \sum_{i=1}^N t_i$  garante, quando  $N \rightarrow \infty$  que,

$$P(\omega) \sim e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} - jm\omega}, \quad (5.29)$$

$$p(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.30)$$

□

De acordo com Gnedenko e Kolmogorov [13], se as distribuições de probabilidades marginais tiverem suporte compacto, então o teorema do limite correspondente será [13]:

**Teorema 5.3** Teorema Central do Limite para Distribuições de Suporte Compacto.

*Seja  $\{p_i(t)\}$  distribuições tais que  $Supp\{p_i(t)\} = (a_i, b_i)(\forall i)$ . E seja*

$$a = \sum_{i=1}^N a_i < +\infty, \quad (5.31)$$

$$b = \sum_{i=1}^N b_i < +\infty. \quad (5.32)$$

É assumido sem perda de generalidade que  $a = 0$  e  $b = 1$ . A variável aleatória definida por (5.24) é garantida quando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$p(t) \sim \begin{cases} k \cdot t^\alpha (1-t)^\beta, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.33)$$

em que

$$\alpha = \frac{m(m - m^2 - \sigma^2)}{\sigma^2}, \quad (5.34)$$

e

$$\beta = \frac{(1 - m)(\alpha + 1)}{m}. \quad (5.35)$$

□

Como a teoria de gerar *wavelets* a partir de distribuições de probabilidades é já bem conhecida, temos como objetivo estudar a relação entre distribuições de suporte compacto e *wavelets*.

### 5.3 WAVELETS Beta: Novas Wavelets de suporte compacto

A distribuição beta é uma distribuição de probabilidade contínua definida no intervalo  $0 \leq t \leq 1$  [17]. É caracterizada por um par de parâmetros, chamados  $\alpha$  e  $\beta$ , de acordo com a equação:

$$P(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} t^{\alpha-1} \cdot (1-t)^{\beta-1}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq +\infty. \quad (5.36)$$

O fator de normalização é  $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ , onde  $\Gamma(\cdot)$  é função fatorial generalizada de Euler e  $B(\cdot, \cdot)$  é a função Beta [17].

Os seguintes parâmetros podem ser calculados:

$$\text{Suporte}(P) = [0, 1] \quad (5.37)$$

$$\text{média} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (5.38)$$

$$\text{moda} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \quad (5.39)$$

$$\text{variância} = \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (5.40)$$

$$\text{Função Característica} = M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu), \quad (5.41)$$

Onde  $M(\cdot, \cdot, \cdot)$  é a função de Kummer também chamada de função hipergeométrica [18, 19]. O  $N^{\text{ésimo}}$  momento de  $P(\cdot)$  pode ser encontrado usando

$$\begin{aligned} \text{momento}(N) &= \int_0^1 t^N \cdot p_i(t) dt = \frac{B(\alpha + N, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{B(\alpha + \beta, N)}{B(\alpha, N)}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

A derivada da distribuição beta pode ser facilmente calculada.

$$P'(t) = \left( \frac{\alpha - 1}{t} - \frac{\beta - 1}{1 - t} \right) P(t). \quad (5.43)$$

Uma transformação pode ser realizada para gerar uma nova distribuição de probabilidade com média zero e variância unitária [16], a qual implica em um suporte não normalizado  $T = \frac{1}{\sigma} = T(\alpha, \beta)$ .

Seja uma nova variável aleatória definida por  $T \cdot (t - m)$ . essa Variável tem média zero e variância unitária. sua densidade de probabilidade correspondente é dada por

$$\begin{aligned} P(t|\alpha, \beta) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)T(\alpha, \beta)} \left( \frac{t + m(\alpha, \beta)T(\alpha, \beta)}{T(\alpha, \beta)} \right)^{\alpha-1} \\ &\quad \left( 1 - \frac{t + m(\alpha, \beta)T(\alpha, \beta)}{T(\alpha, \beta)} \right)^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

As *wavelets*- $\beta$  podem ser geradas a partir destas distribuições modificadas usando o conceito de derivadas *blur*. A (em um modo) função escala associada com as *wavelets* é dada por

$$\phi_{beta}(t|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)T^{\alpha+\beta-1}} \cdot (t-a)^{\alpha-1} \cdot (b-t)^{\beta-1}, \quad (5.45)$$

$a \leq t \leq b$ . Desde que  $P(\cdot|\alpha, \beta)$  seja unimodal, a *wavelet* gerada por

$$\psi_{beta}(t|\alpha, \beta) = (-1) \frac{dP(t|\alpha, \beta)}{dt} \quad (5.46)$$

tem apenas um ciclo (um ciclo negativo e um ciclo positivo).

Uma expressão para as *wavelets* beta de primeira ordem pode ser facilmente calculadas.

No suporte  $\psi(t|\alpha, \beta)$ ,  $a \leq t \leq b$ ,

$$\psi_{beta}(t|\alpha, \beta) = \frac{-1}{B(\alpha, \beta)T^{\alpha+\beta-1}} \cdot \left[ \frac{\alpha-1}{t-a} - \frac{\beta-1}{b-t} \right] \cdot (t-a)^{\alpha-1} \cdot (b-t)^{\beta-1} \quad (5.47)$$

Como um caso particular as *wavelets* betas simétricas são dadas por

$$\psi_{beta}(t|\alpha, \alpha) = K(\alpha) \cdot t \cdot [t^2 - (2\alpha + 1)]^{\alpha-2}, \quad (5.48)$$

em que

$$K(\alpha) = (-1)^\alpha \cdot \frac{2(\alpha-1)}{(2\sqrt{2\alpha+1})^{2\alpha-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha)}{[\Gamma(\alpha)]^2}. \quad (5.49)$$

A principal característica das *wavelets* beta de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são suporte e comprimento do suporte:

$$\begin{aligned} \text{Suporte}(\psi) &= \left[ \frac{-1}{\sqrt{\beta/\alpha}} \sqrt{\alpha + \beta + 1}, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\alpha + \beta + 1} \right] \\ &= [a, b] \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\text{Comprimento do Suporte}(\psi) = T(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta) \sqrt{\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha\beta}}. \quad (5.51)$$

O parâmetro  $R = b/|a| = \beta/\alpha$  está relacionado com um “balanço cíclico”, e é definido como a razão entre os comprimentos de uma *wavelet* com uma parte causal e uma não causal. Pode ser facilmente mostrado que o instante de transição  $t_{zerocross}$  da primeira para a segunda metade do ciclo é dado por

$$t_{zerocross} = \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta - 2)} \sqrt{\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha\beta}}. \quad (5.52)$$

Escalonando-se podemos encontrar *wavelets* para qualquer  $\alpha, \beta > 1$ , o comportamento da *wavelet* na extremidade do seu suporte pode ser descontínuo (e.g. veja Figura 5.2). No entanto é fácil garantir a continuidade da *wavelet* de acordo com:

**Proposição 5.2** *Wavelets Monocíclicas Beta de parâmetros  $\alpha > 2$  e  $\beta > 2$  são wavelets contínuas, suaves de suporte compacto.*

*Demonstração: É fácil verificar que,  $\psi_{\beta\alpha}(t|\alpha, \beta) = 0 \quad \forall t < a$  e  $\forall t > b$ . Então nosso interesse se restringe aos pontos extremos do suporte, mas  $\psi_{\beta\alpha}(a|\alpha, \beta) = \psi_{\beta\alpha}(b|\alpha, \beta) = 0$  desde que  $\alpha > 2$  e  $\beta > 2$ . ■*

Lembre que  $1 \leq \alpha, \beta \leq +\infty$  e  $a < 0 < b$ .

O Espectro da *wavelet* beta pode ser encontrado em termos da função Hipergeométrica de Kummer [18], a qual é solução da equação

$$z \frac{d^2\omega}{dz^2} + (\beta - z) \frac{d\omega}{dz} - \alpha\omega = 0. \quad (5.53)$$

Tomemos  $\psi_{\beta\alpha}(t|\alpha, \beta) \leftrightarrow \Psi_{BETA}(\omega|\alpha, \beta)$  que denote o par de transformada de Fourier da *wavelet*. Este espectro também é representado por  $\Psi_{BETA}(\omega)$  por simplicidade. Isto pode ser provado aplicando as propriedades da transformada de Fourier assim

$$\Psi_{BETA}(\omega) = -j\omega \cdot M\left(\alpha, \alpha + \beta, -j\omega(\alpha + \beta)\sqrt{\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha\beta}}\right) \cdot \exp(j\omega\sqrt{\frac{\alpha(\alpha + \beta + 1)}{\beta}}). \quad (5.54)$$

O espectro de algumas *wavelets* monocíclicas é apresentado na Figura 5.1. O espectro foi avaliado usando a relação:

$$M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 e^{j\nu t} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (5.55)$$

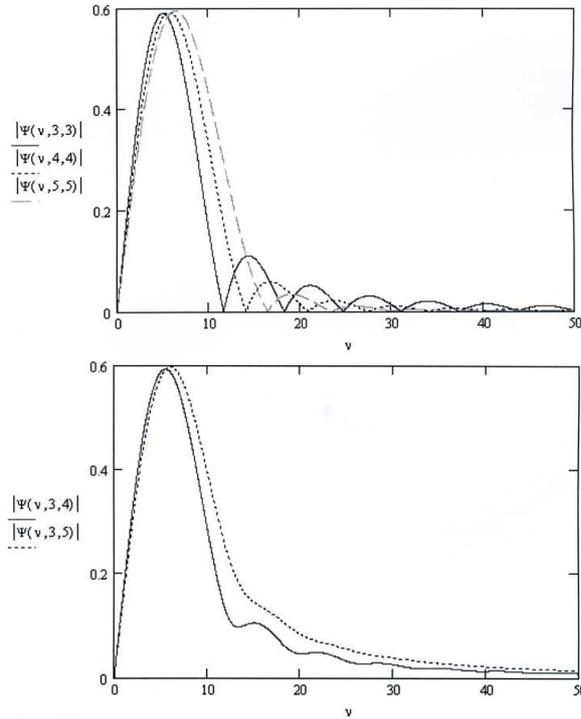
Apenas *wavelets* simétricas ( $\alpha = \beta$ ) tem zeros no espectro (5.1a). algumas *wavelets* assimétricas ( $\alpha \neq \beta$ ) são mostradas na Figura 5.1b. De modo interessante observamos que  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros que garantem ou não a simetria, contudo para as *wavelets* beta sempre é válido que

$$|\Psi_{BETA}(\omega|\alpha, \beta)| = |\Psi_{BETA}(\omega|\beta, \alpha)|. \quad (5.56)$$

O espectro das *wavelets* betas simétricas são comparáveis aos das *wavelets* de Haar de mesmo suporte, dependendo isto apenas da precisão do cálculo computacional deste espectro. O primeiro valor nulo da wavelet de Haar com suporte  $T(\alpha, \beta)$  ocorre na frequência  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T(\alpha, \beta)/2}$  ou  $\nu_0 = 4\pi$ , e também em  $6\pi, 8\pi$  etc. Para  $\alpha = 3$ , o primeiro valor nulo ocorrerá na frequência  $\nu = 11.526918406\dots$ , a qual está próxima a  $\nu_0 = 4\pi$  como esperado. Quando  $\alpha$  aumenta, a metade do ciclo da *wavelet* tende a diminuir (ex. 5.2b e 5.2e), em consequência disto há um o aumento da frequência onde ocorre o primeiro ponto de zero da transformada (5.1a).

## 5.4 Wavelets Beta de Ordem $N$

Devido as características das distribuições beta, sua primeira derivada tem apenas um ciclo. Derivadas de ordens mais altas também podem gerar *wavelets*, desde que as

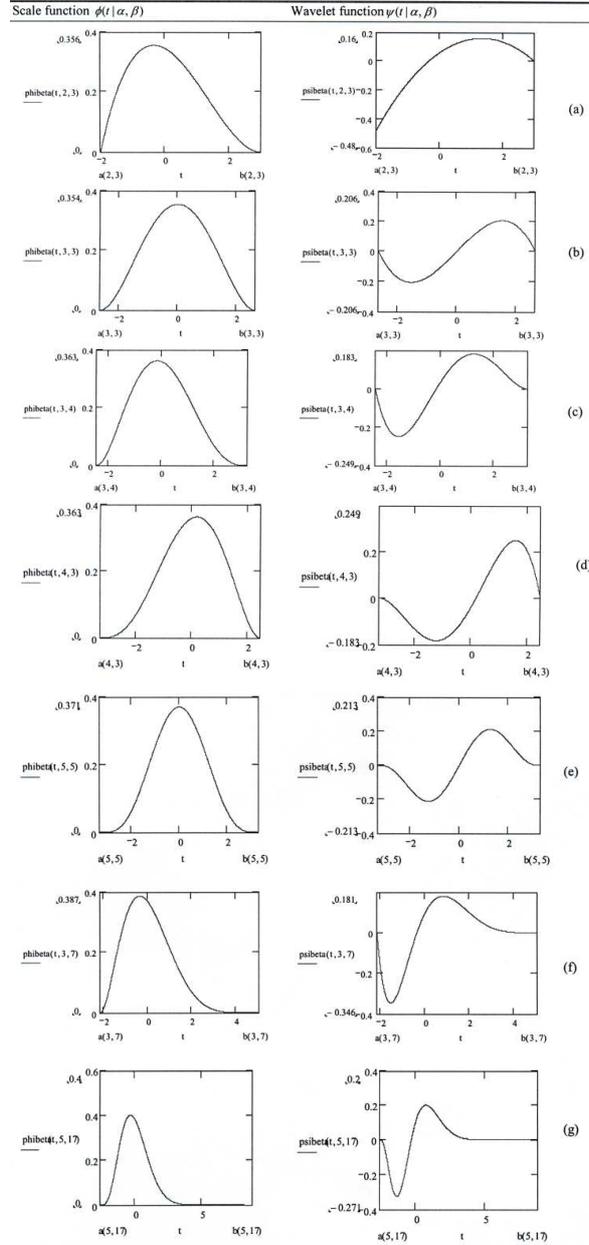


**Figura 5.1:** Magnitude do espectro  $\Psi_{BETA}(\omega)$  para algumas wavelets beta,  $|\Psi_{BETA}(\nu|\alpha, \beta)| \times \nu$  para: a) Wavelets beta simétricas  $\alpha = \beta = 3$  (sólida),  $\alpha = \beta = 4$  (pontilhada) and  $\alpha = \beta = 5$  (tracejada); b) Wavelets beta assimétricas  $\alpha = 3, \beta = 4$  (sólida) e  $\alpha = 3, \beta = 5$  (pontilhada). Em ambos os gráficos o eixo das frequências é normalizado  $\nu = \omega T(\alpha, \beta)$ .

extremidades do suporte sejam agora um intervalo aberto. As *wavelets* beta de ordem  $N$  são definidas por

$$\psi_{beta}(t|\alpha, \beta) = (-1)^N \frac{d^N P(t|\alpha, \beta)}{dt^N}. \quad (5.57)$$

As *wavelets* geradas desta forma são denominadas como de ordem  $N$ . Elas existem para ordens  $N \leq \text{Min}(\alpha, \beta) - 1$ . Depois de alguma manipulação algébrica, uma expressão fechada pode ser encontrada:

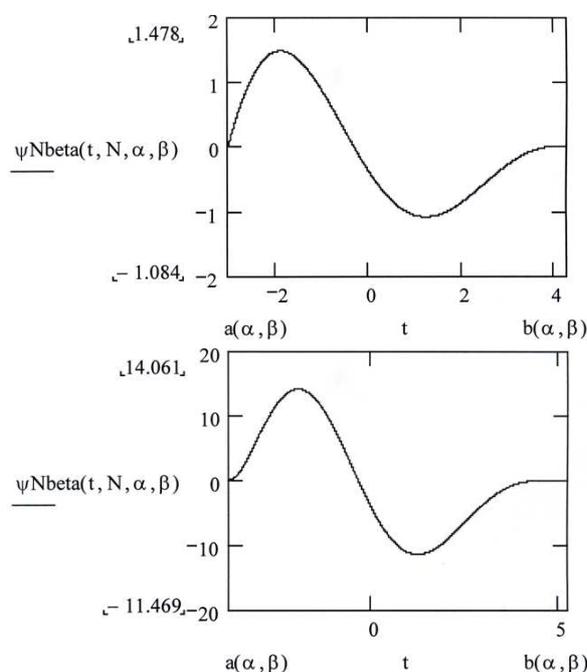


**Figura 5.2:** Função escala e wavelet para diversos parâmetros: a)  $\alpha = 2, \beta = 3$  b)  $\alpha = \beta = 3$  c)  $\alpha = 3, \beta = 4$  d)  $\alpha = 4, \beta = 3$  e)  $\alpha = \beta = 5$  f)  $\alpha = 3, \beta = 7$  g)  $\alpha = 5, \beta = 17$ .

$$\begin{aligned}
 \Psi_{beta}(t|\alpha, \beta) &= \frac{(-1)^N}{B(\alpha, \beta) \cdot T^{\alpha+\beta-1}} \sum_{n=0}^N \text{sgn}(2n - N) \cdot \\
 &\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha - (N - n))} (t - a)^{\alpha-1-(N-n)} \cdot \\
 &\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - n)} (b - t)^{\beta-1-n}.
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

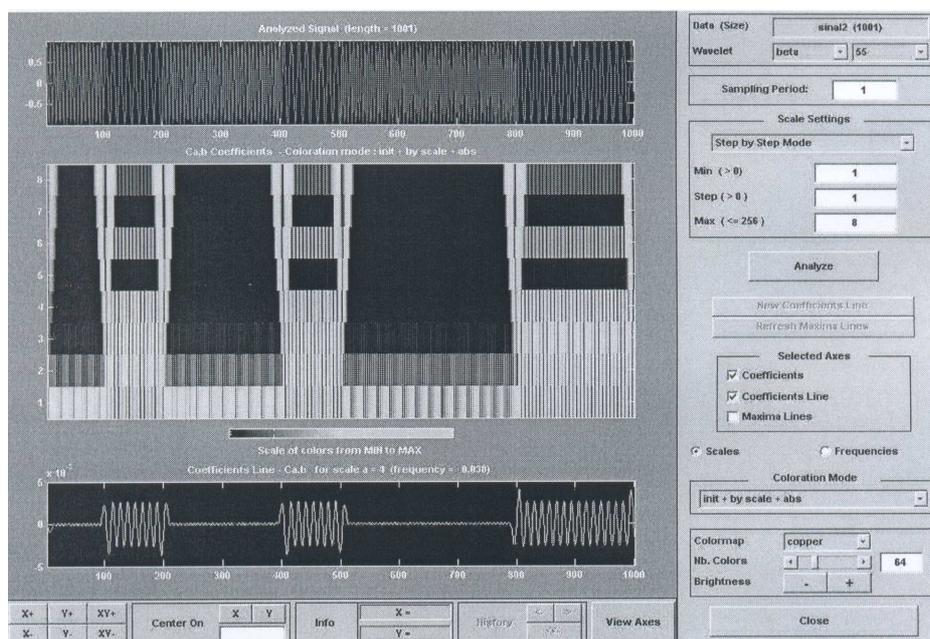
A escolha da ordem  $N$  desempenha algum papel no que se refere a regularidade das *wavelets* beta, e pode está relacionado com a regularidade de Hölder e Sobolev. Este tópico não será tratado neste momento [24].

Um par de *wavelets* beta de ordem mais altas são mostradas na Figura 5.3. Com o objetivo de analisar algumas aplicações potenciais destas *wavelets*, com auxílio do computador obtivemos.



**Figura 5.3:** Wavelets beta de ordens mais altas para diversos parâmetros: a)  $N = 3, \alpha = 5, \beta = 7$ ; b)  $N = 5, \alpha = 8, \beta = 11$ .

Como é de esperar as *wavelets* de suporte compacto tem uma boa estimativa para sinais de curta duração, sendo assim as *wavelets* beta também possui esta característica, não importando quão curta seja a duração do sinal, pois há uma escala apropriada para que o suporte da wavelet seja aquele intervalo de tempo. Assim as características locais podem ser modeladas mais eficientemente do que se analisasse numa região distanciada da ocorrência dos dados. O principal empecilho das *wavelets* Haar é sua descontinuidade, englobando assim uma faixa larga no espectro. Em contraste, as *wavelets* beta



**Figura 5.4:** Wavelets *Beta* visualizadas no *Matlab*<sup>TM</sup> usando o comando *wavemenu*. O sinal analisado é um sinal FSK. Esta decomposição wavelet pode ser usado para implementar um eficiente discriminador de frequências.

podem fornecer um melhor balanço entre a resolução tempo frequência devido a sua forma suave. Para um determinado comprimento de suporte (resolução de tempo), uma *wavelet* beta fornece um espectro estreito (resolução em frequência) que corresponde a wavelet Haar de mesmo suporte. Atualmente um dos programas mais poderosos na análise de *wavelets* é *Matlab*<sup>TM</sup> [20], especialmente no que diz respeito a interface gráfica disponível. No *Matlab*<sup>TM</sup> existe um *toolbox* especialmente para *wavelet*, lá as *wavelets* estão divididas em cinco tipos (com o comando *wave info* é possível ver estes tipos): (i) *wavelets* simples, (ii) *wavelets* infinitas e regulares, (iii) *wavelets* ortogonais de suporte compacto, (iv) pares de *wavelet* biortogonais e suporte compacto, (v) *wavelets* complexas. a Figura 5.4 ilustra a implementação da wavelet beta no *Matlab*<sup>TM</sup>. Os arquivos-m que permitem os cálculos da transformada *wavelet* estão atualmente disponíveis como (*freeware*) na URL: <http://www2.ee.ufpe.br/codec/WEBLET.html> (*new wavelets*).

# 6 | ESTUDO DA RESOLUÇÃO DAS WAVELETS BETA DE 1<sup>a</sup> ORDEM

## 6.1 Análise de Resolução

Nos estudos sobre energia e resolução, baseados no trabalho de Gabor, constatou-se que os sinais que preenchem melhor o diagrama de informação são as oscilações com envelope gaussiano.

Por ser um caso limite do Teorema Central do Limite para sinais com suporte finito, ou seja, a convolução de sinais de suporte finito convergem no limite para uma distribuição beta, como já demonstrado antes, temos

$$f(t) = g(t)\Pi_{(a,b)} \quad (6.1)$$

Onde  $g(t)$  é uma função de qualquer suporte infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(t) * \dots * f_n(t)) \rightarrow \frac{1}{B(\alpha, \beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \quad (6.2)$$

Do mesmo modo que a convolução de funções que possuam suporte finito tendem no limite a distribuições Gaussianas.

É o Teorema Central do Limite que justifica o melhor preenchimento do diagrama de

energia pelas distribuições Gaussianas que atingem o piso de  $\Delta t \Delta f = \frac{1}{2}$ , conjecturamos que este teorema dentre as funções de suporte compacto a que vai melhor preencher o diagrama de energia é a distribuição beta. Isto nos motivou fazer um estudo do diagrama de energia por estas distribuições, para em seguida extê-lo para as *wavelets* beta e comparar com as *wavelets* de Haar.

Este estudo inicia-se do mesmo modo que o outro, através do cálculo dos segundos momentos  $\bar{t}^2$  e  $\bar{f}^2$  da distribuição beta.

$$\bar{t} = \frac{\int \psi^* t \psi dt}{\int \psi^* \psi dt} = \frac{\int t \cdot \beta(t)^2 dt}{\int \beta(t)^2 dt} \quad (6.3)$$

$$\bar{f} = \frac{\int \Psi^* f \Psi df}{\int \Psi^* \Psi df} = \frac{\int f \cdot B(f)^2 df}{\int B(f)^2 df} \quad (6.4)$$

$$\overline{(t - \bar{t})^2} = \frac{\int \psi^* (t - \bar{t})^2 \psi dt}{\int \psi^* \psi dt} = \frac{\int (t - \bar{t})^2 \cdot \beta(t)^2 dt}{\int \beta(t)^2 dt} \quad (6.5)$$

$$\overline{(f - \bar{f})^2} = \frac{\int \Psi^* (f - \bar{f})^2 \Psi df}{\int \Psi^* \Psi df} = \frac{\int (f - \bar{f})^2 \cdot B(f)^2 df}{\int B(f)^2 df} \quad (6.6)$$

Em que  $\beta(t)$  e  $B(f)$  valem

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} \\ B(f) &= \frac{e^{-2i\pi(f)} t^a M([a, -b+1], [1+a], t)}{(\beta(a, b)) (a+b) \frac{1}{\sqrt{\frac{a+b+1}{ab}}} a} \end{aligned}$$

$M(\cdot, \cdot, \cdot)$  é a forma hipergeométrica de Kummer

Assim a resolução da *wavelet* beta será calculada por

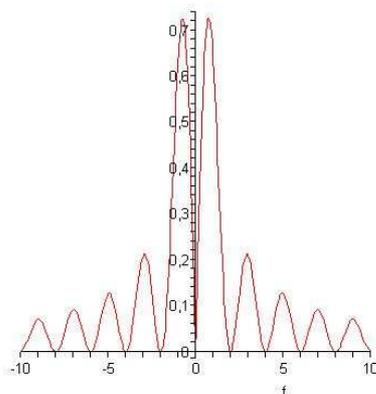
$$\Delta t = [2\pi\overline{(t - \bar{t})^2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta f = [2\pi\overline{(f - \bar{f})^2}]^{\frac{1}{2}}$$

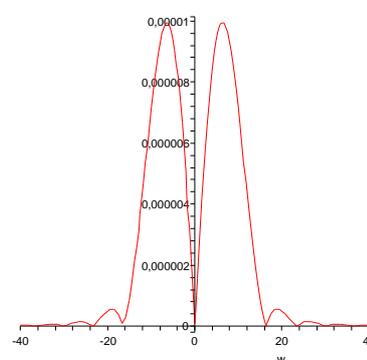
assim

$$\Delta t \Delta f = \sqrt{2\pi} \frac{\int (t - \bar{t})^2 \cdot \beta(t)^2 dt}{\int \beta(t)^2 dt} \cdot \frac{\int (f - \bar{f})^2 \cdot B(f)^2 df}{\int B(f)^2 df} \quad (6.7)$$

A tabela que segue após das Figuras 6.1 e 6.2 tem os valores da resolução para algumas *wavelets* beta e da wavelet de Haar, que foi escolhida para comparação por ser de suporte compacto assim como a *wavelet* beta, mas também devido seu espectro na frequência. Observe o espectro de uma *wavelet* de Haar e de uma *wavelet* beta Figuras 6.1 e 6.2 respectivamente:



**Figura 6.1:** Espectro da Wavelet mãe de Haar



**Figura 6.2:** Espectro da Wavelet mãe Beta  $\alpha = 5$   $\beta = 5$

A Figura 6.2 é a mesma Figura 1.5 repetida aqui para facilitar a comparação do leitor.

**Tabela 6.1:** Resolução das Wavelets Haar e Beta

Haar			
Resolução	Tempo	Frequência	$\Delta_f \cdot \Delta_t$
<i>Wavelet</i> de Haar	$\frac{1}{12}$	$\infty$	$\infty$ (diverge)
<i>Wavelets</i> Beta Simétricas			
Wavelet beta $\alpha = 5, \beta = 5$	$\frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(-2+2a+2b)}{\Gamma(2b+2a)\Gamma(-1+2a)} = \frac{5}{19}$	$\frac{27}{2\pi^2}$	2,4488
Wavelet beta $\alpha = 6, \beta = 6$	$\frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(-2+2a+2b)}{\Gamma(2b+2a)\Gamma(-1+2a)} = \frac{6}{23}$	$\frac{144}{7\pi^2}$	1,0790
<i>Wavelet</i> beta $\alpha = 7, \beta = 7$	$\frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(-2+2a+2b)}{\Gamma(2b+2a)\Gamma(-1+2a)} = \frac{7}{27}$	$\frac{115}{62\pi^2}$	1,2619
<i>Wavelet</i> beta $\alpha = 11, \beta = 11$	$\frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(-2+2a+2b)}{\Gamma(2b+2a)\Gamma(-1+2a)} = \frac{11}{43}$	$\frac{1053}{34\pi^2}$	2,0122
<i>Wavelet</i> beta $\alpha = 17, \beta = 17$	$\frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(-2+2a+2b)}{\Gamma(2b+2a)\Gamma(-1+2a)} = \frac{17}{67}$	$\frac{2835}{582\pi^2}$	3,1499
<i>Wavelets</i> Beta Assimétrica			
<i>Wavelet</i> beta $\alpha = 3, \beta = 4$	$\frac{\Gamma(2a+1)\Gamma(-2+2a+2b)}{\Gamma(2b+2a)\Gamma(-1+2a)} = \frac{56}{26}$	54	10,385

# 7

## ESTUDO DA PROPRIEDADE DA ORTOGONALIDADE EM *Wavelets* BETA

Neste capítulo, a ortogonalidade da função escala e da *wavelet* beta serão investigadas. Esta análise é importante para determinar o sinal que será a função escala, bem como identificar se as *wavelets* betas são ortogonais, não provocando perdas ou ruídos na decomposição bem como na reconstrução do sinal.

### 7.1 Função Escala

Uma função escala para um sinal *wavelet* deve atender dois pré-requisitos:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$ , observe que qualquer distribuição de probabilidade atende este pré-requisito;
- $\langle \phi(t), \psi(t) \rangle = 0$ , ver-se-á que qualquer distribuição também atende este pré-requisito, para derivada de primeira ordem.

Assim considere uma distribuição qualquer  $\phi(t)$  e sua derivada

$$\psi(t) = (-1) \frac{d\phi}{dt}, \quad (7.1)$$

assim

$$\begin{aligned} \langle \phi(t), \psi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\psi(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\psi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \left( -\frac{d\phi}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d\phi_1\phi_2}{dt} = \phi_1^{(1)}\phi_2 + \phi_1\phi_2^{(1)}. \quad (7.2)$$

Como  $\phi_1 = \phi_2$  podemos fazer:

$$\frac{d\phi_1\phi_1}{dt} = \phi_1^{(1)}\phi_1 + \phi_1\phi_1^{(1)} = 2\phi_1^{(1)}\phi_1, \quad (7.3)$$

ou seja

$$\phi_1^{(1)}\phi_1 = \frac{1}{2} \frac{d(\phi_1\phi_1)}{dt} \quad (7.4)$$

Assim

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{d\phi}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{d(\phi_1\phi_1)}{dt} dt. \quad (7.5)$$

Usando a propriedade da linearidade da integral e da derivada obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_1\phi_1 dt = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_1^2 dt. \quad (7.6)$$

Isto á devido o fato que  $\phi^2$  continua sendo uma distribuição do mesmo tipo que a gerou (ex.: uma distribuição beta ao quadrado continua uma distribuição beta), assim o valor da integral será unitário e a derivada de uma constante é sempre nula.

Resultando em

$$\begin{aligned}
\langle \phi, \psi \rangle &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi_1^2 dt \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \phi' dt = 0.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Assim está demonstrado que um sinal *wavelet* gerado pela derivada *Blur* de primeira ordem é ortogonal à distribuição de probabilidade que a gerou, sendo assim esta distribuição será a escala para a *wavelet*.

Conclui-se daí que a distribuição beta é a função escala para a *wavelet* beta de primeira ordem.

## 7.2 Ortogonalidade das *Wavelets* Beta de 1ª Ordem

Considere as duas distribuições beta [16] que seguem, adotando a notação  $\phi(t) = \beta(t)$  para as distribuições beta:

$$\begin{aligned}
\beta_1(t) &= k_1 t^{\alpha_1 - 1} (1 - t)^{\beta_1 - 1} \\
\beta_2(t) &= k_2 t^{\alpha_2 - 1} (1 - t)^{\beta_2 - 1},
\end{aligned} \tag{7.8}$$

por simplicidade será usado  $\alpha_i := \alpha_i - 1$  e  $\beta_i := \beta_i - 1$ , onde  $i \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
\beta_1(t) &= k_1 t^{\alpha_1} (1 - t)^{\beta_1} \\
\beta_2(t) &= k_2 t^{\alpha_2} (1 - t)^{\beta_2},
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Como a *wavelet* beta de primeira ordem nada mais é que a derivada *Blur* da distribuição beta, disto tem-se:

$$\begin{aligned}\psi_{\beta_1}(t) &= \frac{d}{dt} (k_1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\beta_1-1}) \\ \psi_{\beta_2}(t) &= \frac{d}{dt} (k_2 t^{\alpha_2-1} (1-t)^{\beta_2-1}).\end{aligned}\quad (7.10)$$

Dáí se escreve

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\beta_1}(t), \psi_{\beta_2}(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (k_1 t^{\alpha_1} (1-t)^{\beta_1}) \cdot \frac{d}{dt} (k_2 t^{\alpha_2} (1-t)^{\beta_2}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ \alpha_1 [k_1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\beta_1}] - \beta_1 [k_1 t^{\alpha_1} (1-t)^{\beta_1-1}] \} \\ &\quad \cdot \{ \alpha_2 [k_2 t^{\alpha_2-1} (1-t)^{\beta_2}] - \beta_2 [k_2 t^{\alpha_2} (1-t)^{\beta_2-1}] \} dt.\end{aligned}\quad (7.11)$$

Efetuando-se as multiplicações obtém-se

$$\begin{aligned}k_1 k_2 \int_{-\infty}^{\infty} \{ \alpha_1 \alpha_2 [t^{\alpha_1+\alpha_2-2} (1-t)^{\beta_1+\beta_2}] - \alpha_1 \beta_2 [t^{\alpha_1+\alpha_2-1} (1-t)^{\beta_1+\beta_2-1}] - \\ \alpha_2 \beta_1 [t^{\alpha_1+\alpha_2-1} (1-t)^{\beta_1+\beta_2-1}] + \beta_1 \beta_2 [t^{\alpha_1+\alpha_2} (1-t)^{\beta_1+\beta_2-2}] \} dt.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Observa-se que temos em cada termo aditivo novas distribuições beta com  $\alpha$  e  $\beta$  atualizados. Assim:

$$\begin{aligned}\alpha_a &= \alpha_1 + \alpha_2 - 2, \quad \beta_a = \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_b &= \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \quad \beta_b = \beta_1 + \beta_2 - 1, \\ \alpha_c &= \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_c = \beta_1 + \beta_2 - 2.\end{aligned}$$

Substituindo  $\alpha$  e  $\beta$  nas potências chega-se a

$$k_1 k_2 \int_{-\infty}^{\infty} \{ \alpha_1 \alpha_2 [t^{\alpha_a} (1-t)^{\beta_a}] - \alpha_1 \beta_2 [t^{\alpha_b} (1-t)^{\beta_b}] - \alpha_2 \beta_1 [t^{\alpha_b} (1-t)^{\beta_b}] + \beta_1 \beta_2 [t^{\alpha_c} (1-t)^{\beta_c}] \} dt. \quad (7.13)$$

Continuando tem-se:

$$k_1 k_2 \left\{ \alpha_1 \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} [t^{\alpha_a} (1-t)^{\beta_a}] dt - \alpha_1 \beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} [t^{\alpha_b} (1-t)^{\beta_b}] dt - \alpha_2 \beta_1 \int_{-\infty}^{\infty} [t^{\alpha_b} (1-t)^{\beta_b}] dt + \beta_1 \beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} [t^{\alpha_c} (1-t)^{\beta_c}] dt \right\} \quad (7.14)$$

em que cada uma das integrais assumirá valor unitário pois cada uma delas nada mais é que a integral de uma distribuição beta. Assim tem-se:

$$\begin{aligned} & k_1 k_2 \{ \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2 \} \\ & = k_1 k_2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Daí decorre que

- Se  $\alpha = \beta \Rightarrow \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$ , assim as wavelets são ortogonais;
- Se  $\alpha \neq \beta \Rightarrow \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = k_1 k_2 (\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2) \neq 0$ , assim as wavelets não são ortogonais.



# DISCRETIZAÇÃO DA *Wavelet* BETA

Em meados de outubro de 2006, foi encontrado um estudo paralelo sobre *wavelet* beta, porém este estudo situa-se essencialmente no contexto de compressão de imagem, e foi realizado por Chori Ben Amar [23], em 2005. Embora a investigação realizada nesse artigo difere do nosso estudo (uma vez que foi baseada nas definições de função beta encontrada nos estudos de redes neurais), causou certa surpresa – já estes estudos foram realizados de forma paralela. Em alguns pontos em comum, observaram-se os mesmos resultados, embora deduzidos por caminhos completamente diferentes.

Uma sugestão interessante para discretizar a *wavelet* beta é sugerida no referido artigo, uma vez que a formulação inicial desta dissertação não abrangeu a discretização. Por ser esta abordagem de grande importância para implementação digital desta *wavelet*, expõe-se a seguir a análise teórica realizada por Amar em seu artigo.

## 8.1 Discretização da Wavelet Beta por um Sistema Multirresolução Ortogonal

Um sistema ortogonal MRA pode ser gerado pelo escalonamento e deslocamento de uma função, como já foi visto no Capítulo 2 de análise de multirresolução.

A função de interpolação  $\phi(k) = \delta_k$  para  $k \in \mathbb{Z}$  [23].

O Delta de Kronecker, vale  $\phi(k) = 1$  se  $k = 0$ , e vale  $\phi(k) = 0$  se  $k \neq 0$ . Esta função de interpolação é bastante utilizada na literatura de *wavelets* [23].

A maior vantagem da função de interpolação é calcular os coeficientes do filtro wavelet sem necessidade de uma expressão analítica para a função escala [23] - neste estudo isso foi necessário pois os autores não encontraram a função escala para a *wavelet* beta.

Assim, para uma *wavelet* de suporte compacto  $[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= 2 \sum_{k=-N}^N g_k \phi(2t - k) \\ &= 2 [g_{-N} \phi(2t + N) + g_{-N+1} \phi(2t + N - 1) + \dots + g_{N-1} \phi(2t - N + 1) + g_N \phi(2t - N)]\end{aligned}$$

como  $\phi(0) = 1$  e  $\phi(k) = 0$  para  $k \neq 0$  tem-se:

$$\psi\left(\frac{N}{2}\right) = 2 \sum_{k=-N}^N g_k \phi\left(2\frac{N}{2} - k\right).$$

Expandindo, chega-se a

$$\psi\left(\frac{N}{2}\right) = 2 [g_{-N} \phi(N + N) + g_{-N+1} \phi(N + N - 1) + \dots + g_{N-1} \phi(N - N + 1) + g_N \phi(N - N)],$$

assim, ao manipular a expressão acima e substituir os valores em cada ponto, obtém-se

$$g_N = \frac{\psi\left(\frac{N}{2}\right)}{2}. \quad (8.1)$$

Desse modo, se procede até encontrar todos os coeficientes:

$$g_k = \frac{\psi\left(\frac{k}{2}\right)}{2}, \quad (8.2)$$

o filtro  $g$  será calculado apenas com os coeficientes  $g_k$  não nulos.

Usando o espelhamento, podemos achar os coeficientes do filtro  $h$ , assim  $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ , podemos encontrar assim os coeficientes do filtro para a função escala.

É preciso verificar se  $\sum h = 1$ ,  $\sum g = 0$  e se  $\|h\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Esta liberdade tem o custo de se perder em ortogonalidade para a função escala [23].

Assim, o algoritmo sugerido por Amar para calcular esses filtros é:

- Inicialize aleatoriamente  $\alpha, \beta, t_0$  e  $t_l (t_l < t_0)$ ;
- Amostre a wavelet com um passo igual a 0,5 no intervalo  $\{1, 2, \dots, l\}$ ;
- Divida estas amostras por 2 para encontrar os coeficientes do filtro  $g$ ;
- Usando  $g_n = (-1)^n h_{1-n}$  encontra-se os coeficientes do filtro da função escala;
- Normalize o filtro  $h$  para ter  $\sum h = 1$  por  $\frac{h}{\sum h}$ .
- Recalcule  $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ ;
- Verifique se  $\sum h = 1, \sum g = 0$  e se  $\|h\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , como também se os filtros são realmente ortogonais;
- Se a restrição do passo anterior não for verificada, ajuste  $\alpha, \beta, t_0$  e  $t_l$  e volte para o segundo passo.

Nas observação finais encontra-se o seguinte:

- Os valores do início e do fim do suporte no tempo  $t_0$  e  $t_l$  influenciam no tamanho do filtro, bem como o passo da amostragem;
- Se  $\alpha = \beta$  os filtros são biortogonais e simétricos;

- Se  $\alpha \neq \beta$  os filtros são ortogonais e simétricos - no caso contínuo, com a função escala sendo a própria distribuição beta, isto aqui não foi satisfeito, sendo esta mais uma vantagem de encontrar as versões discretas sem a função escala, pois pode-se também usar as *wavelets* assimétricas.

# 9 CONCLUSÃO

Este trabalho se propôs a analisar as *wavelets* construídas a partir de distribuições beta, analisar suas propriedades e os conceitos que fazem parte de sua construção, como o uso da derivada *Blur*. Estas *wavelets* são monocíclicas e sua relevância decorre do teorema central do limite aplicado para *wavelets* de suporte compacto.

Os capítulos 5,6,7 apresentam as principais contribuições originais realizadas nesta dissertação.

As *wavelets* de suporte compacto estão entre as *wavelets* mais úteis e usadas. Aqui foi introduzida uma nova classe de *wavelet* deste tipo. Estas *wavelets* podem ser concebidas como se fossem uma *wavelet* de Haar suavizada, pois ambas são monocíclicas. As *wavelets* beta apresentam a vantagem de serem suaves, tendo também uma flexibilidade extra, pois os ciclos podem ser ajustados. Um trabalho futuro consiste na investigação de como as *wavelets* beta podem ser aproximadas usando filtros FIR ou IIR. Em comparação com outras *wavelets* de suporte compacto (ex. dBN, coiflets etc.) as *wavelets* beta tratadas neste trabalho têm as seguintes vantagens: i) são regulares e suaves. ii) tem apenas um ciclo. iii) têm uma equação analítica que as descreve (forma fechada). iv) sua importância está relacionada ao teorema central do limite. A

desvantagem é que as *wavelets* assimétricas não são ortogonais.

Muitos sinais têm natureza cíclica, ou seja, eles são compostos por ciclos ininterruptos, como ocorrem com os sinais de potência, alguns sinais biomédicos ou sinais provenientes da modulação FSK. Desde que muitas *wavelets* geradas têm natureza cíclica, as propriedades locais dos sinais podem ser melhor investigadas, por meio da análise das mudanças de um ciclo ao outro. É de grande importância investigar as pequenas diferenças de um ciclo ao outro. Este comportamento pode ser usado para analisar sinais de modulação ou distúrbios em sistemas de potência. Em especial, *wavelets* beta aplicadas em sistemas digitais com modulação FSK estão sendo investigadas.

Essa família de *wavelets* foi utilizada visando investigar algumas aplicações onde estas *wavelets* possam vir a ser mais apropriadas dentro da análise de sinais. Especificamente, esse tipo de *wavelet* pode ser usada na análise de sinais em rede elétrica devido a natureza das componentes deste sinal serem cíclicas, semelhando-se em comportamento às *wavelet* propostas.

Também se pretende usar este tipo de *wavelets* para análise de sinais obtidos a partir de encefalogramas de cobaias de laboratório (ratos) para estudar o comportamento do mecanismo cerebral em caso de traumas relacionados à existência de dores intensas. Esta abordagem é promissora já que estes tipos de sinais são de curta duração e esta *wavelet* tem uma largura espectral estreita atendendo a necessidade de analisar estes tipos de sinais.



**Lema A.1** *Raiz quadrada de uma distribuição beta normalizada*

$$P(t) = \phi(t|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \quad (\text{A.1})$$

*é proporcional a outra distribuição beta.*

*Demonstração:* Uma manipulação algébrica conduz a  $\phi^2(t|\alpha, \beta) = \lambda_0 \cdot \phi(t|2\alpha - 1, 2\beta - 1)$ , onde

$$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \beta) = \frac{B(2\alpha - 1, 2\beta - 1)}{B^2(\alpha, \beta)}. \quad (\text{A.2})$$

■

Tomemos  $D^{beta} = \{\phi_{beta}(t|\alpha, \beta)\}_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}}$  o conjunto de todos sinais possíveis do gerados a partir de distribuições de probabilidade beta (possivelmente não normalizadas).

**Lema A.2** *O quadrado de qualquer distribuição de probabilidade beta é proporcional a outra distribuição beta de mesma forma e mesmo suporte.*

*Demonstração:* O suporte de  $\phi_{beta}(t|\alpha, \beta)$  permanece o mesmo e,  $\phi_{beta}^2(t|\alpha, \beta) = \lambda_0 \phi(t|2\alpha - 1, 2\beta - 1)$ ,  $t \in [a, b]$ , onde

$$\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \beta) = \frac{T(2\alpha - 1, 2\beta - 1)^{2(\alpha+\beta-1)}}{T^2(\alpha, \beta) \cdot T(2\alpha - 1, 2\beta - 1)}. \quad (\text{A.3})$$

■

**Corolário A.1**  $D^{\text{beta}}$  é uma classe de sinais que obedecem ao fechamento das seguintes operações: rising to a power (pair exponent) e convoluções seguidas (para um número par de vezes), ex.  $\phi_{\text{beta}}(t|\alpha, \beta) \in D^{\text{beta}} \Rightarrow \phi_{\text{beta}}^2(t|\alpha, \beta) \in D^{\text{beta}}$  and  $\phi_{\text{beta}}(t|\alpha, \beta) * \phi_{\text{beta}}(t|\alpha, \beta) \in D^{\text{beta}}$ .

Uma propriedade similar é partilhada com outras densidades relacionadas com o teorema central do limite.

**Lema A.3**  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu)|^2 d\nu = \lambda_0(\alpha, \beta)$ .

*Demonstração:* Identidade de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu)|^2 d\nu = \int_0^1 \phi_{\text{beta}}^2(t|\alpha, \beta) dt \quad (\text{A.4})$$

e a prova segue aplicando o lema 1. ■

**Lema A.4** O segundo momento de uma função hipergeométrica de Kummer ao quadrado  $M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu)$  é dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu)|^2 d\nu = \chi(\alpha, \beta), \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\begin{aligned} \chi(\alpha, \beta) = & \left( \frac{1}{B^2(\alpha, \beta)} \right) \left[ (\alpha - 1)^2 B(2\alpha - 3, 2\beta - 3) \right. \\ & - 2(\alpha - 1)(\alpha + \beta - 2) B(2\alpha - 3, 2\beta - 3) \\ & \left. + (\alpha + \beta - 2)^2 B(2\alpha - 3, 2\beta - 3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

*Demonstração:* Segue da identidade de Parseval que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu)|^2 d\nu = \int_0^1 \left[ \frac{d\phi(t|\alpha, \beta)}{dt} \right]^2 dt. \quad (\text{A.7})$$

Agora

$$\frac{d\phi(t|\alpha, \beta)}{dt} = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \cdot \left[ \frac{\alpha - 1}{t} - \frac{\beta - 1}{1 - t} \right] \cdot t^{\alpha-1} \cdot (1 - t)^{\beta-1} \quad (\text{A.8})$$

e assim com o cálculo da integral

$$\int_0^1 \left[ \frac{(\alpha - 1) - (\alpha + \beta - 2) \cdot t}{t(1 - t)} \right]^2 \cdot t^{2\alpha-2} \cdot (1 - t)^{2\beta-2} dt \quad (\text{A.9})$$

completa a prova. ■

A energia da função escala beta  $\phi_{beta}(t|\alpha, \beta)$  e a função *wavelet*  $\psi_{beta}(t|\alpha, \beta)$  podem ser calculadas de acordo com a seguinte proposição.

**Proposição A.1** *As energias da função escala beta e da wavelet são, respectivamente,*

$$E_{\phi_{beta}} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{beta}^2(t|\alpha, \beta) dt = \frac{\lambda_0(\alpha, \beta)}{T(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.10})$$

and

$$E_{\psi_{beta}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{beta}^2(t|\alpha, \beta) dt = \frac{\chi(\alpha, \beta)}{T^3(\alpha, \beta)}. \quad (\text{A.11})$$

*Demonstração:* Uma simples mudança de variáveis leva a

$$E_{\phi_{beta}} = \int_a^b \phi_{beta}^2(t|\alpha, \beta) dt = \frac{1}{T(\alpha, \beta)} \int_a^b \phi^2(t|\alpha, \beta) dt \quad (\text{A.12})$$

e a prova da primeira parte segue aplicando o lema 1. Seja  $\mathfrak{F}$  o operador Transformada de Fourier. A indentidade de Parseval pode ser usada na avaliação de  $E_{\psi_{beta}}$ :

$$\int_a^b \psi_{beta}^2(t|\alpha, \beta) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathfrak{F} \left( \frac{dP(t|\alpha, \beta)}{dt} \right) \right|^2 d\omega, \quad (\text{A.13})$$

então

$$E_{\psi_{beta}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \omega \cdot M(\alpha, \alpha + \beta, -j\omega \cdot T(\alpha, \beta)) \right|^2 d\omega. \quad (\text{A.14})$$

Com uma mudança de variável adequada  $\nu = \omega \cdot T(\alpha, \beta)$ ,

$$E_{\psi_{beta}} = \frac{1}{2\pi T^3(\alpha, \beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 \left| M(\alpha, \alpha + \beta, j\nu) \right|^2 d\nu \quad (\text{A.15})$$

e a prova segue do lema 4. ■

**Proposição A.2** *Seja  $\alpha > 1$  and  $\beta > 1$ . a constante de admissibilidade  $c_\Psi$  de uma wavelet beta*

$$c_\psi(\alpha, \beta) = \frac{2\pi\lambda_0(\alpha, \beta)}{T(\alpha, \beta)} < +\infty \quad (\text{A.16})$$

*Demonstração:* Desde que

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_{BETA}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (\text{A.17})$$

então

$$c_\Psi(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \omega M(\alpha, \alpha + \beta, -j\omega \cdot T(\alpha, \beta)) \right|^2 d\omega \quad (\text{A.18})$$

e a prova é completada usando o lema 3. ■

Outras propriedades interessantes das *wavelets* beta podem ser encontradas na referência [21].



## B.1 Momentos

**Teorema B.1** *Este teorema relaciona as derivadas de  $F(\omega)$  na origem sua transformada inversa  $f(t)$ . O  $n$ -ésimo momento  $m_n$  de  $f(t)$  é definido por*

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.1})$$

e o teorema garante que

$$(-j)^n m_n = \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.2})$$

Quando  $n = 0$  segue de

$$\frac{d^n f}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega),$$

com  $\omega = 0$  obtém-se então

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = A(0) \quad (\text{B.3})$$

Para realizar a prova do caso geral expande-se  $e^{j\omega t}$  termo a termo; pois da Equação (B.1) a equação

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^n}{n!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!} \quad (\text{B.4})$$

Expandindo  $F(\omega)$  em série infinita,

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} \frac{\omega^n}{n!} \quad (\text{B.5})$$

E associando os coeficientes das mesmas potências de  $\omega$  nas Equações (B.4) e (B.5)

**comentário B.1** Tudo que está descrito acima só é válido se e somente se os momentos de  $f(t)$  são finitos; a existência de  $\frac{d^n F(0)}{d\omega^n}$  não garante que os momentos  $m_n$  sejam finitos.

## B.2 Momentos da função Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}} \quad (\text{B.6})$$

## B.3 Séries de Potências de $A(\omega)$ e $\phi(\omega)$

Têm-se um interesse especial em relacionar os momentos de uma função real  $f(t)$  com o declive  $\phi(\omega)$  e com a curvatura  $A(\omega)$  na origem. Por simplicidade de notação, assume-se que a área que  $f(t)$  engloba é igual a 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = A(0) = 1 \quad (\text{B.7})$$

Se expandirmos a função par  $A(\omega)$  e a função ímpar  $\phi(\omega)$  em séries de potência vamos obter, a partir da Equação (B.7)

$$A(\omega) = 1 + \frac{a_2}{2!}\omega^2 + \dots \quad (\text{B.8})$$

$$A(\omega) = b_1\omega + \frac{b_3}{3!}\omega^3 + \dots \quad (\text{B.9})$$

Assim

$$e^{j\phi(\omega)} = 1 + jb_1\omega - \frac{b_1^2}{2!}\omega^2 + \text{potências de ordem mais alta de } \omega$$

Então

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \left(1 + \frac{a_2}{2!}\omega^2 + \dots\right) \cdot \left(1 + jb_1\omega - \frac{b_1^2}{2!}\omega^2 + \dots\right) \\ &= 1 + jb_1\omega - \frac{a_2 - b_1^2}{2!}\omega^2 + \dots \end{aligned}$$

Da Equação (B.4) e da igualdade acima pode ser concluído que

$$b_1 = -m_1 \quad a_2 = m_1^2 - m_2. \quad (\text{B.10})$$

As quantidades  $\eta$  e  $\delta^2$  podem ser introduzidas de acordo com

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \eta)^2 f(t)dt \quad (\text{B.11})$$

$\eta = m_1$  é o centro de gravidade (ou média) de  $f(t)$ , e  $\sigma^2$  é o centro de inércia (ou dispersão). Assim

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt - 2\eta \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt + \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = m_2 - m_1^2.$$

Então, veja Equação (B.10)

$$\eta = -b_1 = -\frac{d\phi(0)}{d\omega} \quad \sigma^2 = -a_2 = -\frac{d^2 A(0)}{d\omega^2}, \quad (\text{B.12})$$

assim a inclinação negativa de  $\phi(\omega)$  na origem é igual a média de  $f(t)$  e a curvatura de  $A(\omega)$  é igual a sua dispersão.

## B.4 Convolução de dois pulsos

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) \delta(t - \tau - t_2) d\tau = \delta(t - (t_1 + t_2)) \quad (\text{B.13})$$

Este é um resultado obtido do produto de distribuições, onde o produto de uma distribuição  $g(t)$  por uma função ordinária é uma distribuição  $g(t)f(t)$  que pode ser definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(t)f(t)]\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)[f(t)\phi(t)]dt, \quad (\text{B.14})$$

garantido pela lei da associatividade; isto é possível se  $f(t)\phi(t)$  é uma função de teste. O produto entre duas distribuições é geralmente indefinida; entretanto sua convolução é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)g_2(t - \tau)d\tau \right] \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t - \tau)\phi(t)dt \right] d\tau, \quad (\text{B.15})$$

onde  $\phi(t)$  é uma função qualquer.

## B.5 Espectro Periódico em Frequência

Se uma seqüência no tempo é de um trem de pulsos equidistantes, então

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(t - n\tau). \quad (\text{B.16})$$

Deste modo sua transformada de Fourier é dada por

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-j\omega n\tau} \quad (\text{B.17})$$

é claro que o período é de  $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$

$$F\left(\omega + \frac{2\pi}{\tau}\right) = F(\omega)$$

e da Equação (B.17) temos a sua expansão em série de Fourier, com o sinal do expoente trocado. Assim

$$A_n = \frac{1}{\Omega} \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} F(\omega) e^{+j\omega n\tau} d\omega \quad (\text{B.18})$$

Os dois exemplos que seguem são de particular interesse na teoria das probabilidades

**Exemplo B.1** Distribuição de Poisson. *A função  $f(t)$  é definida em*

$$f(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta(t - n) \quad (\text{B.19})$$

onde  $n$  é uma constante arbitrária nula para  $t < 0$ , e sua transformada de Fourier é dada por

$$F(\omega) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-j\omega n} = e^{\lambda(e^{-j\omega} - 1)} \quad (\text{B.20})$$

*Com amplitude e fase*

$$A(\omega) = e^{\lambda(\cos \omega - 1)} \quad \phi(\omega) = -\lambda \text{sen}(\omega) \quad (\text{B.21})$$

$f(t)$  é mostrado na Figura B.1 para  $\lambda = 2$ . O fator  $e^\lambda$  é introduzido na equação B.19 que torna a área total  $F(0)$  de  $f(t)$  igual a 1

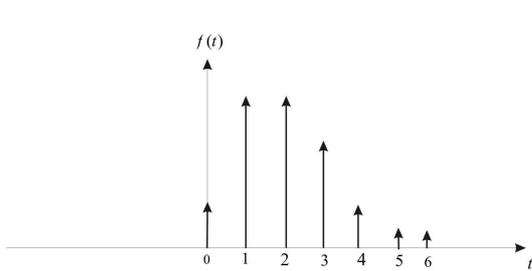


Figura B.1

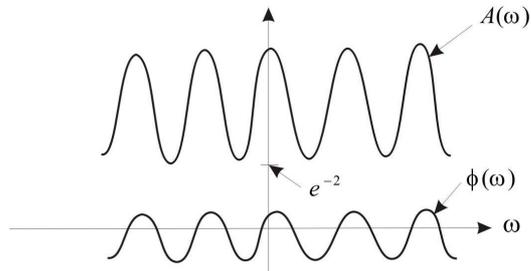


Figura B.2

**Exemplo B.2** Distribuição Binomial [17]. O termo binomial se torna claro se  $f(t)$  for representada por sua transformada  $F(\omega)$

$$F(\omega) = (p + qe^{j\omega})^n \quad p + q = 1 \quad (\text{B.22})$$

Expandindo e usando o par

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

Assim

$$\sum_{k=0}^n p^k q^{n-k} \delta(t - k). \quad (\text{B.23})$$

Novamente pela condição  $p + q = 1$  é possível fazer  $F(0) = 1$ .



## C.1 A Desigualdade de Schwartz e Sinais Elementares

A Desigualdade:

$$\left(\int \psi \cdot \psi^* d\tau\right)^2 \leq 4 \left(\int \psi \tau^2 \psi^* d\tau\right) \left(\int \frac{d\psi}{d\tau} \cdot \frac{d\psi^*}{d\tau} d\tau\right) \quad (\text{C.1})$$

é válida para qualquer função real ou complexa e diferenciável e que se extingue no limite de integração. O que segue é uma modificação da prova dada por Weyl [40].

Se  $a_1, b_1$  são dois conjuntos de  $n$  números reais ou complexos. Um dos teoremas estudados por H.A. Schwartz assegura que:

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq (a_1 a_1^* + \dots + a_n a_n^*) (b_1 b_1^* + \dots + b_n b_n^*) \quad (\text{C.2})$$

Se  $a$  e  $b$  são números reais, isto pode ser interpretado como o fato de que o cosseno do ângulo de dois vetores com componentes  $a_1, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_n$  em um espaço euclidiano de dimensão  $n$  é menor que a unidade. Isto pode ser facilmente entendido como um espaço euclidiano de qualquer dimensão e um plano de duas dimensões pode passar por quaisquer dois vetores que passam pela origem: assim o ângulo entre eles tem a

mesma interpretação que a geometria no plano. A equação C.2 é uma generalização disto para o espaço “Hermitiano”, no qual as componentes ou coordenadas dos vetores são elas próprias números complexos.

Pela passagem para o limite a soma em (C.2) pode ser substituída pela integral, então:

$$\sum a_1 b_1 \longrightarrow \int f(\tau)g(\tau)d\tau$$

E o mesmo pode ser feito com as demais somas. A variável  $\tau$  agora faz parte do índice da integral. A desigualdade de Schwartz agora se torna

$$\left| \int fg d\tau \right|^2 \leq \left( \int ff^* d\tau \right) \left( \int gg^* d\tau \right) \quad (\text{C.3})$$

Isto ainda continua válido ao substituir  $f$  e  $g$  por seus conjugados, assim:

$$\left| \int f^* g^* d\tau \right|^2 \leq \left( \int ff^* d\tau \right) \left( \int gg^* d\tau \right) \quad (\text{C.4})$$

Somando (C.3) e (C.4) obtem-se:

$$\begin{aligned} 2 \left( \int ff^* d\tau \right) \left( \int gg^* d\tau \right) &\geq \left| \int fg d\tau \right|^2 + \left| \int f^* g^* d\tau \right|^2 \\ &\geq \left[ \int fg d\tau + \int f^* g^* d\tau \right]^2 \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A segunda parte desta desigualdade assegura que a soma dos módulos ao quadrado de dois números complexos conjugados, nunca é menor que a metade do quadrado das somas.

Sejam:

$$f = \tau\Psi \quad g = \frac{d\Psi}{d\tau} \quad (\text{C.6})$$

Substituindo em (C.5) temos:

$$4\left(\int f f^* d\tau\right)\left(\int g g^* d\tau\right) \geq \left[\int \Psi \frac{d\Psi^*}{d\tau} d\tau + \int \Psi^* \frac{d\Psi}{d\tau} \tau d\tau\right]^2 \quad (\text{C.7})$$

O lado direito deve ser transformado em integral parcial em:

$$\int \left(\Psi \frac{d\Psi^*}{d\tau} d\tau + \int \Psi^* \frac{d\Psi}{d\tau}\right) \tau d\tau = \int \tau \frac{d(\Psi\Psi^*)}{d\tau} d\tau = - \int \Psi\Psi^* d\tau \quad (\text{C.8})$$

em que se assumiu que  $\psi$  se extingue no limite de integração. Substituindo esta expressão em (C.7) vamos obter a desigualdade (C.1).

Mais uma vez se assume que  $\Psi$  se anula no limite de integração. Substituindo esta expressão em (C.7), pode-se obter a desigualdade.

Para encontrar os sinais elementares é preciso investigar as condições sob as quais a desigualdade se torna uma igualdade. a partir da investigação geométrica da desigualdade de Schwartz C.2, podemos concluir que a igualdade ocorrerá se e somente se os dois vetores  $a$  e  $b$ , tem a mesma direção, ou seja:

$$b_1 = C a_1$$

No espaço Hermitiano, a direção não se altera com a multiplicação por um número complexo, assim  $C$  não precisa ser real.

Esta condição também pode ser usada na Equação (C.1), mas com uma diferença, a relação (C.1) será uma equação apenas se ambas as condições (C.3) e (C.4) forem igualdades, ou seja, se as duas relações que se seguem forem verdadeiras:

$$f = C g \quad \text{e} \quad f^* = C' g^* \quad (\text{C.9})$$

Onde  $C$  e  $C'$  são constantes reais ou complexas. Mas estas duas equações são

equivalentes se e somente se:

$$C' = C^* \quad (\text{C.10})$$

na qual as duas equações em (C.9) se tornam idênticas. Ao substituirmos  $f$  e  $g$  em (C.6), tem-se as duas equações equivalentes:

$$\frac{d\Psi^*}{d\tau} = C\tau\Psi \quad \text{e} \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = C^*\tau\Psi^* \quad (\text{C.11})$$

A partir destas podemos eliminar  $\Psi$  ou seu conjugado  $\Psi^*$  e conduzir isto a uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi}{d\tau} \right) = CC^*\tau\Psi \quad (\text{C.12})$$

Multiplicando ambos os lados por um fator integrante  $\left( \frac{d\Psi}{d\tau} \frac{1}{\tau} \right)$ , isto se torna integrável e dá:

$$\left( \frac{1}{\tau} \frac{d\Psi}{d\tau} \right) = CC^*\Psi^2 + \text{constante} \quad (\text{C.13})$$

Mas a constante pode ser escolhida como sendo nula, e no infinito  $\Psi$  e  $\frac{d\Psi}{d\tau}$  precisa se extinguir. Obtendo-se a equação de primeira ordem:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \pm (CC^*)^{\frac{1}{2}} \tau \Psi \quad (\text{C.14})$$

A solução é única, exceto por um fator constante multiplicando:

$$\Psi = e^{\pm \frac{1}{2}|C|\tau^2} \quad (\text{C.15})$$

Entre as soluções possíveis serão mantidas apenas aquelas que possuem sinal negativo, por outro lado o sinal pode não se anular no infinito. Substituindo  $\frac{1}{2}|C| = \alpha^2$

obteremos o envelope do sinal elementar. O sinal de  $\Psi$  é resultado da multiplicação por  $\text{cis}2\pi f(t - \bar{t})$ , que já foi discutido na seção 4.3.

Será conveniente destacar brevemente a análise baseada em sinais elementares e o método de ondas da mecânica quântica. A partir de agora respondemos a pergunta: “Qual a função  $\Psi$  torna  $\Delta t \Delta f$  mínimo, sob a condição de que  $\Psi$  se extingue no infinito?” Este é um problema do cálculo das variações, que conduz, a uma equação mais geral que a C.12, conhecida como “Equação de onda de um oscilador harmônico” [30]:

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2} + (\lambda - \alpha^2\tau)\Psi = 0,$$

em que  $\lambda$  e  $\alpha$  são constantes reais. É desta equação que a Equação (C.12) é um caso especial, e suas soluções se estendem a zero no infinito se e somente se:  $\lambda = 2(2n + 1)$ .

Aqui  $n$  é um número inteiro positivo. Esta “característica” das equações de onda diferem apenas por uma constante:

$$\Psi_n = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\tau^2} \frac{d^n}{d\tau^n} e^{-\alpha^2\tau^2}$$

que são os conhecidos polinômios de Hermite e formam a base da análise das ondas mecânicas para os problemas do oscilador linear. Eles partilham com a distribuição de probabilidade gaussiana - que pode ser considerada uma função de Hermite de ordem zero - a propriedade das suas transformadas de Fourier serem de mesmo tipo. O produto  $\Delta f \Delta t$  para os polinômios de Hermite de ordem  $n$  é:

$$\Delta f \Delta t = \frac{1}{2}(2n + 1)$$

Isto significa dizer que as funções de Hermite ocupam áreas no diagrama de informação com áreas de dimensão  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ . Por causa da ortogonalidade, as funções de Hermite permitem serem usadas para expandir os sinais, daí vem sua importância para

a mecânica das ondas. Mas eles não são tão importantes para análise da continuidade dos sinais emitidos, como eles partem do pressuposto de um instante de tempo diferente de  $t = 0$ , e eles não permitem a subdivisão da área de informação em células elementares que não sofram sobreposição umas das outras.

## C.2 Sinais Transmitidos em Tempo Mínimo

Pode ser conveniente usar a “linguagem em termos de freqüência”, ou seja, expressar o sinal por sua transformada de Fourier  $\Psi(f)$ . O problema em fazer a duração efetiva do sinal mínima, é que  $\Psi(f) = 0$  fora do intervalo  $f_1 - f_2$ . Então:

$$\Delta t = \frac{1}{(2\pi)^2 M_0} \int_{f_1}^{f_2} \frac{d\Psi}{df} \cdot \frac{d\Psi^*}{df} df \quad (\text{C.16})$$

Precisa se minimizada, onde:

$$M_0 = \int_{f_1}^{f_2} \Psi^* \Psi df$$

Isto é equivalente a fazer o numerador em (C.16) mínimo, com a condição auxiliar  $M_0 = \text{constante}$ , e isto pode ser feito pelo método de Lagrange na seguinte forma:

$$\delta \int_{f_1}^{f_2} \left( \frac{d\Psi}{df} \cdot \frac{d\Psi^*}{df} + \Lambda \Psi^* \Psi \right) df = 0 \quad (\text{C.17})$$

Em que  $\Lambda$  é um multiplicador desconhecido. A variação do primeiro termo é:

$$\begin{aligned} \delta \int_{f_1}^{f_2} \left( \frac{d\Psi}{df} \cdot \frac{d\Psi^*}{df} \right) df &= \int_{f_1}^{f_2} \left( \frac{d\Psi}{df} \delta \frac{d\Psi^*}{df} + \frac{d\Psi^*}{df} \delta \frac{d\Psi}{df} \right) df \\ &= \int_{f_1}^{f_2} \left( \frac{d\Psi}{df} \frac{d\delta\Psi^*}{df} + \frac{d\Psi^*}{df} \frac{d\delta\Psi}{df} \right) df \\ &= \left[ \frac{d\Psi}{df} \delta\Psi^* + \frac{d\Psi^*}{df} \delta\Psi \right]_{f_1}^{f_2} - \int_{f_1}^{f_2} \left( \frac{d^2\Psi}{df^2} \delta\Psi^* + \frac{d^2\Psi^*}{df^2} \delta\Psi \right) df \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Mas no limite  $\Psi$  tem que tender a zero, fora do intervalo considerado e precisa ser contínuo também, caso contrário a integral (C.16) pode divergir. Assim temos  $\delta\Psi = \delta\Psi^* = 0$ , assim o primeiro termo se anula. A variação no segundo termo em (C.17) é:

$$\Lambda \int (\Psi^* \delta\Psi + \Psi \delta\Psi^*) df \quad (\text{C.19})$$

A condição (C.17) fornece:

$$\int_{f_1}^{f_2} \left[ \left( \frac{d^2\Psi^*}{df^2} - \Lambda\Psi^* \right) \delta\Psi + \left( \frac{d^2\Psi}{df^2} - \Lambda\Psi \right) \delta\Psi^* \right] df \quad (\text{C.20})$$

e isto pode ser completo por variações arbitrárias de  $\delta\psi$  se, e somente se

$$\frac{d^2\Psi}{df^2} - \Lambda\Psi = 0$$

Esta equação diferencial a qual tem que ser satisfeita pelo sinal transmitido no menor tempo. Esta é a solução discutida na seção 4.5.

# Bibliografia

- [1] H.M. de Oliveira, *Wavelets: Entrando na Onda*. Notas de curso publicação interna do Departamento de eletrônica e Sistemas, UFPE, Recife, 2002.
- [2] H.M. de Oliveira, *Análise de Fourier e Wavelets*, Editora Universitária, 2007. (in press)
- [3] B. B. Hubbard, *Ondes et Ondelets. La saga d'un outil mathématique*, Belin - Pour la Science, Paris, 2006.
- [4] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS - NSF Regional Conferences Series in Applied Mathematics, 1992.
- [5] A. Beisen, *Concepts of Modern Physics*, New York: McGraw-Hill Series in Fundamental Physics, 1994.
- [6] H.M. de Oliveira, Shannon and Renyi Entropy of Wavelets, *Anais do XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, SBrT'04, Belém, Sept., 2004. Available: <http://www2.ee.ufpe.br/codec/publicacoes.html>
- [7] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Boston: Birkhauser, 1994.
- [8] P.A. Moretin, *Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*. [Wave and wavelets: from Fourier analysis to wavelets], São Paulo: Edusp, 1999.

- [9] H.M. de Oliveira, *Análise de Sinais para Engenheiros: Wavelets*, Brasport Livros e Multimídia, série da Sociedade Brasileira de Telecomunicações, Rio de Janeiro, 2007.
- [10] A. Bultheel, Learning to Swim in a Sea of Wavelets, *Bull. Belg. Math. Soc.*, vol. 2, pp. 1-46, 1995.
- [11] H.M. de Oliveira, L.R. Soares and T.H. Falk, A Family of Wavelets and a New Orthogonal Multiresolution Analysis Based on the Nyquist Criterion, *J. of the Brazilian Telecomm. Soc.*, Special issue, vol. 18, N.1, pp. 69-76, Jun., 2003.
- [12] M.M.S. Lira, H. M. de Oliveira and R.J.S. Cintra, Elliptic-Cylinder Wavelets: The Mathieu Wavelets, *IEEE Signal Process. Letters*, vol. 11, n.1, Jan., pp. 52 - 55, 2004.
- [13] B.V. Gnedenko, and A.N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Reading, Ma: Addison-Wesley, 1954.
- [14] D. Gabor, "Theory of Communications", *J. IEE (Londres)*, vol. 93, pp. 429-457, 1946.
- [15] L.R. Soares, H.M. de Oliveira, R.J.S. Cintra and R.M. Campello de Souza, Fourier Eigenfunctions, Uncertainty Gabor Principle and Isoresolution Wavelets, in *Anais do XX Simpósio Bras. de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, Oct., 2003. Available: <http://www2.ee.ufpe.br/codec/publicacoes.html>
- [16] W.B. Davenport, *Probability and Random Processes*, McGraw-Hill /Kogakusha, Tokyo, 1970.
- [17] P.J. Daves, Gamma Function and Related Functions, in: M. Abramowitz; I. Segun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1968.

- [18] L.J. Slater, Confluent Hypergeometric Function, in: M. Abramowitz; I. Segun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York: Dover, 1968.
- [19] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 4th Ed., New York: Academic Press, 1965.
- [20] E.W. Kamen and B.S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using Matlab*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997.
- [21] W. Kryszicki, On Some New Properties of the Beta Distributions, *Stat. Prob. Let.* 42, 131-137, 1999.
- [22] A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*. McGraw-Hill Book Company, INC/New York, San Francisco, London and Toronto, 1962.
- [23] C.B. Amar, *Beta wavelets. Synthesis and Application to Lossy Image Compression*. Advances in Engineering Software, 2005.
- [24] S. Mallat, *a Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd Ed., Academic Press, 1999.
- [25] S. Mallat, *Multiresolutions approximations and wavelets orthonormal bases  $L^2(\mathbb{R})$* . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315:69-87, September 1989.
- [26] Y. Meyer, *Wavelets and Operators.*, Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1992.
- [27] A. Oppenheim, R.W. Schaffer, *Digital Signal and Systems*. Prentice-Hall, 1975.
- [28] H.L. Resnikoff, R.O. Wells, Jr, *Wavelet Analysis*. Springer-Verlag, INC/New York, 1998.
- [29] R.C. Tolman, *The Principle of Statistical Mechanics*. Oxford 1938, pp.189-276.
- [30] Dirac, F.A.M., *Quantum Mechanics*. 2 ed, Oxford 1938, pp.103.

- [31] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford, 1937.
- [32] M. Abramowitz, and I. Stegun *Handbook of Mathematical Functions*. Chapter 13.
- [33] Y. Luke, *The Special Functions and Their Approximations*. Volume 1. Chapter 4.
- [34] Charles K. Chui, *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, San Diego, 1992.  
ISBN 91-58831
- [35] L.N. Bol'shev, N.V. Smirnov, *Tables of mathematical statistics* . Libr. math. tables, 46, Nauka (1983) (Processed by L.S. Bark and E.S. Kedrova)
- [36] K. Pearson, *Tables of the incomplete beta-function*, Cambridge Univ. Press, 1932.
- [37] A. Donedu, *Topologie. Fonctions Réelles d'une variable Réelle*. Librairie Vuibert, 1979.
- [38] E. Eckhoff, *Helly, Radon, and Carathéodory Type Theorems*. Handbook of Convex Geometry (Ed. P. M. Gruber and J. M. Wills). Amsterdam, Netherlands: North-Holland, pp. 389-448, 1993.
- [39] E. T. Whittaker, and G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis*. Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 560-562, 1990.
- [40] D. Gabor, *Theory of Communication*, 1945.
- [41] G. Araújo, e H. Oliveira, *Wavelets Beta de Suporte Compacto*, Recife, 2005.  
<http://www2.ee.ufpe.br/codec/newwavelets.html>.

*Esta dissertação foi objeto das seguintes publicações e divulgações:*

- SBRT: Artigos científicos em conferência Nacional.

ARAÚJO, G.A.A., DE OLIVEIRA, H.M., Compactly Supported One-cyclic Wavelets Derived from Beta Distributions, XXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBrT'05, Campinas, SP, Setembro, 2005.

- JCIS vol 20: Jornal da Sociedade Brasileira de Telecomunicações.

DE OLIVEIRA, H.M., G. A. A. ARAÚJO, Compactly Supported One-cyclic Wavelets Derived from Beta Distributions, Journal of Communication and Information Systems, (former Journal of the Brazilian Telecommunications Society), vol.20, n.3, pp.27-33, 2005. <http://www.iecom.org.br/>

- Wiki1 : Divulgação técnico-científica.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Beta\\_wavelet](http://en.wikipedia.org/wiki/Beta_wavelet)

- Wiki2: Divulgação técnico-científica.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Blur\\_derivative](http://en.wikipedia.org/wiki/Blur_derivative)

# Anexo

By Hélio M. de Oliveira and Giovanna A.A. de Araújo hmo@ufpe.br

Here you will find instructions for installing Beta wavelets in the MATLAB wavelet toolbox.

Wavelet Information:

```

full name          -      beta
compact name      -      beta      (e.g. beta34)
parameter alpha   -      alpha_beta = 33 34 43 44 35 53 ... 88
                                     2 < alpha < 10,  2 < beta < 10

```

In the Matlab wavelet toolbox, there exist five kinds of wavelets (type the command `waveinfo` on the prompt): (i) crude wavelets (ii) Infinitely regular wavelets (iii) Orthogonal and compactly supported wavelets (iv) biorthogonal and compactly supported wavelet pairs and (v) complex wavelets.

Beta wavelets possess closed expression: infinitely regular beta (type 3).

Freeware version: <http://www2.ee.ufpe.br/codec/beta.html>

MATLAB version 6 or more recent.

Algorithm:

STEP 1 - Download the m files | betawavf.m | betainfo.m |

STEP 2 - Place the above files at the folder

MatLab/toolbox/wavelet/wavelet

If your Matlab version has not such a path, you can find other similar paths and place "betawavf.m" and "betainfo.m" at the same place.

STEP 3 - In order to install beta wavelet, type the following at the

Matlab Command prompt:

```
wavemngr('add','beta','beta',3,'33 34 43 35 53 44 36 63 46 64 66 37 73 4
```

1) To check whether beta wavelet was successfully installed or not,

type at the prompt of the MatLab Command Window :

```
wavemngr('read',1)
```

2) To see beta wavelet information. Type at the prompt of the MatLab

Command Window : type betainfo

3) Now type wavemenu

```

function betainfo

%BETAINFO Information on beta wavelets

%
%   Beta Wavelets
%
%   General characteristics: Continuous and compactly supported wavelets.
%
%   Family                Beta
%   Short name            beta
%   parameters            alpha, beta: both strictly greater than 2
%   Examples              beta33, or beta36, beta63, beta66, beta39, beta93.
%
%   Orthogonal            sim, if alpha=beta
%   Compact support       yes (wavelet and scale)
%   scale function        yes
%   DWT                   no
%   CWT                   yes
%
%   Support width          $T=(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\beta+1)/(\alpha\beta)}$ 
%   support                $[-\sqrt{(\alpha/\beta)\cdot(\alpha+\beta+1)},$ 
%                         $\sqrt{(\beta/\alpha)\cdot(\alpha+\beta+1)}]$ 
%   Symmetry              possible
%
%   Reference: NEW CONTINUOUS COMPACTLY SUPPORTED WAVELETS DERIVED
%   FROM BETA DISTRIBUTIONS G.A.A. de Araújo, H.M. de Oliveira

```

%

% Giovana A. A. de Araújo, H.M. de Oliveira 20-Feb-05.

% Last Revision: 23-Feb-2005.

% Freeware version

```

function varargout = betawavf(varargin);

% beta wavelet -- Type 3 Wavelet according to waveinfo
% TWO OPTIONS -- 4 or 5 inputs
%
% case nargin = 4
% [PHI,PSI,T] = beta(LOWB,UPPB,N,alpha_beta)
% returns beta scaling and wavelet function evaluated
% on an N-point regular grid on the interval [LOWB,UPPB].
% LOWB and UPPB depend on alpha_beta (the input parameter).
% Output arguments are the PHI and PSI on the grid T
% The grid T is defined by LOWB,UPPB and N
% Two parameter into a single one:
% alpha_beta is broken => alpha and beta
% parameter constraint: alpha>1 and beta>1
%
% These beta wavelets have compact support
% The supp psi Beta is
% lowb= - sqrt( (alpha+beta+1)/(beta/alpha))
% uppb=  sqrt( (alpha+beta+1)/(alpha/beta))

% case nargin = 5
% A fiveth argument is allowed, if only one function is required
% [PHI,T] = betawavf(lowb,uppb,N,alpha_beta,'psi')
% [PSI,T] = betawavef(lowb,uppb,N,alpha_beta,'phi')
% When the fourth argument is used, but not equal to

```

```

% 'phi' or 'psi', outputs are the same as in main option.
%
%
% These wavelets are compactly supported
% The supp Beta is
% lowb= - sqrt( (alpha+beta+1)/(beta/alpha))
% uppb=  sqrt( (alpha+beta+1)/(alpha/beta))
%
% N must be a power of two
% See also betainfo, wavefun, waveinfo
%
% H.M. de Oliveira, G.A.A. de Araújo
% Last revision: 08/03/2005
%
%
%checking arguments

if errargn(mfilename,nargin,[4:5],nargout,[0:3]), error('*'), end

% Translate input arguments...
%
switch nargin
    case 4
        [lowb,uppb,N,label] = deal(varargin{:}); opt = 'two';
        ind = strncmpi('beta',label,4);

```

```

if isequal(ind,1) label([1:4]) = []; end

alpha_beta = wstr2num(deblank(label));

case 5

[lowb,uppb,N,label,opt] = deal(varargin{:});

if ~(isequal(opt,'two') | isequal(opt,'phi') | isequal(opt,'psi'))
    opt = 'two'; end

end

% split alpha_beta => alpha , beta
alpha = floor(alpha_beta/10); beta = alpha_beta - 10*alpha;

% check values of alpha and beta
if isempty(alpha) | isempty(beta) error('** beta: invalid
parameter!');

    end

if (alpha < 2) | (alpha > 9) error('** invalid alpha')

    end

if (beta < 2) | (beta > 9 ) error('** invalid beta')

    end

% check N
if errargt(mfilename,log(N)/log(2),'int')
    error('** invalid value for N')

    end

```

```

% set wavelet support
lowb= - sqrt( (alpha+beta+1)/(beta/alpha)); uppb=  sqrt(
(alpha+beta+1)/(alpha/beta));

% check interval
if errargt(mfilename,uppb-lowb,'re0')
    error('* beta: please verify the support')
end

% transform interval to grid
lint = (uppb - lowb); step = lint /N; if step > 0.3
    disp('* beta: the number of grid points is not enought ... Be carefull');
end
t = [lowb:step:uppb];

a = lowb; b = uppb; TT= lint;
% TT is the length of the support

% CONSTANT B(alpha,beta)
betao = gamma(alpha)*gamma(beta)/gamma(alpha+beta);

% Scaling function (phi)
if opt == 'two' | opt == 'phi' fator = betao.*TT.^(alpha+beta-1);
psi = (t-a).^(alpha-1).*(b-t).^(beta-1)/.fator;

```

```
end

% Wavelet function (psi)
if opt == 'two' | opt == 'psi' psi =
((alpha-1)./(t-a)-(beta-1)./(b-t)).*((t-a).^(alpha-1).*(b-t).^(beta-1))./fator;
end

% set output arguments
if opt == 'two' & nargout ~= 3
    error('* beta: too few output parameters');
end

switch opt
    case 'phi', varargout = {psi,t};
    case 'psi', varargout = {psi,t};
    otherwise , varargout = {phi,psi,t};
end
```